Ajuste con momentos L de las distribuciones no estacionarias GVE₁ y GVE₂ a series de *PMD*

Fitting with moments L of the non-stationary distributions GVE₁ and GVE₂ to *PMD* series

Daniel Francisco Campos-Aranda¹

¹ Profesor jubilado de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México, campos_aranda@hotmail.com

Autor para correspondencia: Daniel Francisco Campos-Aranda, campos_aranda@hotmail.com

Resumen

Las *crecientes de diseño* permiten el dimensionamiento hidrológico de las obras hidráulicas. Cuando no existen datos hidrométricos, las crecientes de diseño se estiman con métodos hidrológicos que se basan en las *lluvias de diseño*. La escasez de estaciones pluviográficas origina que los registros más comunes empleados para estimar las lluvias de diseño sean los de *precipitación máxima diaria (PMD)* anual. Debido a los impactos del cambio climático y/o a la alteración del entorno geográfico de las estaciones pluviométricas, los registros de *PMD* están mostrando tendencias y por lo tanto son no estacionarios. El análisis probabilístico de los registros de *PMD* no estacionarios, orientado a estimar *predicciones* de baja probabilidad de excedencia que puede realizar, de manera simple y sin dificultades computacionales, con base en la extensión del método de los momentos L para aplicar la *distribución general de valores extremos* (GVE) con su parámetro de ubicación (u) variable con el tiempo (t) en años, se introduce como covariable. Cuando la tendencia en el registro de *PMD* es lineal, se aplica el modelo probabilístico GVE₁, en el cual $u_t = \mu_0 + \mu_1 \cdot t$ y cuando es curva el modelo GVE₂ con $u_t = \mu_0 + \mu_1 \cdot t + \mu_2 \cdot t^2$. Entonces, la distribución GVE₁ tiene cuatro parámetros de ajuste (μ_0, μ_1, α, k) y la

GVE₂ cinco ($\mu_0, \mu_1, \mu_2, \alpha, k$). Se describen cuatro aplicaciones numéricas, y a través del análisis de sus resultados se demuestra la sencillez de la extensión del método de los momentos L y su versatilidad para estimar predicciones dentro del registro histórico y a futuro.

Palabras clave: momentos L, distribución GVE, error estándar de ajuste, regresión lineal, regresión parabólica, determinantes, regresión lineal múltiple.

Abstract

Design floods allow the hydrological sizing of hydraulic works. When hydrometric data is not available, design floods are estimated using hydrological methods that are based on *design rains*. The most common records used to estimate design rains are the annual maximum daily precipitations (*PMD*), this, due to the scarcity of rainfall recorder stations. The impacts of climate change and/or the alteration of the geographic environment of rain-gauge stations cause *PMD* records to show trends and therefore these records become non-stationary. In order to estimate predictions of low probability of exceedance a probabilistic analysis of the non-stationary *PMD* records can be performed. A simple approach without computational difficulties is based on the extension of the method of L moments applied to the general distribution of extreme values (GVE) with its location parameter (u) variable with time (t) in years, which is entered as a covariate. When the trend in the *PMD* register is linear, the probabilistic model GVE₁ is applied in which $u_t = \mu_0 + \mu_1 \cdot t$ and when the trend is curve the model GVE₂ with $u_t = \mu_0 + \mu_1 \cdot t + \mu_2 \cdot t^2$ is used. Thus, the GVE₁ distribution has four fit parameters (μ_0, μ_1, α, k) and five for the GVE₂ distribution ($\mu_0, \mu_1, \mu_2, \alpha, k$). Four numerical applications are described and the analysis of their results shows the simplicity of the extension of the L moments method and its versatility to estimate predictions within the historical record and to the future.

Keywords: L moments, GVE distribution, standard error of fit, linear regression, parabolic regression, determinants, multiple linear regression.

Recibido: 31/08/2017

Aceptado: 02/02/2019

Introducción

Generalidades

Las *lluvias de diseño* son precipitaciones máximas de cierta *duración* asociadas con bajas probabilidades de excedencia con las cuales se estiman, por medio de métodos hidrológicos, las *crecientes de diseño* cuando no se dispone de registros hidrométricos. Detalles de lo anterior se pueden consultar en Teegavarapu (2012), Mujumdar y Nagesh-Kumar (2012). Las *crecientes de diseño* permiten el dimensionamiento de las obras hidráulicas durante su planeación o cuando se revisan por seguridad. La estimación más confiable de las lluvias de diseño se basa en el análisis probabilístico (AP) de los datos máximos anuales, el cual asume que el proceso aleatorio que generan las precipitaciones observadas es estacionario y, por ello, sus propiedades estadísticas no cambian con el tiempo. En el AP se ajusta una *función de distribución de probabilidad* (FDP) conocida al registro de precipitaciones y con base en ella se realizan las *predicciones* buscadas o *lluvias de diseño*. Debido a la escasez de estaciones pluviográficas y la abundancia relativa de estaciones pluviométricas, los registros de valores extremos más comúnmente procesados de lluvias son los de *precipitación máxima diaria* (PMD) anual.

Actualmente, todas las estaciones pluviométricas están sometidas a los efectos del cambio climático global, o bien su entorno geográfico sufre modificaciones físicas generadas por las actividades del hombre. Entre las más impactantes están la urbanización, deforestación, desecación de lagunas y construcción de embalses, que alteran los procesos atmosféricos locales, dando origen a series o registros de *PMD* anual no estacionarios (Strupczewski & Kaczmarek, 2001; Khaliq, Ouarda, Ondo, Gachon, & Bobée, 2006; El Adlouni, Ouarda, Zhang, Roy, & Bobée, 2007; El Adlouni & Ouarda, 2008).

Para realizar el AP de registros no estacionarios, la teoría estadística de valores extremos ha sido extendida para ajustar el modelo clásico que siguen asintóticamente las series de datos hidrológicos máximos, es decir, la FDP *General de Valores Extremos estacionaria* (GVE₀) con tres parámetros de ajuste (u , α , k); lo anterior, con base en la introducción de las llamadas *covariables*. Una de las más utilizadas es el tiempo (t) en años, a través de la cual se puede tomar en cuenta la tendencia

observada en la serie de datos, adoptando como variable el parámetro de ubicación (u_t). Cuando la tendencia es lineal ($u_t = \mu_0 + \mu_1 \cdot t$) se ajusta el modelo GVE₁ de cuatro parámetros de ajuste (μ_0, μ_1, α, k). Si la tendencia es curva ($u_t = \mu_0 + \mu_1 \cdot t + \mu_2 \cdot t^2$), se aplica el modelo GVE₂ de cinco parámetros de ajuste ($\mu_0, \mu_1, \mu_2, \alpha, k$); en este modelo se pueden usar dos covariables ($u_t = \mu_0 + \mu_1 \cdot t + \mu_2 \cdot h$) (Khaliq *et al.*, 2006; Prosdocimi, Kjeldsen, & Miller, 2015).

Respecto a otras distribuciones no estacionarias, se tienen varias, por ejemplo la *Log-normal* (Vogel, Yaindl, & Walter, 2011; Aissaoui-Fqayeh, El Adlouni, Ouarda, & St. Hilaire, 2009) y los *modelos Logística Generalizada* (Kim, Nam, Ahn, Kim, & Heo, 2015) y *Pareto Generalizada* (Rao & Hamed, 2000), susceptibles de un tratamiento idéntico al que será expuesto para la distribución GVE. También se pueden usar otras covariables en lugar del tiempo (t), como algunos índices climáticos globales o regionales (Prosdocimi, Kjeldsen, & Svensson, 2014; López-de-la-Cruz & Francés, 2014; Álvarez-Olguín & Escalante-Sandoval, 2016; Campos-Aranda, 2018).

Objetivo

El objetivo de este trabajo consistió en exponer la teoría del ajuste de las distribuciones no estacionarias GVE₁ y GVE₂, por medio de la generalización del método de los momentos L, planteada inicialmente por El Adlouni y Ouarda (2008), y aplicada después por Gado y Nguyen (2016). Además, se exponen y procesan cuatro series de *PMD* anual, todas con tendencia, y se describen los resultados del ajuste del modelo GVE₁ o GVE₂, destacando la sencillez y utilidad de la extensión del método de los momentos L para obtener las predicciones dentro del registro histórico y a futuro.

Métodos y materiales

Distribución General de Valores Extremos

Los valores máximos anuales son eventos que ocurren en la cola derecha de la FDP, la cual define el comportamiento de la variable aleatoria hidrológica. Por lo anterior, las lluvias de diseño se pueden predecir con base en la FDP, como el valor máximo que corresponde a un cierto intervalo promedio de recurrencia o periodo de retorno (Tr), cuya probabilidad de excedencia es $p = 1/Tr$. La teoría de valores extremos estableció que los datos extremos siguen de manera asintótica a la FDP General de Valores Extremos (GVE), cuya aplicación ha sido recomendada (Stedinger, Vogel, & Foufoula-Georgiou, 1993; Hosking & Wallis, 1997; Coles, 2001; Khaliq *et al.*, 2006; Papalexiou & Koutsoyiannis, 2013; Gado & Nguyen, 2016) para modelar *datos hidrológicos* extremos (dh) con una probabilidad de no excedencia ($F(dh)$), que es:

$$F(dh) = \exp \left\{ - \left[1 - \frac{k(dh-u)}{\alpha} \right]^{1/k} \right\} \text{ cuando } k \neq 0 \quad (1)$$

En la expresión anterior, u , α y k son los parámetros de ubicación, escala y forma de la GVE₀. Cuando $k = 0$, se obtiene la distribución Gumbel-Powell, por lo cual el intervalo de la variable es $-\infty < dh < \infty$. Cuando $k > 0$, la distribución es Weibull, que es una curva con concavidad hacia abajo y límite superior, por lo cual $-\infty < dh \leq u + \alpha/k$. Finalmente, si $k < 0$, la distribución es Fréchet, que también es una curva, pero con concavidad hacia arriba y frontera inferior, por lo que $u + \alpha/k \leq dh < \infty$. Las *predicciones* buscadas (DH_{Tr}) se obtienen con la solución inversa de la ecuación (1):

$$DH_{Tr} = u + \frac{\alpha}{k} \{ 1 - [-\ln(1-p)]^k \} \text{ cuando } k \neq 0 \quad (2)$$

Momentos L de la muestra de datos

El método de los momentos L es quizás el más simple de los procedimientos confiables para estimar los parámetros de ajuste de las

FDP utilizadas en hidrología. Lo anterior debido a que los momentos L, que son combinaciones lineales (Hosking & Wallis, 1997) de los momentos de probabilidad ponderada (β_r), no son afectados de manera significativa por los valores dispersos (*outliers*) de la muestra. Los primeros tres momentos L de una muestra (l_1, l_2, l_3) y el cociente L de asimetría (t_3) se estiman a través del estimador insesgado (b_r) de los β_r , como sigue:

$$l_1 = b_0 \quad (3)$$

$$l_2 = 2 \cdot b_1 - b_0 \quad (4)$$

$$l_3 = 6 \cdot b_2 - 6 \cdot b_1 + b_0 \quad (5)$$

$$t_3 = l_3/l_2 \quad (6)$$

El estimador insesgado de los β_r es (Hosking & Wallis, 1997):

$$b_r = \frac{1}{n} \sum_{i=r+1}^n \frac{(i-1)(i-2)\cdots(i-r)}{(n-1)(n-2)\cdots(n-r)} dh_i \quad (7)$$

donde $r = 0, 1, 2, \dots$ y dh_i son los datos de la muestra o serie disponible de datos hidrológicos de tamaño n , ordenados de menor a mayor ($dh_1 \leq dh_2 \leq \dots \leq dh_n$).

Parámetros de ajuste de la distribución GVE estacionaria

Para el modelo GVE₀ con el método de los momentos L, sus tres parámetros de ajuste se calculan con las ecuaciones (Stedinger *et al.*, 1993; Hosking & Wallis, 1997; Rao & Hamed, 2000; Campos-Aranda, 2018):

$$k \cong 7.8590 \cdot c + 2.9554 \cdot c^2 \quad (8)$$

siendo:

$$c = \frac{2}{3 + t_3} - 0.63093 \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{l_2 \cdot k}{(1 - 2^{-k}) \cdot \Gamma(1 + k)} \quad (10)$$

$$u = l_1 - \frac{\alpha}{k} [1 - \Gamma(1 + k)] \quad (11)$$

Para la estimación de la función Gamma $\Gamma(\omega)$ se utilizó la fórmula de Stirling (Davis, 1972), mostrada en la ecuación (12):

$$\Gamma(\omega) \cong e^{-\omega} \cdot \omega^{\omega-1/2} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left[1 + \frac{1}{12 \cdot \omega} + \frac{1}{288 \cdot \omega^2} - \frac{139}{51840 \cdot \omega^3} - \frac{571}{2488320 \cdot \omega^4} + \dots \right] \quad (12)$$

AP no estacionario con GVE₁ y GVE₂

Según Strupczewski y Kaczmarek (2001), el ajuste de las distribuciones no estacionarias GVE₁ y GVE₂ implica dos supuestos: (1) se acepta que la no estacionariedad de las series de *PMD* anual es causada por cambios graduales del entorno geográfico y/o por el cambio climático global, generando una alteración ligera de sus parámetros estadísticos; y (2) se acepta que la FDP es independiente del tiempo, entonces la distribución GVE, con parámetros de ajuste variables con el tiempo, es aceptable para modelar datos extremos no estacionarios. Por lo anterior, se debe considerar variable en el tiempo la media (μ_t) de la distribución GVE, cuya expresión es (Rao & Hamed, 2000):

$$\mu = u + \frac{\alpha}{k} [1 - \Gamma(1 + k)] \quad (13)$$

Ajuste de la distribución GVE₁

La inspección de la serie cronológica de PMD_i permitirá definir si se adopta una tendencia de la media (μ_t) lineal o curva. Cuando la tendencia en la media es lineal y se introduce en la ecuación (13), se puede despejar el parámetro de ubicación (u), que ahora será variable con respecto al tiempo t , que varía de 1 a n . Su expresión es (El Adlouni & Ouarda, 2008; Gado & Nguyen, 2016):

$$u_t = \mu_0 + \mu_1 \cdot t - \frac{\alpha}{k} [1 - \Gamma(1 + k)] \quad (14)$$

Las magnitudes μ_0 y μ_1 de la recta que representa la tendencia lineal de la muestra o serie de datos PMD_i se obtienen con base en las ecuaciones del Apéndice 1. Para probar que la pendiente μ_1 es estadísticamente diferente de cero se aplican las ecuaciones del Apéndice 2. Para estimar los valores de los parámetros de escala (α) y forma (k) de la expresión anterior que corresponden a la FDP estacionaria (GVE₀), se retira la tendencia de la serie PMD_i para obtener una serie estacionaria PMD_e^μ , con base en la ecuación siguiente (Khaliq *et al.*, 2006):

$$PMD_e^\mu = PMD_i - \mu_1 \cdot t \quad (15)$$

Enseguida se aplican las ecuaciones (8) a (10) para obtener los valores buscados de α y k . Por último, se aplica la ecuación (2), empleando la expresión (14) para tomar en cuenta el parámetro de ubicación variable (u_t) con el tiempo y realizar predicciones dentro del registro histórico ($t < n$) al final de éste ($t = n$), así como varios años después ($t > n$), por ejemplo, en el futuro al término de la vida útil de la obra hidráulica analizada, con lo cual se toma en cuenta la tendencia observada en la serie de datos hidrológicos (Mudersbach & Jensen, 2010).

Ajuste de la distribución GVE₂

Cuando la tendencia de la media (μ_t) es curva y se introduce en la ecuación (13), el parámetro de ubicación variable (u_t) con respecto al tiempo es igual a (El Adlouni & Ouarda, 2008; Gado & Nguyen, 2016):

$$u_t = \mu_0 + \mu_1 \cdot t + \mu_2 \cdot t^2 - \frac{\alpha}{k} [1 - \Gamma(1 + k)] \quad (16)$$

Las magnitudes μ_0 , μ_1 y μ_2 de la ecuación de la curva que representa la tendencia de la muestra o serie de datos PMD_i se obtienen con base en las ecuaciones del Apéndice 3. Para estimar los valores de los parámetros de escala (α) y forma (k) de la expresión anterior que corresponden a la FDP estacionaria (GVE_0) se retira la tendencia de la serie PMD_i para obtener una serie estacionaria PMD_e^μ con base en la ecuación siguiente:

$$PMD_e^\mu = PMD_i - \mu_1 \cdot t - \mu_2 \cdot t^2 \quad (17)$$

Enseguida se aplican las ecuaciones (8) a (10), para obtener los valores buscados de α y k . Por último, se aplica la ecuación (2), empleando la expresión (16), para tomar en cuenta el parámetro de ubicación variable (u_t) con el tiempo y realizar predicciones dentro del registro histórico ($t < n$) al final de éste ($t = n$) y en un tiempo futuro, como se indicó para el modelo GVE_1 .

La distribución no estacionaria GVE_2 también se puede aplicar con dos covariables (t y h), quedando el parámetro de ubicación variable (u_t) igual a (Prosdocimi *et al.*, 2014; Prosdocimi *et al.*, 2015):

$$u_t = \mu_0 + \mu_1 \cdot t + \mu_2 \cdot h - \frac{\alpha}{k} [1 - \Gamma(1 + k)] \quad (18)$$

Las magnitudes μ_0 , μ_1 y μ_2 de la ecuación de la regresión lineal múltiple que representa la tendencia de la muestra o serie de datos PMD_i se obtienen con base en las ecuaciones del Apéndice 4. Para estimar los valores de los parámetros de escala (α) y forma (k) de la expresión anterior que corresponden a la FDP estacionaria (GVE_0), se retira la tendencia de la serie PMD_i para obtener una serie estacionaria PMD_e^μ , con base en la ecuación siguiente:

$$PMD_e^\mu = PMD_i - \mu_1 \cdot t - \mu_2 \cdot h \quad (19)$$

Enseguida se aplican las ecuaciones (8) a (10), para obtener los valores buscados de α y k . Después se aplica la ecuación (2), empleando la expresión (18), para tomar en cuenta el parámetro de ubicación variable (u_t) con el tiempo y realizar predicciones dentro del registro histórico ($t < n$) al final de éste ($t = n$) y en un tiempo futuro ($t > n$), como se indicó para el modelo GVE₁.

Error estándar de ajuste

Desde mediados de la década de 1970 se formuló al *error estándar de ajuste* (EEA) como una medida cuantitativa que estima la habilidad descriptiva del modelo probabilístico ajustado (Meylan, Favre, & Musy, 2012), y que además permite la comparación objetiva entre las diversas FDP que se prueban o ajustan a una serie o muestra de datos, pues tiene las unidades de los datos (PMD_i). Su expresión es la siguiente (Kite, 1977):

$$EEA = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (PMD_i^o - PMD_i^e)^2}{n - npa}} \quad (20)$$

donde n es el número de datos de la serie disponible; npa , el número de parámetros de ajuste de la FDP que se prueba, con cuatro para el modelo GVE₁ y cinco para los dos modelos GVE₂; PMD_i^o , son los datos ordenados de menor a mayor, y PMD_i^e son los valores estimados con la ecuación (2) de la FDP (GVE₁ o GVE₂), para la probabilidad de no excedencia $P(X < x)$, estimada con la fórmula de Weibull (Benson, 1962):

$$P(X < x) = \frac{m}{n+1} \quad (21)$$

donde m es el número de orden del dato, con 1 para el menor y n para el mayor. El cálculo del EEA con la ecuación (20) permite la comparación de otros modelos probabilísticos no estacionarios en la serie que se procesa. Cuando los valores del EEA son similares, se puede adoptar un

modelo no estacionario de manera subjetiva, por ejemplo, el que conduce a las predicciones más desfavorables.

Planteamiento de los análisis probabilísticos

Con base en la ecuación (2) se estiman las predicciones con periodos de retorno (Tr) de 2, 10, 25, 50 y 100 años, a través del periodo de registro, aplicando variable el parámetro de ubicación (u_t). La primera predicción corresponde a la mediana, ya que su probabilidad de no excedencia ($1-p$) es de 50% y las cuatro siguientes se calculan para los valores siguientes: 0.90, 0.96, 0.98 y 0.99, respectivamente. Además, en las series procesadas se hacen predicciones a futuro, para los años 2025 y 2050. Se considera que extrapolar más de 30 años el comportamiento observado de la tendencia histórica es bastante arriesgado. También se muestran en los gráficos de datos y predicciones las estimaciones de los periodos de retorno extremos (2 y 100 años) con el modelo estacionario GVE_0 , las cuales son líneas rectas horizontales que se indican punteadas.

AP no estacionario con LOG y PAG

Las FDP Logística Generalizada (LOG) y Pareto Generalizada (PAG) son dos modelos probabilísticos utilizados por lo regular en los análisis de frecuencias de datos hidrológicos extremos y que resultan aplicables en sus versiones no estacionarias con parámetro de ubicación variable (u_t) por medio de la generalización del método de los momentos L, como se ha expuesto a partir de la ecuación (13). Esta ecuación clave del método tiene las expresiones siguientes en las distribuciones LOG y PAG (Rao & Hamed, 2000):

$$\mu = u + \frac{\alpha}{k} [1 - \Gamma(1+k) \cdot \Gamma(1-k)] \quad (22)$$

$$\mu = u + \frac{\alpha}{1+k} \quad (23)$$

Respecto a las ecuaciones (1) y (2), correspondientes a las distribuciones LOG y PAG, se pueden consultar en Hosking y Wallis (1997), y Campos-Aranda (2018).

Criterio de severidad de la tendencia lineal

Las ecuaciones del Apéndice 2 conducen a dos estadísticos asociados con la pendiente de la regresión lineal: el DS calculado y su correspondiente valor crítico DS_c . Cuando el DS supera ligeramente al DS_c , la pendiente es significativa y leve; cuando el DS supera por una unidad o más al DS_c , la pendiente es severa. Las pendientes *moderadas* ocurren en el caso intermedio.

Serie 1 con tendencia lineal descendente severa

Este registro de *PMD* anual pertenece a la estación pluviométrica Abritas, ubicada en el municipio de Ciudad del Maíz en la zona norte de la región huasteca del estado de San Luis Potosí, México. Abarca 54 años, en el periodo de 1961 a 2015, ya que tiene incompleto el año de 1998. Con excepción de la serie 2, la información de este registro y de los demás fue proporcionada por la Dirección Local San Luis Potosí de la Comisión Nacional del Agua. Sus valores se citan en la Tabla 1.

Tabla 1. Datos máximos anuales de *PMD* en milímetros, en tres estaciones del estado de San Luis Potosí, México.

Núm. dato	Abri-tas	Las Adjun-tas	Los Fil-tros	Núm. dato	Abri-tas	Las Adjun-tas	Los Fil-tros	Núm. dato	Los Fil-tros
1	150.0	57.4	15.9	28	140.0	38.0	58.0	55	40.2
2	131.5	75.0	20.6	29	90.0	182.5	42.9	56	111.
3	127.5	42.0	50.9	30	140.0	134.7	26.4	57	43.3
4	183.0	65.5	40.5	31	168.0	69.4	65.5	58	76.9

5	87.0	72.2	63.6	32	194.0	118.2	22.0	59	42.8
6	215.5	63.2	41.9	33	80.0	111.4	51.2	60	46.1
7	203.5	131.5	60.0	34	85.0	92.3	66.5	61	42.5
8	110.0	70.9	35.9	35	138.0	86.0	26.0	62	45.3
9	187.5	100.3	48.6	36	138.0	108.7	31.5	63	44.5
10	254.0	141.5	63.0	37	84.0	67.5	46.5	64	26.0
11	102.0	58.1	35.5	38	56.0	72.0	44.0	65	59.1
12	130.0	74.7	40.0	39	85.0	76.8	41.0	66	44.1
13	164.0	87.0	63.2	40	33.0	58.0	55.0	67	63.0
14	280.0	134.0	39.4	41	23.1	83.0	21.5	68	51.6
15	147.0	78.4	27.2	42	35.0	58.9	29.8	-	-
16	170.0	237.5	59.0	43	70.4	116.8	41.5	-	-
17	193.0	80.0	32.0	44	57.0	141.0	24.9	-	-
18	85.0	59.2	30.0	45	71.0	119.3	59.0	-	-
19	116.5	93.0	40.2	46	120.0	86.3	33.5	-	-
20	87.0	72.2	31.5	47	223.2	146.1	46.5	-	-
21	150.0	85.0	31.5	48	90.9	115.5	51.0	-	-
22	97.0	68.0	52.0	49	133.0	132.7	40.0	-	-
23	120.0	86.4	52.3	50	100.0	303.8	35.5	-	-
24	64.0	66.7	31.3	51	102.0	75.3	45.5	-	-
25	90.0	80.5	35.0	52	98.0	70.0	25.9	-	-
26	175.0	100.0	28.5	53	98.0	151.5	20.7	-	-
27	100.0	133.5	57.2	54	95.0	125.1	37.5	-	-

Serie 2 con tendencia lineal ascendente leve

Campos-Aranda (2016) expuso el registro de *PMD* anual de la estación pluviométrica Zacatecas de la capital del estado del mismo nombre en México, con 58 datos en el lapso de 1953 al 2010, el cual mostró tendencia lineal ascendente logarítmica; debido a ello fue procesado en tal referencia, con base en la FDP Log-normal no estacionaria de dos parámetros de ajuste sugerida por Vogel *et al.* (2011).

Serie 3 con tendencia lineal ascendente moderada

Este registro de *PMD* anual pertenece a la estación pluviométrica Las Adjuntas, ubicada donde se unen los ríos Tampaón y Moctezuma para formar el río Pánuco, en la zona oriente de la región huasteca del estado de San Luis Potosí, México. Comprende 54 años del intervalo de 1961 a 2015, debido a que falta el año de 1986; sus valores se exponen en la Tabla 1.

Serie 4 con tendencia curva convexa

Este registro de *PMD* anual pertenece a la estación pluviométrica Los Filtros, ubicada dentro de la ciudad de San Luis Potosí, capital del estado del mismo nombre en México. Abarca 68 años del intervalo de 1949 a 2016. Sus valores se tienen en la Tabla 1.

Descripción de los resultados

Predicciones en la estación Abritas, S.L.P.

Primero se aplicaron las ecuaciones del Apéndice 1, y se obtuvo $\mu_0 = 167.6315$, $\mu_1 = -1.6057$ y $r_{xy} = -0.4619$. Después se probó la tendencia lineal con las ecuaciones del Apéndice 2 y se obtuvo un $DS = -3.7558$ y un $DS_c = 2.0066$, por lo cual resultó altamente significativa.

La serie estacionaria (PMD_e^μ , ecuación (15)) acepta un modelo GVE_0 con parámetros de escala y forma de $\alpha = 41.4364$ y $k = 0.0691$; en cambio, la ecuación (2), utilizando el parámetro de ubicación variable (ecuación 14), conduce a un error estándar de ajuste (*EEA*) de 34.8 mm.

En la Tabla 2 se expone una parte de las predicciones dentro de registro histórico y una extrapolación a una década (año 2025), pues a futuro son menores debido a la pendiente descendente. Las predicciones con el modelo estacionario GVE_0 de periodos de retorno 2 y 100 años son: 114.9 y 290.8 mm, con un $EEA = 6.0$ mm.

En la Figura 1 se expone la serie cronológica de los datos y las rectas de las predicciones, las cuales se dibujan, con base en las predicciones de la Tabla 2, dentro del registro histórico con los valores de la covariable t , que varían de 1 a n .

Tabla 2. Predicciones en milímetros en el periodo histórico y a futuro en la estación Abritas, San Luis Potosí, México, con base en la distribución no estacionaria GVE_1 .

t	Año	Periodos de retorno (años)				
		2	10	25	50	100
1	1961	159.6	230.9	263.5	286.3	307.8
10	1970	145.1	216.5	249.0	271.8	293.4
20	1980	129.0	200.4	233.0	255.8	277.3
30	1990	113.0	184.3	216.9	239.7	261.3
40	2001	96.9	168.3	200.8	223.6	245.2
50	2011	80.9	152.2	184.8	207.6	229.2
54	2015	74.5	145.8	178.4	201.2	222.7
64	2025	58.4	129.8	162.3	185.1	206.7

Figura 1. Serie cronológica de *PMD* anual y rectas de predicciones estimadas con la distribución GVE_1 en la estación Abritas, San Luis Potosí, México.

Predicciones en la estación Zacatecas, Zac.

Al aplicar las ecuaciones del Apéndice 1 se obtuvo $\mu_0 = 40.1247$, $\mu_1 = 0.2246$ y $r_{xy} = 0.2638$. Enseguida se probó la tendencia lineal con las

ecuaciones del Apéndice 2; se obtuvo un $DS = 2.0463$ y un $DS_c = 2.0032$, por lo cual resultó escasamente significativa.

La serie estacionaria (PMD_e^μ , ecuación (15)) acepta un modelo GVE_0 con parámetros de escala y forma de $\alpha = 11.8358$ y $k = 0.0709$; en cambio, la ecuación (2), utilizando el parámetro de ubicación variable (ecuación (14)), conduce a un error estándar de ajuste de 3.0 mm.

En la Tabla 3 se expone una parte de las predicciones dentro de registro histórico y a futuro de los años 2025, 2050 y 2100. Como este registro de 58 datos concluye en 2010, entonces el valor del tiempo t en 2025 es 73, en 2050 es 98 y en 2100 es 148. Las predicciones con el modelo estacionario GVE_0 de periodos de retorno 2 y 100 años son 45.2 y 86.7 mm, respectivamente, con un $EEA = 1.5$ mm. En la Figura 2 se expone la serie cronológica de los datos y las rectas de las predicciones trazadas según resultados de la Tabla 3.

Tabla 3. Predicciones (mm) en el periodo histórico y a futuro en la estación Zacatecas, Zacatecas, México, con base en la distribución no estacionaria GVE_1 .

t	Año	Periodos de retorno (años)				
		2	10	25	50	100
1	1953	38.5	58.9	68.1	74.6	80.7
10	1962	40.5	60.9	70.1	76.6	82.7
20	1972	42.8	63.1	72.4	78.9	85.0
30	1982	45.0	65.4	74.6	81.1	87.2
40	1992	47.3	67.6	76.9	83.3	89.5
50	2002	49.5	69.9	79.1	85.6	91.7
58	2010	51.3	71.7	80.9	87.4	93.5
73	2025	54.7	75.0	84.3	90.8	96.9
98	2050	60.3	80.6	89.9	96.4	102.5
148	2100	71.5	91.9	101.1	107.6	113.7

Figura 2. Serie cronológica de *PMD* anual y rectas de predicciones estimadas con la distribución GVE_1 en la estación Zacatecas, Zacatecas, México.

Predicciones en la estación Las Adjuntas, S.L.P.

Al aplicar las ecuaciones del Apéndice 1 se obtuvo $\mu_0 = 74.9213$, $\mu_1 = 0.8813$ y $r_{xy} = 0.2981$. Enseguida se probó la tendencia lineal con las ecuaciones del Apéndice 2; se obtuvo un $DS = 2.2520$ y un $DS_c = 2.0066$, por lo cual resultó moderadamente significativa.

La serie estacionaria (PMD_e^μ , ecuación (15)) acepta un modelo GVE_0 con parámetros de escala y forma de $\alpha = 26.5840$ y $k = -0.1617$; en cambio, la ecuación (2), utilizando el parámetro de ubicación variable (ecuación (14)), conduce a un *EEA* de 15.6 mm.

En la Tabla 4 se expone una parte de las predicciones dentro de registro histórico y a futuro en los años 2025, 2050 y 2100. Como este registro de 54 datos concluye en 2015, entonces el valor del tiempo t en 2025 es

64, en 2050 es 89 y 2100 es 139. Las predicciones con el modelo estacionario GVE_0 de periodos de retorno 2 y 100 años son 87.4 y 280.9 mm, con un $EEA = 11.3$ mm. En la Figura 3 se expone la serie cronológica de los datos y las rectas de las predicciones dibujadas a partir de los resultados de la Tabla 4.

Tabla 4. Predicciones (mm) en el periodo histórico y a futuro en la estación Las Adjuntas, San Luis Potosí, con base en la distribución no estacionaria GVE_1 .

<i>t</i>	Año	Periodos de retorno (años)				
		2	10	25	50	100
1	1961	65.7	127.8	167.0	200.2	237.2
10	1970	73.6	135.7	174.9	208.2	245.1
20	1980	82.4	144.5	183.7	217.0	253.9
30	1991	91.2	153.4	192.6	225.8	262.7
40	2001	100.0	162.2	201.4	234.6	271.5
50	2011	108.9	171.0	210.2	243.4	280.3
54	2015	112.4	174.5	213.7	246.9	283.9
64	2025	121.2	183.3	222.5	255.8	292.7
89	2050	143.2	205.4	244.6	277.8	314.7
139	2100	187.3	249.4	288.6	321.8	358.8

Figura 3. Serie cronológica de *PMD* anual y rectas de predicciones estimadas con la distribución GVE_1 en la estación Las Adjuntas, San Luis Potosí, México.

Predicciones en la estación Los Filtros, S.L.P.

Las ecuaciones del Apéndice 3 conducen a los valores siguientes: $\mu_0 = 43.7097$, $\mu_1 = -0.2339$ y $\mu_2 = 0.0049$ como coeficientes de la regresión polinomial (ecuación (A3.1)).

La serie estacionaria (PMD_e^μ , ecuación (17)) acepta un modelo GVE_0 , con parámetros de escala y forma de $\alpha = 12.6389$ y $k = 0.05071$; en cambio, la ecuación (2), utilizando el parámetro de ubicación variable (ecuación (16)), conduce a un error estándar de ajuste de 4.3 mm.

En la Tabla 5 se muestra una parte de las predicciones dentro de registro histórico y a futuro en los años 2025 y 2050. Como este registro de 66 datos concluye en 2016, entonces, el valor del tiempo t en 2025 es 77 y en 2050 es 102. Las predicciones con el modelo estacionario GVE_0 de periodos de retorno 2 y 100 años son 41.5 y 87.5 mm, respectivamente, con un $EEA = 3.7$ mm. En la Figura 4 se muestra la serie cronológica de los datos y las curvas de predicciones trazadas con base en los resultados de la Tabla 5.

Tabla 5. Predicciones (mm) en el periodo histórico y a futuro en la estación Los Filtros, S.L.P., con base en la distribución no estacionaria GVE_2 .

t	Año	Periodos de retorno (años)				
		2	10	25	50	100
1	1949	41.3	63.6	74.0	81.4	88.6
10	1958	39.7	62.0	72.4	79.8	86.9
20	1968	38.8	61.1	71.5	79.0	86.1
30	1978	38.9	61.2	71.7	79.1	86.2
40	1988	40.1	62.3	72.8	80.2	87.3
50	1998	42.2	64.5	74.9	82.3	89.4
60	2008	45.3	67.5	78.0	85.4	92.5
68	2016	48.4	70.7	81.2	88.6	95.7
77	2025	52.8	75.1	85.5	92.9	100.0
102	2050	69.0	91.3	101.8	109.2	116.3

Figura 4. Serie cronológica de *PMD* anual y curvas de predicciones estimadas con la distribución GVE_2 en la estación Los Filtros, S.L.P., México.

Predicciones

Las cuatro aplicaciones numéricas descritas cubren los casos más comunes que se tienen de registros de PMD_i no estacionarios, los cuales corresponden a series con tendencia lineal descendente (severa) y ascendente (leve y moderada), y con tendencia curva ascendente (leve en un contexto apreciativo) hacia el futuro. Las tendencias ascendentes, por lo general ocurren en estaciones pluviométricas ubicadas en ciudades, o en las que se ha construido un gran embalse cercano. En el primer caso existe un aumento de la temperatura por efectos de la isla de calor y, en el segundo, puede acontecer un incremento en la humedad relativa por la evaporación. Las tendencias descendentes pueden estar asociadas con el cambio climático regional.

Como es lógico, las predicciones asociadas con bajas probabilidades de excedencia tienen menor importancia en los registros con tendencia descendente, al ser menores en el futuro. Lo contrario ocurre en series con tendencia ascendente, en las cuales es necesario explicar o justificar el origen físico probable de tal tendencia para aceptar las extrapolaciones de las predicciones a futuro e intentar discernir sobre el alcance real de ellas, ya que resulta extremadamente riesgoso adoptar el comportamiento de tendencia en aumento, cuando, por ejemplo, no se sabe si continuará el desarrollo urbano.

Conclusiones

Los análisis probabilísticos de registros de PMD_i no estacionarios que muestran tendencia serán, en el futuro inmediato, cada vez más comunes debido a los impactos del cambio climático y del desarrollo urbano. Un enfoque simple y sin dificultades computacionales para procesar tales registros se basa en la extensión de la teoría de valores extremos a través del ajuste con momentos L , de las distribuciones no estacionarias GVE_1 y GVE_2 con parámetro de ubicación (u) variable con el tiempo (t), u otras covariables.

A través de la descripción de las cuatro aplicaciones numéricas en registros no estacionarios de PMD_i se observa la simplicidad del método expuesto, además de la facilidad para obtener las predicciones asociadas con probabilidades de no excedencia. La selección entre los modelos expuestos (GVE_1 y GVE_2) depende de la tendencia observada, por ello su contraste gráfico es básico para validar la habilidad descriptiva de las predicciones dentro del registro histórico y en el futuro cercano (años 2025 y 2050). Los resultados numéricos del error estándar de ajuste permitirán el contraste y la aceptación de otros modelos probabilísticos no estacionarios.

Apéndice 1: recta de tendencia lineal

Se considera que la variable dependiente (y) son los datos hidrológicos máximos anuales o PMD_i , y los tiempos o años t son las abscisas (x); en este caso, iguales al i -ésimo valor i . La pendiente (μ_1) de la recta de regresión ajustada por mínimos cuadrados de los residuos y la ordenada al origen (μ_0) se obtienen con las ecuaciones siguientes (Campos-Aranda, 2003):

$$PMD_i = \mu_0 + \mu_1 \cdot t \quad (A1.1)$$

$$\mu_1 = \frac{\text{cov}(PMD, t)}{\text{var}(t)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n PMD_i \cdot i - \overline{PMD} \cdot \bar{t}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 - \bar{t}^2} \quad (A1.2)$$

$$\mu_0 = \overline{PMD} - \mu_1 \cdot \bar{t} \quad (A1.3)$$

En las ecuaciones anteriores, $\overline{PMD}$ y $\bar{t}$ son las medias aritméticas de la serie de datos y del tiempo, que varía de 1 a n . El coeficiente de correlación lineal (r_{xy}) mide el grado de dependencia o asociación entre las variables PMD_i , y t varía de 0 a 1, indicando con la unidad la regresión perfecta. Su ecuación es:

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(PMD, t)}{\sqrt{\text{var}(t) \cdot \text{var}(PMD)}} \quad (A1.4)$$

siendo:

$$\text{var}(PMD) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n PMD_i^2 - \overline{PMD}^2 \quad (A1.5)$$

Apéndice 2: prueba estadística de la pendiente

Para probar si la pendiente (μ_1) de la recta de regresión obtenida con la ecuación (A1.2) es estadísticamente diferente de cero, se usó una prueba basada en la distribución de Student, que fue propuesta por

Ostle y Mensing (1975), y que aplica el estadístico DS mediante las tres ecuaciones siguientes:

$$DS = \frac{\mu_1}{\sqrt{S_\mu^2}} \quad (A2.1)$$

$$S_\mu^2 = \frac{S_E^2}{\sum_{i=1}^n (i - \bar{i})^2} \quad (A2.2)$$

$$S_E^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (PMD_i - PMD_i^e)^2}{(n-2)} \quad (A2.3)$$

S_E^2 y S_μ^2 son las varianzas de los errores y de la pendiente. En la ecuación anterior, PMD_i^e es el valor estimado con la ecuación (A1.1). Si el valor absoluto calculado DS (ecuación (A2.1)) es mayor que el crítico (DS_c), obtenido para la distribución de Student con $\nu = n - 2$ grados de libertad y $\alpha = 5\%$, en una prueba de dos colas, la pendiente μ_1 es significativa, es decir, existe tendencia lineal. Para estimar el valor de DS_c se utiliza el algoritmo propuesto por Zelen y Severo (1972), con $Z = 1.95996$ para una confiabilidad $(1 - \alpha)$ de 95%:

$$DS_c = Z + \frac{G1}{v} + \frac{G2}{v^2} + \frac{G3}{v^3} + \frac{G4}{v^4} \quad (A2.4)$$

donde:

$$G1 = (Z^3 + Z)/4$$

$$G2 = (5Z^5 + 16Z^3 + 3Z) / 96$$

$$G3 = (3Z^7 + 19Z^5 + 17Z^3 - 15Z) / 384$$

$$G4 = (79Z^9 + 776Z^7 + 1482Z^5 - 1920Z^3 - 945Z) / 92160$$

Apéndice 3: curva parabólica para la tendencia

La variable dependiente (y) son los datos hidrológicos máximos anuales o PMD_i , y los tiempos o años t son las abscisas (x); en este caso, iguales al i -ésimo valor i . Los coeficientes μ_0 , μ_1 y μ_2 de la curva de regresión polinomial son:

$$PMD_i = \mu_0 + \mu_1 \cdot t + \mu_2 \cdot t^2 \quad (A3.1)$$

Ajustada por mínimos cuadrados de los residuos, se obtienen con base en las ecuaciones normales siguientes (Campos-Aranda, 2003):

$$n \cdot \mu_0 + \mu_1 \cdot \sum_{i=1}^n i + \mu_2 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{i=1}^n PMD_i \quad (A3.2)$$

$$\mu_0 \cdot \sum_{i=1}^n i + \mu_1 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 + \mu_2 \cdot \sum_{i=1}^n i^3 = \sum_{i=1}^n i \cdot PMD_i \quad (A3.3)$$

$$\mu_0 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 + \mu_1 \cdot \sum_{i=1}^n i^3 + \mu_2 \cdot \sum_{i=1}^n i^4 = \sum_{i=1}^n i^2 \cdot PMD_i \quad (A3.4)$$

En las tres expresiones anteriores, n es el número de valores de la serie de datos hidrológicos extremos procesada, y todas las sumatorias conducen a magnitudes numéricas que son los *coeficientes* de μ_0 , μ_1 y μ_2 en cada renglón y columna (C_{jk}); además, se tienen las magnitudes del lado derecho de las ecuaciones, conocidos como *términos independientes*. El determinante Δ de tales coeficientes se evalúa con la expresión siguiente (Chapra & Canale, 1988):

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \quad (A3.5)$$

$$\Delta = C_{11} \cdot C_{22} \cdot C_{33} + C_{12} \cdot C_{23} \cdot C_{31} + C_{13} \cdot C_{32} \cdot C_{21} - C_{13} \cdot C_{22} \cdot C_{31} - C_{23} \cdot C_{32} \cdot C_{11} - C_{33} \cdot C_{21} \cdot C_{12} \quad (A3.6)$$

Para obtener el valor buscado de μ_0 se forma un determinante Δ_0 ; cambiando la columna 1 de coeficientes por los tres términos independientes y evaluando su valor con la ecuación (A3.6) se tiene que:

$$\mu_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} \quad (A3.7)$$

El determinante Δ_1 se forma cambiando la columna 2 de coeficientes por los tres términos independientes; se obtiene su magnitud con la ecuación (A3.6) y entonces:

$$\mu_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (\text{A3.8})$$

Por último, se forma el determinante Δ_2 cambiando la tercera columna de coeficientes por los tres términos independientes y se cuantifica su valor con la ecuación (A3.6); ahora se tiene que:

$$\mu_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (\text{A3.9})$$

Apéndice 4: regresión lineal múltiple para la tendencia

De nuevo, la variable dependiente (y) son los datos hidrológicos máximos anuales o PMD_i , y los tiempos o años t son las abscisas (x), en este caso iguales al i -ésimo valor i . Los coeficientes μ_0 , μ_1 y μ_2 de la regresión lineal múltiple son:

$$PMD_i = \mu_0 + \mu_1 \cdot t + \mu_2 \cdot h_i \quad (\text{A4.1})$$

Ajustada por mínimos cuadrados de los residuos, se obtienen con base en las ecuaciones normales siguientes (Campos-Aranda, 2003):

$$n \cdot \mu_0 + \mu_1 \cdot \sum_{i=1}^n i + \mu_2 \cdot \sum_{i=1}^n h_i = \sum_{i=1}^n PMD_i \quad (\text{A4.2})$$

$$\mu_0 \cdot \sum_{i=1}^n i + \mu_1 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 + \mu_2 \cdot \sum_{i=1}^n i \cdot h_i = \sum_{i=1}^n i \cdot PMD_i \quad (\text{A4.3})$$

$$\mu_0 \cdot \sum_{i=1}^n h_i + \mu_1 \cdot \sum_{i=1}^n i \cdot h_i + \mu_2 \cdot \sum_{i=1}^n h_i^2 = \sum_{i=1}^n h_i \cdot PMD_i \quad (\text{A4.4})$$

En las tres expresiones anteriores, n es el número de valores de la serie de datos hidrológicos extremos procesada y todas las sumatorias conducen a magnitudes numéricas, que son los coeficientes de μ_0 , μ_1 y μ_2 en cada renglón y columna (C_{jk}); además, se tienen las magnitudes del lado derecho de las ecuaciones, conocidos como *términos independientes*. El determinante Δ de tales coeficientes se forma con la ecuación (A3.5), cuya magnitud se obtiene con la expresión (A3.6). Los valores buscados de μ_0 , μ_1 y μ_2 se calculan con los procedimientos de las ecuaciones (A3.7) a (A3.9).

Prosdocimi *et al.* (2014; 2015) presentan la aplicación de dos covariables al analizar gastos máximos, usando un índice relacionado con la extensión del área urbana en la cuenca para modelar la tendencia y un índice climático basado en la *PMD* de periodo de retorno 100 años de cada año, ocurrida en la cuenca para reproducir la variabilidad de los gastos.

Agradecimientos

Se agradecen los comentarios y correcciones sugeridas por los dos árbitros anónimos, las cuales guiaron hacia una presentación más clara de los conceptos involucrados y permitieron mejorar las descripciones abordadas en el trabajo.

Referencias

- Aissaoui-Fqayeh, I., El Adlouni, S., Ouarda, T. B. M. J., & St. Hilaire, A. (2009). Développement du modèle log-normal non-stationnaire et comparaison avec le modèle GEV non-stationnaire. *Hydrological Science Journal*, 54(6), 141-1156.
- Álvarez-Olguín, G., & Escalante-Sandoval, C. A. (2016). Análisis de frecuencias no estacionario de series de lluvia anual. *Tecnología y ciencias de agua*, 7(1), 71-88.
- Benson, M. A. (1962). Plotting positions and economics of engineering planning. *Journal of Hydraulics Division*, 88(6), 57-71.
- Campos-Aranda, D. F. (2003). Capítulo 5: Ajuste de Curvas. En: *Introducción a los métodos numéricos: software en Basic y aplicaciones en hidrología superficial* (pp. 93-127). San Luis Potosí, México: Editorial Universitaria Potosina.
- Campos-Aranda, D. F. (2016). Modelo probabilístico simple para análisis de frecuencias en registros hidrológicos extremos con tendencia. *Tecnología y ciencias del agua*, 7(3), 171-186.

- Campos-Aranda, D. F. (2018). Ajuste con momentos L de las distribuciones GVE, LOG y PAG no estacionarias en su parámetro de ubicación, aplicado a datos hidrológicos extremos. *Agrociencia*, 52(2), 169-189.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (1988). Tema 7.1: Solución de pocas ecuaciones. En: *Métodos numéricos para ingenieros* (pp. 217-227). México, DF, México: McGraw-Hill/Interamericana de México.
- Coles, S. (2001). Chapter 3: Classical Extreme Value Theory and Models. In: *An introduction to statistical modeling of extreme values* (pp. 45-73). London, England: Springer-Verlag.
- Davis, P. J. (1972). Gamma function and related functions. Chapter 6 (pp. 253-296). In: Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (eds.). *Handbook of mathematical functions*. New York, USA: Dover Publications.
- El Adlouni, S., Ouarda, T. B. M. J., Zhang, X., Roy, R., & Bobée, B. (2007). Generalized maximum likelihood estimators for the nonstationary generalized extreme value model. *Water Resources Research*, 43(W03410), 1-13.
- El Adlouni, S., & Ouarda, T. B. M. J. (2008). Comparaison des méthodes d'estimation des paramètres du modèle GEV non stationnaire. *Revue des Sciences de L'Eau*, 21(1), 35-50.
- Gado, T. A., & Nguyen, V. T. V. (2016). An at-site flood estimation in the context of nonstationarity. I: A simulation study. *Journal of Hydrology*, 535, 710-721.
- Hosking, J. R., & Wallis, J. R. (1997). Chapter 2: L-moments and Appendix: L-moments for some specific distributions In: *Regional frequency analysis. An approach based on L-moments* (pp. 14-43, 191-209). Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Khaliq, M. N., Ouarda, T. B. M. J., Ondo, J. C., Gachon, P., & Bobée, B. (2006). Frequency analysis of a sequence of dependent and/or non-stationary hydro-meteorological observations: A review. *Journal of Hydrology*, 329(3-4), 534-552.
- Kim, S., Nam, W., Ahn, H., Kim, T., & Heo, J. H. (2015). Comparison of nonstationary generalized logistic models based on Monte Carlo simulation. *Proceedings of the IAHS* (No. 371) (pp. 65-68), 22 June to 2 Jul. Prague, Czech Republic.
- Kite, G. W. (1977). Chapter 12: Comparison of frequency distributions. In: *Frequency and risk analyses in hydrology* (pp. 156-168). Fort Collins, USA: Water Resources Publications.

- López-de-la-Cruz, J., & Francés, F. (2014). La variabilidad climática de baja frecuencia en la modelación no estacionaria de los regímenes de las crecidas en las regiones hidrológicas Sinaloa y Presidio-San Pedro. *Tecnología y ciencias del agua*, 5(4), 79-101.
- Meylan, P., Favre, A. C., & Musy, A. (2012). Chapter 6: Validation of the model. In: *Predictive hydrology. A Frequency analysis approach* (pp. 103-117). Boca Raton, USA: CRC Press.
- Mudersbach, C., & Jensen, J. (2010). Nonstationary extreme value analysis of annual maximum water levels for designing coastal structures on the German North Sea coastline. *Journal of Flood Risk Management*, 3(1), 52-62.
- Mujumdar, P. P., & Nagesh-Kumar, D. (2012). *Floods in a changing climate. Hydrologic modeling*. Cambridge, United Kingdom: International Hydrology Series (UNESCO) and Cambridge University Press.
- Ostle, B., & Mensing, R. W. (1975). Chapter 7: Regression Analysis. In: *Statistics in research* (3rd ed.) (pp. 165-236). Ames, USA: Iowa State University Press.
- Papalexiou, S. M., & Koutsoyiannis, D. (2013). Battle of extreme value distributions: A global survey on extreme daily rainfall. *Water Resources Research*, 49 (1), 187-201.
- Prosdocimi, I., Kjeldsen, T. R., & Svensson, C. (2014). Non-stationarity in annual and seasonal series of peak flow and precipitation in the UK. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 14(5), 1125-1144.
- Prosdocimi, I., Kjeldsen, T. R., & Miller, J. D. (2015). Detection and attribution of urbanization effect on flood extremes using nonstationary flood frequency models. *Water Resources Research*, 51(6), 4244-4262.
- Rao, A. R., & Hamed, K. H. (2000). *Flood Frequency Analysis*. Chapter 7: Extreme Value Distributions (pp. 207-257). Boca Raton, USA: CRC Press.
- Stedinger, J. R., Vogel, R. M., & Foufoula-Georgiou, E. (1993). Frequency analysis of extreme events. Chapter 18. In: Maidment, D. R. (ed.). *Handbook of hydrology* (pp. 18.1-18.66). New York, USA: McGraw-Hill, Inc.
- Strupczewski, W. G., & Kaczmarek, Z. (2001). Non-stationary approach to at-site flood frequency modeling II. Weighted least squares estimation. *Journal of Hydrology*, 248(1-4), 143-151.

- Teegavarapu, R. S. V. (2012). *Floods in a changing climate. Extreme Precipitation*. Cambridge, United Kingdom: International Hydrology Series (UNESCO) and Cambridge University Press.
- Vogel, R. M., Yaindl, C., & Walter, M. (2011). Nonstationarity: Flood magnification and recurrence reduction factors in the United States. *Journal of the America Water Resources Association*, 47(3), 464-474.
- Zelen, M., & Severo, N. C. (1972). Probability Functions. Chapter 26 (pp. 925-995). In: Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (Eds.). *Handbook of mathematical functions*. New York, USA: Dover Publications.