

# Evaluación de fuerzas inducidas por oleaje en sistemas de pilas cilíndricas

Alberto Ávila Armella  
Rodolfo Silva Casarín  
Georges Andre Govaere Vicarioli

Universidad Nacional Autónoma de México

*Las fuerzas hidrodinámicas por oleaje son generalmente la carga lateral que rige el diseño de estructuras marítimas fijas, como las usadas para la extracción de hidrocarburos, o en instalaciones portuarias. Cuando los elementos de apoyo, comúnmente una o varias pilas de sección circular, son suficientemente grandes respecto al oleaje, como sucede en rompeolas basados en pilas, soportes de muelles y plataformas fijas, SPAR o TLP, su presencia provoca una perturbación en el oleaje que no debe despreciarse. Además, tratándose de varias pilas, los efectos del oleaje sobre cada una de ellas se ven influenciados por la presencia de las demás. En este trabajo se presentan las ecuaciones del potencial de velocidades del oleaje perturbado por una o varias pilas, a partir de las cuales se obtienen expresiones para calcular los diagramas de fuerzas sobre ellas; en dichas ecuaciones ya va incluido el efecto que tiene el conjunto sobre cada elemento aislado. También se muestra, mediante casos de estudio, la magnificación de los efectos asociados con la perturbación del oleaje, inducida por las interacciones entre componentes y varias pilas, la cual no se puede obtener si se ignoran dichas interacciones.*

**Palabras clave:** interacción ola-estructura, sistema de pilas, presión dinámica, fuerza hidrodinámica, fuerza resultante máxima, magnificación de efectos.

## Introducción

La explotación de algunos recursos marítimos requiere la instalación de estructuras fijas, tal es el caso de plataformas para extraer hidrocarburos, instalaciones portuarias, faros y boyas. Una de las formas más socorridas para anclar dichas estructuras es apoyarlas en el fondo mediante pilas de sección circular, que por su forma interactúan más eficientemente con el oleaje.

A veces estos apoyos llegan a ser de grandes dimensiones, comparados con la longitud de onda del oleaje, de tal suerte que las características de este último cambian en sus inmediaciones, por lo que los efectos que provoca son distintos a los que se presentarían si no fuera modificado. Esta situación es común en la presencia de plataformas tipo TLP, mini TLP, GBP y SPAR, utilizadas

para la explotación de hidrocarburos en aguas de intermedias a profundas.

Se han encontrado diversas formas para describir la modificación de la superficie libre del agua en las inmediaciones de una o varias pilas, a partir de las cuales se implementan soluciones que permiten calcular las fuerzas hidrodinámicas. McCamy y Fuchs (1954) solucionaron el problema de la modificación del oleaje por una pila aislada; con base en ello se han diseñado principalmente las estructuras arriba mencionadas (Sarpkaya e Isaacson, 1981; Mei, 1989; Chakrabarti, 1994); sin embargo, se ha observado que la interacción del oleaje con todo el conjunto de pilas también es importante (Ávila, 2002, y Govaere, 2002); es decir, que los efectos que induce el oleaje en cada pila están influenciados por la presencia de las demás. Más

recientemente, utilizando series de Fourier, Spring y Monkmeyer (1974) presentaron una aproximación de la interacción del oleaje con múltiples pilas; sin embargo, la solución analítica de este problema fue desarrollada por Linton y Evans (1990).

Este trabajo tiene como objetivo presentar una formulación capaz de calcular las fuerzas inducidas por el oleaje en cada elemento de un sistema de pilas obtenida a partir de la solución analítica de la modificación de la superficie libre presentada por Linton y Evans (1990). La ventaja e innovación de la formulación aquí presentada radica en que se considera la interacción oleaje-estructura completa, a diferencia de los métodos propuestos anteriormente por McCamy y Fuchs (1954), Sarpkaya e Isaacson (1981), Mei (1989), y Chakrabarti (1994), y supera al de Spring y Monkmeyer (1974) por estar basado en un modelo de superficie libre más completo. Con todo lo anterior puede evitarse la práctica común de considerar cada pila como aislada y después utilizar un factor de seguridad conservador. Para ilustrar la importancia de las consideraciones anteriores se presentan ejemplos prácticos.

Como ya se mencionaba, para tomar en cuenta la interacción del oleaje con un conjunto de pilas en la estimación de fuerzas sobre cada una de ellas, primero es necesario definir un potencial de velocidades que caracterice al oleaje dentro y en las inmediaciones del sistema. Esto se realiza utilizando la teoría lineal, o de ondas de pequeña amplitud, siendo los alcances y limitaciones de la solución propuesta los marcados por las hipótesis básicas de dicha teoría, a saber: fluido ideal, homogéneo e incompresible, flujo irrotacional, fondo marino horizontal e impermeable, tensión superficial y efecto de Coriolis despreciables, e inexistencia de interacción entre componentes.

A continuación se muestran las ecuaciones del potencial de velocidades para el caso de una pila aislada y para un sistema de pilas, así como su aplicación para calcular la presión sobre la pared de cada pila y, con ello, las fuerzas hidrodinámicas.

### Interacción del oleaje con una pila

La solución a la interacción del oleaje con una pila aislada o con múltiples pilas se alcanza utilizando la superposición lineal de efectos (Silva, 1995), propiedad básica de la teoría lineal (Dean y Dalrymple, 1984), de tal forma que el potencial de velocidades será igual a la suma de dos términos: un potencial incidente (o no modificado), que representa una onda sinusoidal simple, y un potencial perturbado (o modificado), producto de la interacción entre el oleaje y la estructura.

El oleaje incidente se definirá como una onda sinusoidal simple, propagándose de forma paralela al eje  $X$ , cuya superficie libre ( $\eta$ ) puede expresarse en coordenadas rectangulares como sigue:

$$\eta(x,t) = \Re \left[ A e^{i(kx - \sigma t)} \right] = A \Re \left[ \cos(kx - \sigma t) + i \operatorname{sen}(kx - \sigma t) \right] \quad (1)$$

donde  $A$  es la amplitud de onda;  $\sigma = 2\pi/T$ , la frecuencia angular;  $k = 2\pi/L$ , el número de onda;  $L$  y  $T$ , la longitud y periodo de onda, que se relacionan mediante la ecuación de la dispersión (Dean y Dalrymple, 1984):

$$\sigma^2 = kg \tanh kh \quad (2)$$

Separando momentáneamente la variable tiempo, la ecuación 1 puede expresarse:

$$\eta(x) = \Re \left[ A e^{ikx} \right] = A \Re \left[ \cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx) \right] \quad (3)$$

Dada la simetría radial de los elementos por analizar, lo más conveniente es utilizar un sistema de coordenadas cilíndricas. Además, en desarrollos posteriores, la ecuación diferencial que define el potencial del oleaje perturbado se solucionará mediante los números de Bessel y Hankel, por lo que la forma más práctica de expresar al potencial incidente en coordenadas cilíndricas será utilizando alguna de dichas funciones; para ello se emplea la siguiente igualdad matemática (Abramowitz y Stegun, 1972):

$$\cos kx + i \operatorname{sen} kx = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m J_m(kx) \quad (4)$$

donde  $\delta_m$  es el número de Jacobi y  $J_m$  es la función de Bessel de orden  $m$ . De esta forma, con las ecuaciones 3 y 4, la superficie libre del oleaje incidente también se puede expresar como:

$$\eta(x) = A \Re \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m J_m(kx) \right] \quad (5)$$

Empleando la ecuación 5, el potencial de velocidades del oleaje incidente, expresado en un sistema de coordenadas cilíndricas ( $r, \theta, z$ ) con origen en el centro de la pila a la elevación del nivel medio del mar, puede escribirse de la siguiente forma (Govaere, 2002):

$$\phi_I(r, \theta, z) = f(z)A \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m J_m(kr) \cos(m\theta) \quad (6)$$

donde:

$$f(z) = \frac{ig \cosh k(h+z)}{\sigma \cosh kh} \quad (7)$$

$f(z)$  es la función de profundidad;  $A$ , la amplitud del oleaje incidente;  $r, \theta, z$ , las coordenadas del punto donde se desea conocer el potencial;  $h$ , el tirante de agua en el que se encuentra situada la pila, y  $g$ , la aceleración de la gravedad.

Por otro lado, de acuerdo con la teoría de flujo potencial, el potencial de velocidades que describe al oleaje que ya ha sido modificado viene de resolver la ecuación diferencial de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

para las condiciones de frontera propias de la teoría lineal: impermeabilidad del fondo, cinemática y dinámica de superficie libre; junto con las condiciones de frontera derivadas de el problema específico: impermeabilidad de las paredes de las pilas y la llamada condición de radiación al infinito, misma que hace que los efectos por presencia de la pila sean nulos en puntos muy alejados de ésta. Dicha condición se satisface automáticamente, al resolver la ecuación utilizando la función de Hankel de primera especie ( $H_m$ ) que, dadas sus características, lleva implícita la radiación al infinito. De esta forma, el potencial del oleaje perturbado resulta tener la siguiente forma (Linton y Evans, 1990):

$$\phi_P(r, \theta, z) = f(z)A \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m Z_m H_m(kr) \cos(m\theta) \quad (9)$$

donde  $Z_m$  es un parámetro por resolver.

Como se mencionó, el oleaje total está representado por la suma de un potencial incidente más un potencial perturbado; es decir, ecuación 6 más ecuación 9:

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, z) &= \phi_I + \phi_P = Af(z) \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m \\ & \left[ J_m(kr) + Z_m H_m(kr) \right] \cos(m\theta) \end{aligned} \quad (10)$$

Para encontrar el valor de  $Z_m$  se sustituye el potencial de la expresión 10 en la siguiente condición de frontera:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r = a \quad (11)$$

donde  $a$  es el radio de la pila. Esta condición surge de la característica de impermeabilidad de la pared de la estructura, es decir, que no hay flujo a través de ella. Sustituyendo la ecuación 10 en la ecuación 11 y operando se llega a lo siguiente:

$$Z_m = \frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)} \quad (12)$$

con lo que finalmente el potencial de velocidades total puede expresarse como sigue:

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, z) &= Af(z) \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m \\ & \left[ J_m(kr) - \frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)} H_m(kr) \right] \cos(m\theta) \end{aligned} \quad (13)$$

### Interacción del oleaje con múltiples pilas

La interacción del oleaje con múltiples pilas se resuelve con un procedimiento similar al del caso de una pila aislada, pero ahora deben considerarse aspectos que cobran importancia ante la asimetría, como la dirección de propagación del oleaje y la posición relativa de las pilas. En la presente solución se utilizan  $N+1$  sistemas coordenados (siendo  $N$  el número de pilas), uno global, y uno local por cada cilindro. También se toma ventaja de la propiedad de la suma lineal de efectos, ya que tanto el oleaje incidente como el perturbado tendrán un término por cada una de las pilas. Por conveniencia en los desarrollos siguientes, la función de profundidad  $f(z)$  será retirada temporalmente sin que esto altere los resultados.

El potencial incidente sobre cada pila  $k$ , con base en la ecuación 6, es:

$$\phi_I^k = Af_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr_k) e^{im\left(\frac{\pi}{2} - \theta_k + \beta\right)} \quad (14)$$

con la diferencia de que ahora se incluyen dos parámetros más: la dirección del oleaje incidente ( $\beta$ ) y un factor de fase ( $l_k$ ), que se deriva del hecho de que la fase de la onda es distinta en cada una de las pilas, dado que éstas no necesariamente se disponen alineadas.

La descripción de la interacción de las ondas con un conjunto de pilas es mucho más complicada que en el caso de una sola, ya que ahora el oleaje incidente es transformado por el primer cilindro con que hace contacto, y ya modificado incide sobre otro cilindro, que lo vuelve a modificar, y así sucesivamente (Govaere, 2002). Por lo anterior, conviene expresar el potencial perturbado como la radiación emitida por cada pila; esto se hará de manera similar a como se hizo en el caso de una pila (ecuación 9), de la siguiente forma:

$$\phi_p^k = A \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^k Z_m^k H_m(kr_k) e^{im\theta_k} \quad (15)$$

expresado en coordenadas locales de la pila  $k$  ( $r_k, \theta_k$ ), donde  $C_m^k$  es un parámetro a resolver que introducirá el efecto de la presencia de las demás pilas.  $Z_m^k$  es, al igual que para el caso anterior:

$$Z_m^k = \frac{J_m'(ka_k)}{H_m'(ka_k)} \quad (16)$$

El potencial de velocidades total será la suma de los incidentes y perturbados por cada una de las pilas, es decir:

$$\phi = \sum_{k=1}^N \phi_l^k + \sum_{k=1}^N \phi_p^k = A \sum_{k=1}^N \left[ l_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr_k) e^{im\left(\frac{\pi}{2}-\theta_k+\beta\right)} \right] + A \sum_{k=1}^N \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^k Z_m^k H_m(kr_k) e^{im\theta_k} \right] \quad (17)$$

En la expresión 17 todavía se desconocen los coeficientes  $C_m^k$ . Para resolverlos se hará uso de la condición de frontera que describe la impermeabilidad de las paredes de la pila, y para ello será necesario expresar el potencial de velocidades total en función de las coordenadas locales de cada pila ( $k$ ). Utilizando el

teorema de Graf para la suma de funciones de Bessel, así como desarrollos algebraicos (Linton y Evans, 1990; Ávila, 2002) se llega a:

$$\phi^k(r_k, \theta_k) = A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ l_k J_m(kr_k) e^{im\left(\frac{\pi}{2}-\theta_k-\beta\right)} + C_m^k Z_m^k H_m(kr_k) e^{im\theta_k} \right] + A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( J_n(kr_k) e^{in\theta_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( C_m^j Z_m^j H_{m-n}(kR_{jk}) e^{i(m-n)\alpha_{jk}} \right) \right] \right) \quad (18)$$

y la condición de frontera que indica que no hay flujo a través de la pared impermeable de la pila es:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r_k} = 0 \quad \text{en} \quad r_k = a_k \quad (19)$$

siendo  $a_k$  el radio de la pila  $k$ . Sustituyendo el potencial de la expresión 18 en la condición 19 se obtiene:

$$kl_k J_m'(ka_k) e^{in\left(\frac{\pi}{2}-\theta_k+\beta\right)} + kC_n^k Z_n^k H_n'(ka_k) e^{in\theta_k} + kJ_n'(ka_k) e^{in\theta_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( C_m^j Z_m^j H_{m-n}(kR_{jk}) e^{i(m-n)\alpha_{jk}} \right) \right] = 0 \quad (20)$$

y operando se llega a:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( C_m^j Z_m^j H_{m-n}(kR_{jk}) e^{i(m-n)\alpha_{jk}} \right) \right] = -C_n^k - l_k e^{in\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)} \quad (21)$$

que es un sistema de ecuaciones (una ecuación por cada pila), el cual permite resolver los coeficientes  $C_k$ . Una vez conocidos estos coeficientes, el potencial de velocidades total en cualquier punto puede calcularse utilizando la expresión 17 (para coordenadas globales), o la expresión 18 (para coordenadas locales de la pila  $k$ ).

### Evaluación de presiones

Para deducir la ecuación que describe la presión se hace uso de la ecuación general de Bernoulli que, despreciando los términos no lineales, queda expresada como:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (22)$$

tal, que la presión en un punto es:

$$p = -\rho gz + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (23)$$

Si la expresión anterior se evalúa en  $z=0$  y es dividida por  $\rho g = \gamma$ , se tiene:

$$\eta = -\frac{p}{\rho g} = \frac{p}{\gamma} = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=0} \quad (24)$$

que es la elevación de la superficie libre del agua,  $\eta$ , calculada como la carga de presión en  $z=0$ .

La ecuación 23 también se puede escribir como:

$$p = -\rho gz + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left[ e^{i\sigma t} f(z) \phi(r, \theta) \right] \quad (25)$$

donde el primer término es la presión hidrostática y el segundo, la presión hidrodinámica debida al oleaje que varía en el tiempo. Para analizar las fuerzas hidrodinámicas por oleaje se obviará el término hidrostático, ya que sus efectos se eliminan. Desarrollando la expresión 25, la presión dinámica es:

$$p_D(r, \theta, z, t) = i\sigma \rho f(z) \phi(r, \theta) e^{i\sigma t} \quad (26)$$

Ahora, sustituyendo la función de profundidad (ecuación 7) en la ecuación anterior se obtiene:

$$p_D(r, \theta, z, t) = \rho g \phi(r, \theta) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{i\sigma t} \quad (27)$$

Para calcular la presión dinámica en un punto sobre la pared de una pila  $k$  se utilizará la expresión 27, donde  $\phi(r, \theta)$  proviene de la ecuación 18 si se utilizan coordenadas locales, esto es:

$$\rho_D^k(a_k, \theta_k, z_k, t) = \rho g \phi^k(a_k, \theta_k) \frac{\cosh k(h+z_k)}{\cosh kh} e^{i\sigma t} \quad (28)$$

siendo  $a_k$  el radio de la pila  $k$ .

#### Caso particular de una pila aislada

Puesto que la ecuación que define el potencial de velocidades para el caso de una pila aislada no es muy complicada ni requiere el cálculo de otros coeficientes, puede encontrarse una solución analítica explícita para calcular la presión en un punto sobre la pila. Dejando un momento de lado el término que involucra la variable tiempo ( $e^{i\sigma t}$ ), que posteriormente puede utilizarse sin problema al sustituir el potencial de velocidades de la ecuación 13 en la expresión 26, y evaluando en  $r=a$ , se tiene lo siguiente:

$$\rho_D(a, \theta, z) = \rho g A \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m \left[ J_m(ka) - H_m(ka) \frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)} \right] \quad (29)$$

desarrollando:

$$\rho_D(a, \theta, z) = \rho g A \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m \left[ \frac{J_m(ka)H'_m(ka) - H_m(ka)J'_m(ka)}{H'_m(ka)} \right] \cos(m\theta) \quad (30)$$

y mediante la siguiente igualdad matemática (Abramowitz y Stegun, 1972):

$$J_m(c\xi)H'_m(c\xi) - H_m(c\xi)J'_m(c\xi) = \frac{2i}{\pi c\xi} \quad (31)$$

la expresión para calcular la presión en un punto sobre la pared de la pila se reduce a (McCamy y Fuchs, 1954):

$$\rho_D(a, \theta, z) = \rho g A \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\delta_m i^{m+1}}{\pi k a H'_m(ka)} \cos(m\theta) \quad (32)$$

### Evaluación de fuerzas

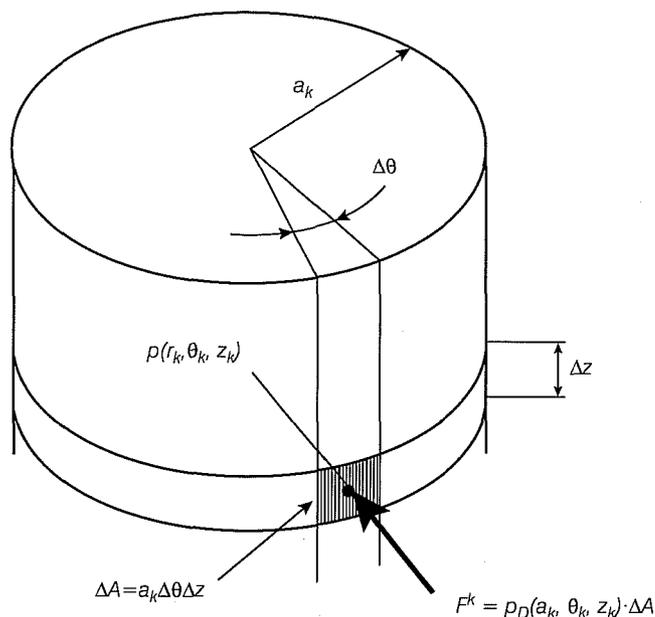
El cálculo de las fuerzas hidrodinámicas sobre cada una de las pilas se hará partiendo del cálculo de la presión dinámica sobre puntos en su pared, separados verticalmente  $\Delta z$  y por ángulos  $\Delta\theta$  (ver ilustración 1), de manera que la fuerza ( $F^k$ ) en un diferencial de área será la presión en un punto, multiplicada por la superficie de acción en que se considera constante ( $\Delta A = a_k \Delta\theta \Delta z$ ):

$$F^k = -a_k \Delta\theta \Delta z p_D(r_k, \theta_k, z_k) \quad (33)$$

donde  $p_D$  está dada por la expresión 28. Para obtener el diagrama de fuerzas sobre la pila se calculan las fuerzas unitarias en  $X(\Delta F_x^k / \Delta z)$  y  $Y(\Delta F_y^k / \Delta z)$  a partir de la integración de las componentes en  $X$  y  $Y$  de la fuerza diferencial de la expresión 33 sobre toda la circunferencia manteniendo constante  $z$ .

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F_x^k}{\Delta z} &= -a_k \sum_{\theta=0}^{2\pi} p_D^k(a_k, \theta_k, z_k, t) \cos\theta \Delta\theta \\ \frac{\Delta F_y^k}{\Delta z} &= -a_k \sum_{\theta=0}^{2\pi} p_D^k(a_k, \theta_k, z_k, t) \sin\theta \Delta\theta \end{aligned} \quad (34)$$

Ilustración 1. Elementos diferenciales para el análisis de fuerzas.



Las fuerzas totales en cada dirección ( $F_x^k$  y  $F_y^k$ ) serán la suma desde el fondo ( $z=-h$ ) hasta la superficie ( $z=0$ ) de las fuerzas descritas por las expresiones anteriores multiplicadas por su  $\Delta z$  de acción.

$$F_x^k = \sum_{z=-h}^0 \Delta F_x^k; \quad F_y^k = \sum_{z=-h}^0 \Delta F_y^k \quad (35)$$

#### Caso particular de una pila aislada

Al igual que para las presiones, en este caso pueden obtenerse expresiones analíticas explícitas, y como el fenómeno es simétrico, sólo es necesario obtener fuerzas en la dirección  $X$ . La fuerza unitaria se define como:

$$\frac{dF_x}{dz} = -a \int_0^{2\pi} p(a, \theta, z) \cos\theta d\theta \quad (36)$$

sustituyendo la ecuación 32 en 36, resolviendo la integral y utilizando identidades trigonométricas, se llega a la siguiente ecuación (McCamy y Fuchs, 1954):

$$\frac{dF_x}{dz} = \frac{4A}{ka} \frac{\rho g a}{H_1'(ka)} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (37)$$

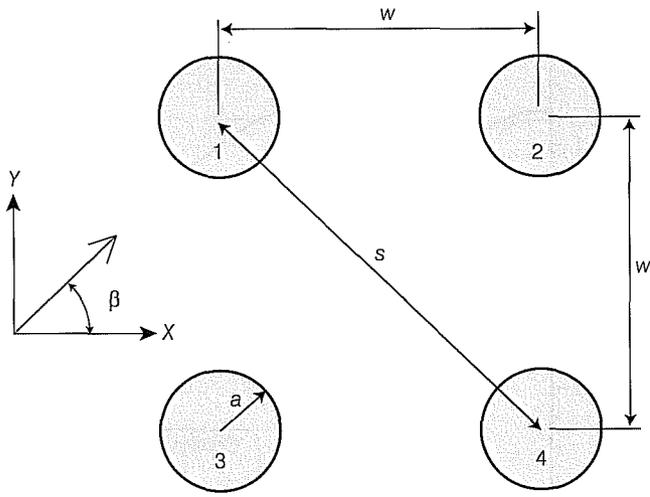
Para obtener la fuerza total sobre la pila se integra la expresión anterior a lo largo de toda la profundidad, es decir (McCamy y Fuchs, 1954):

$$F_{x=0} = \int_{-h}^0 \frac{dF_x}{dz} dz = \frac{4A}{k^2} \frac{\rho g}{H_1'(ka)} \tanh kh \quad (38)$$

### Resultados

Las expresiones 35 y 38 que se presentan anteriormente se programaron en una computadora con el objetivo de analizar diversos casos y configuraciones, buscando argumentos para demostrar la importancia de considerar en cada pila los efectos de la presencia de las demás. Una configuración muy utilizada en la práctica para apoyar estructuras marítimas es la formada por cuatro pilas con igual diámetro y separación ortogonal, como la mostrada en la ilustración 2, y es por eso que en este trabajo se profundiza en ella; no obstante, la formulación aquí presentada puede ser empleada para cualquier tipo de

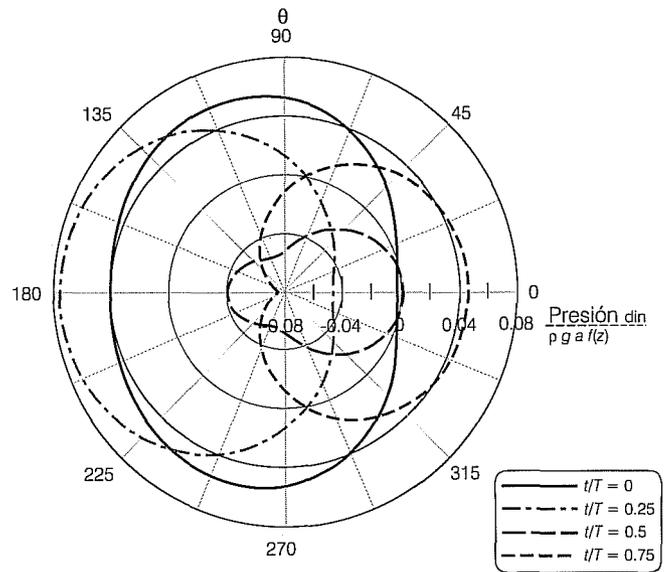
Ilustración 2. Nomenclatura para las dimensiones de las configuraciones tipo de cuatro pilas.



configuración. La nomenclatura para denotar las dimensiones e incidencia del oleaje en el conjunto se muestran también en la ilustración 2. A dicha configuración tipo se le hicieron modificaciones en dimensiones relativas y en la incidencia del oleaje (los casos analizados se describen en el cuadro 1), que llevan a las conclusiones que posteriormente exponemos.

El procedimiento para el cálculo de fuerzas hidrodinámicas comienza por la obtención del potencial de velocidades en suficientes puntos sobre la pared de cada pila y, a partir de éste, la presión dinámica. La ilustración 3 ejemplifica la variación en el tiempo de fase ( $t$ ) de los diagramas de presiones dinámicas a una profundidad  $z = -0.1h$ , para una pila aislada de diámetro  $a = 20$  m, situada a una profundidad constante  $h = 100$  m, considerando la amplitud de onda incidente unitaria. De observar dicha ilustración se concluye que no sería posible

Ilustración 3. Diagramas de presiones dinámicas sobre una pila, variando el tiempo de fase para los siguientes datos:  $a = 20$  m,  $h = 100$  m,  $z = 10$  m,  $T = 10$  s.



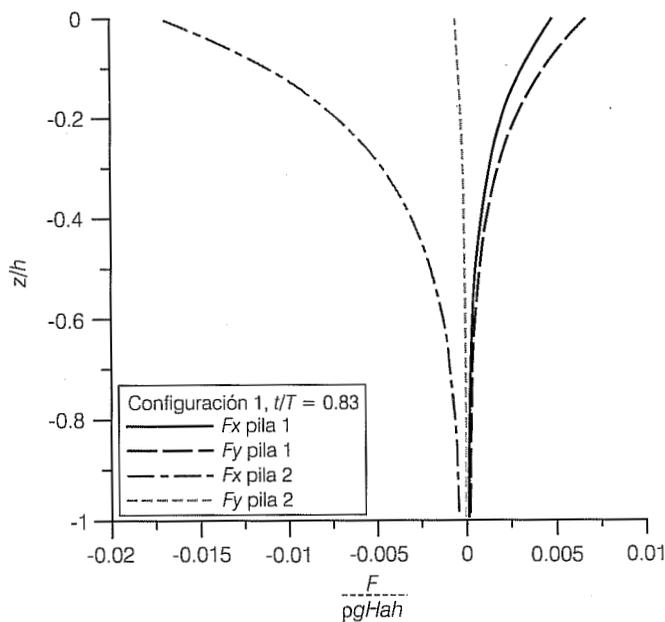
definir fácilmente el instante en el que la integración del diagrama conduce a la obtención de las fuerzas unitarias máximas, es decir, que definir el tiempo de fase en que se presenta la condición crítica (máximos efectos), así como las fuerzas asociadas con éste requerirá de un análisis completo para cada caso particular.

Como se mencionó anteriormente, uno de los principales efectos de la perturbación conjunta del oleaje por un juego de pilas es la aparición de fuerzas en sentido transversal a la propagación del oleaje incidente, las cuales, a pesar de que pueden llegar a ser de consideración, no es posible estimarlas si se desprecia la interacción conjunta. La ilustración 4 ejemplifica diagramas instantáneos de fuerzas en X y en Y para las pilas 1 y 2 de la configuración 1 (ver cuadro 1), y muestra un momento en que la fuerza en sentido transversal (Y)

Cuadro 1. Descripción en planta de las configuraciones de análisis de la ilustración 2.

Configuración	Radio de las pilas $a$ (m)	Separación ortogonal entre pilas $w$ (m)	Separación diagonal entre pilas $s$ (m)	Ángulo de incidencia del oleaje $\beta$ ( $^\circ$ )
1	20.0	90.0	127.3	0
2	20.0	90.0	127.3	45
3	20.0	170.0	240.4	45
4	20.0	170.0	240.4	0

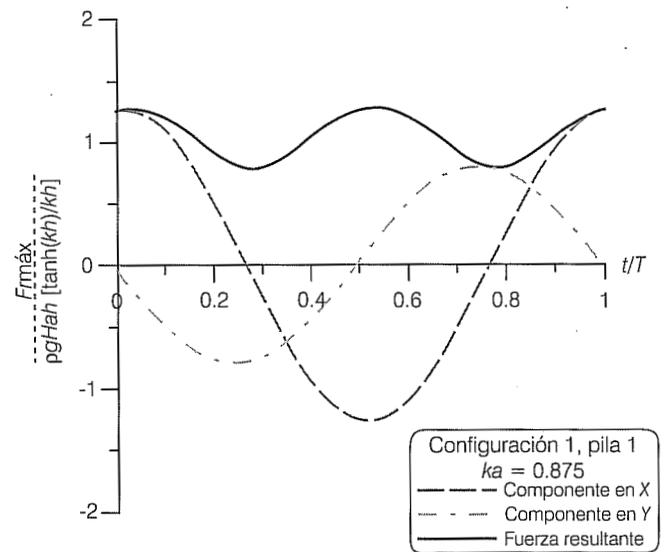
**Ilustración 4.** Variación en el tiempo de fase de los diagramas de fuerzas en función de la profundidad.



es mayor a la longitudinal (X) en la pila 1. En la ilustración 5 se muestra la variación en el tiempo de las componentes de la fuerza resultante sobre la pila 1 de la configuración 1 (ver cuadro 1 e ilustración 2), apreciándose claramente que la magnitud que puede llegar a alcanzar la fuerza en Y es totalmente comparable con la de la fuerza en X. En dicha ilustración también se presenta el comportamiento de la fuerza resultante, que en adelante será utilizada para el análisis de máximos, pero que dada la sección transversal circular de los elementos analizados no es tan necesario conocer en todo momento sus componentes o su dirección.

Para estudiar la amplificación de los efectos a los que puede conducir la interacción del oleaje con un conjunto de pilas, se parte de una configuración geométrica (dimensiones y separación entre pilas, así como dirección del oleaje) que se analizará para diversas condiciones o tamaños relativos de onda incidente respecto a las dimensiones de los elementos; esto se expresará adimensionalmente como  $ka$  (donde  $k$  es el número de onda de la ola incidente y  $a$ , el radio de las pilas). Para cada valor de  $ka$  se realizó un análisis similar al mostrado en la ilustración 5 y del cual se extrajo la fuerza resultante máxima alcanzada bajo esas condiciones. De estudiar varios valores de  $ka$  para una misma configuración, se llega a gráficas como las mostradas en las ilustraciones 6 a 9, donde se compara, para cada  $ka$ , la fuerza resultante máxima alcanzada, tomando en cuenta la perturbación

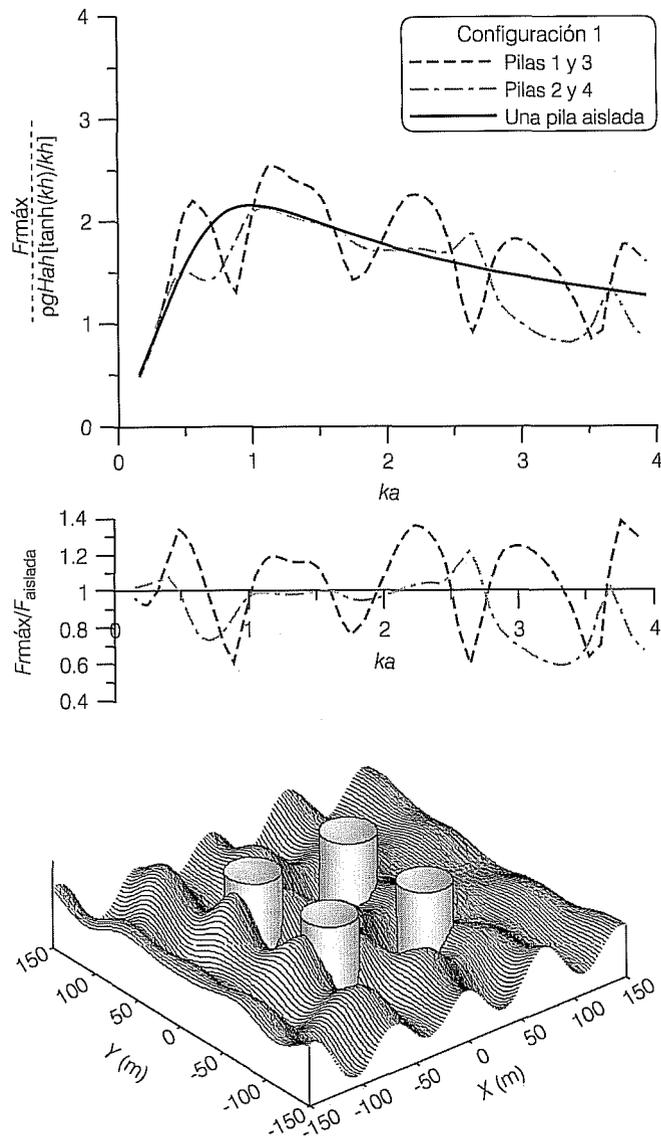
**Ilustración 5.** Comportamiento de las componentes de la fuerza sobre una pila variando el tiempo de fase.



total del oleaje por el conjunto de cuatro pilas. Los resultados así obtenidos se comparan con la solución derivada de analizar la pila como si estuviera aislada; en la parte superior de las ilustraciones se muestran los valores absolutos de ambas consideraciones, y en la gráfica inferior se presenta el cociente de la fuerza obtenida, de considerar la interacción entre la fuerza sobre una pila aislada. Esta última forma de presentación permite apreciar la desviación porcentual de las fuerzas obtenidas, tomando en cuenta la interacción respecto de no hacerlo, mientras que la primera de ellas facilita reconocer el grado de importancia de la interacción conjunta respecto al valor absoluto de la fuerza; es decir, observar si la maximización de efectos es crítica o no en el diseño estructural del elemento.

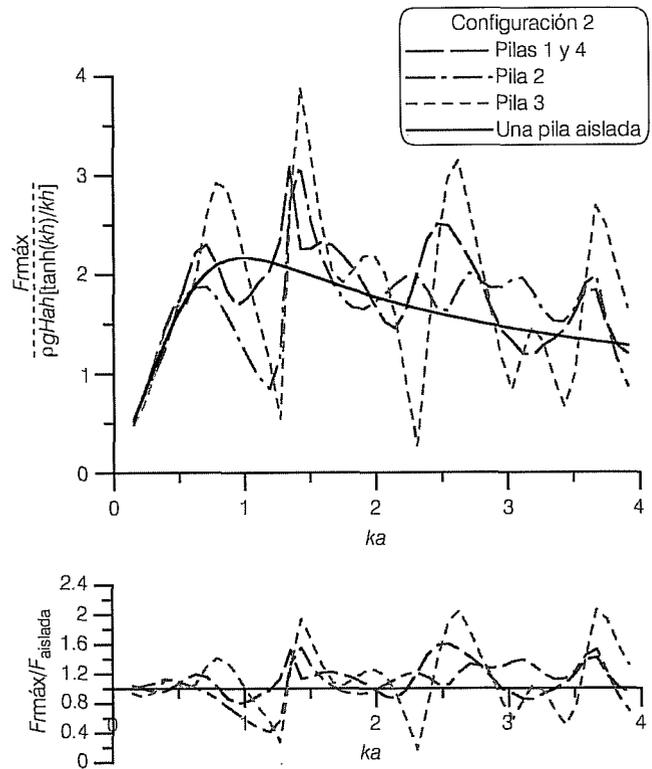
En la ilustración 6, correspondiente a la configuración 1, donde el ángulo de incidencia es de  $0^\circ$  y, en consecuencia, los efectos en las pilas son simétricos, se representaron en una misma curva tanto las pilas 1 y 3 como las pilas 2 y 4. Se observa que la difracción provocada por las pilas que reciben directamente el oleaje mitiga los efectos en las que se encuentran detrás de ellas, además de que al comparar estos resultados con los obtenidos de considerar cada pila aislada, se hace evidente una variación importante respecto a los efectos de la interacción conjunta. En la misma ilustración se aprecia físicamente la perturbación del oleaje mediante la representación de la variación de la superficie libre del agua obtenida con la expresión 22.

Ilustración 6.  $ka$  versus fuerza resultante máxima para la configuración 1, y la variación de la superficie libre del agua para  $ka = 1.75$  y  $t/T=0.0$ .



En la ilustración 7 se muestran los resultados del análisis a la configuración 2, que difiere de la anterior únicamente en que ahora el ángulo de incidencia es de  $45^\circ$  y los efectos serán simétricos en las pilas 1 y 4. Se observa que la variación de la fuerza resultante máxima respecto a  $ka$  es mucho más pronunciada que en el caso anterior; también la pila que recibe directamente el oleaje (pila 3) es la que alcanza los máximos efectos, mitigando los de las demás pilas. Otro aspecto que llama la atención es que los puntos donde la fuerza resultante máxima

Ilustración 7.  $ka$  versus fuerza resultante máxima para la configuración 2.



alcanza los valores que más se alejan del caso cuando se considera cada pila aislada están muy marcados y coinciden con valores de  $ka$ , que corresponden a longitudes de onda incidente de magnitud similar a la separación ortogonal ( $w=90$  m) y a la separación diagonal entre pilas ( $s=127$  m), es decir, son los casos donde existe resonancia.

La ilustración 8 expresa los resultados del análisis de la configuración 3, cuya diferencia con la configuración 2 radica sólo en que la separación entre pilas se aumentó de 90 a 170 m. Al igual que en los casos anteriores, los efectos que más se alejan de considerar la pila aislada se presentan en la pila que recibe directamente al oleaje, mientras que en este caso los picos son más abundantes, pero de menor magnitud, aunque los dos más importantes, donde la resonancia es más pronunciada, se presentan para longitudes de onda cercanas a la separación ortogonal ( $w=170$  m) y a la separación diagonal ( $s=240$  m) entre pilas.

Por último, en la ilustración 9 se presentan los resultados obtenidos de la configuración 4, donde la diferencia con la anterior radica en que ahora el ángulo

Ilustración 8.  $ka$  versus fuerza resultante máxima para la configuración 3.

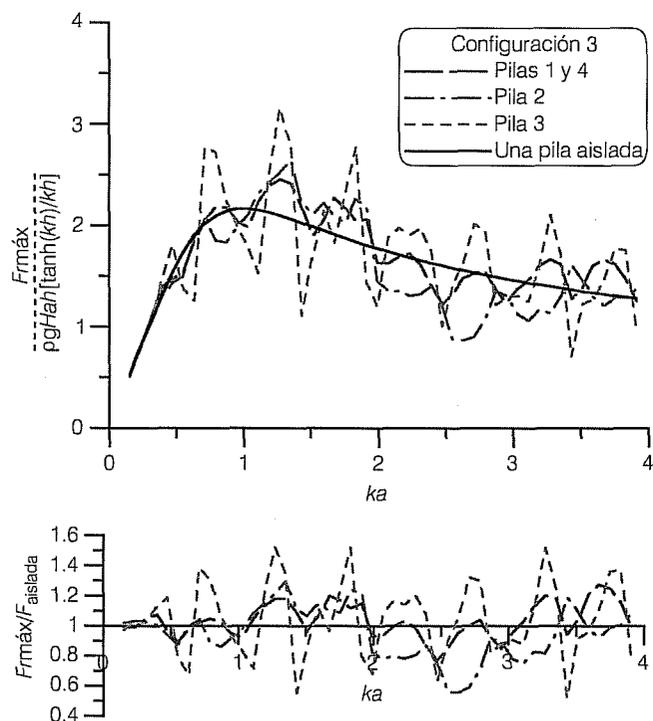


Ilustración 9.  $ka$  versus fuerza resultante máxima para la configuración 4.

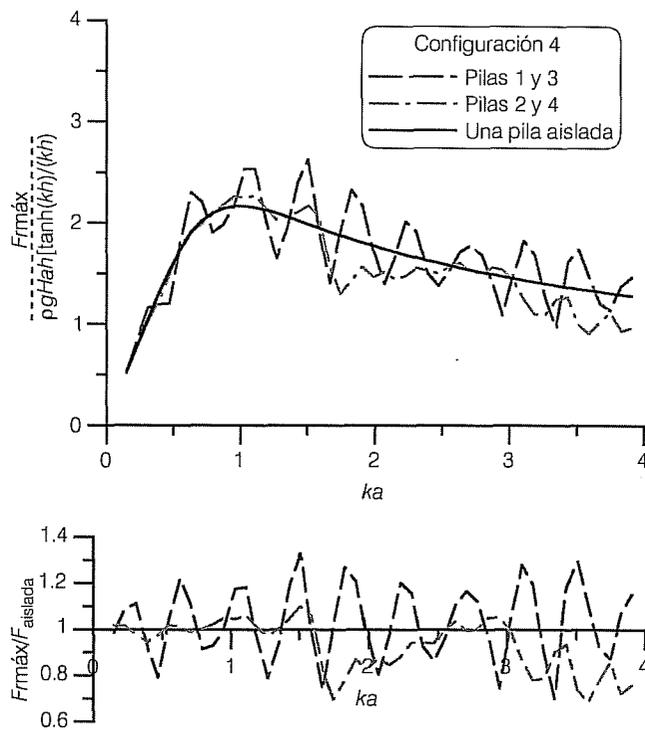
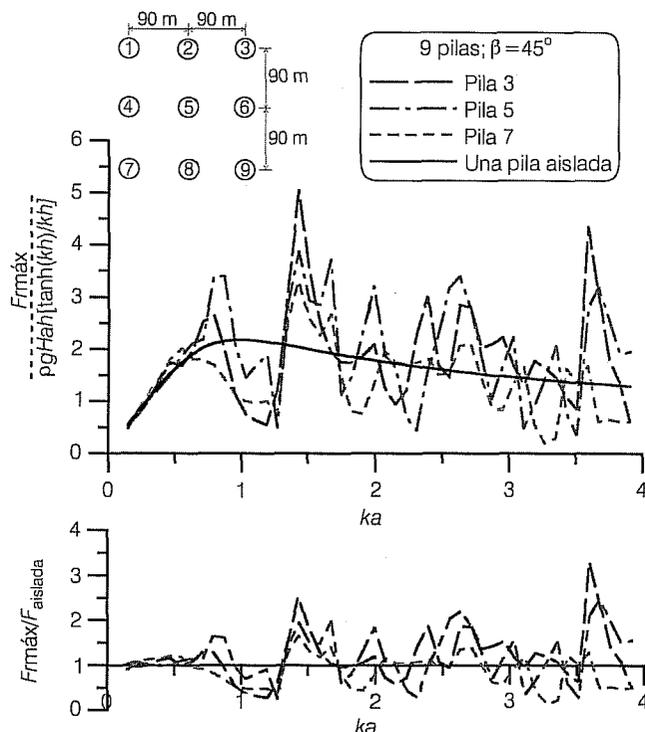


Ilustración 10.  $ka$  versus fuerza resultante máxima para una configuración de nueve pilas de radio  $a=20$  m y una separación ortogonal  $w=90$  m.

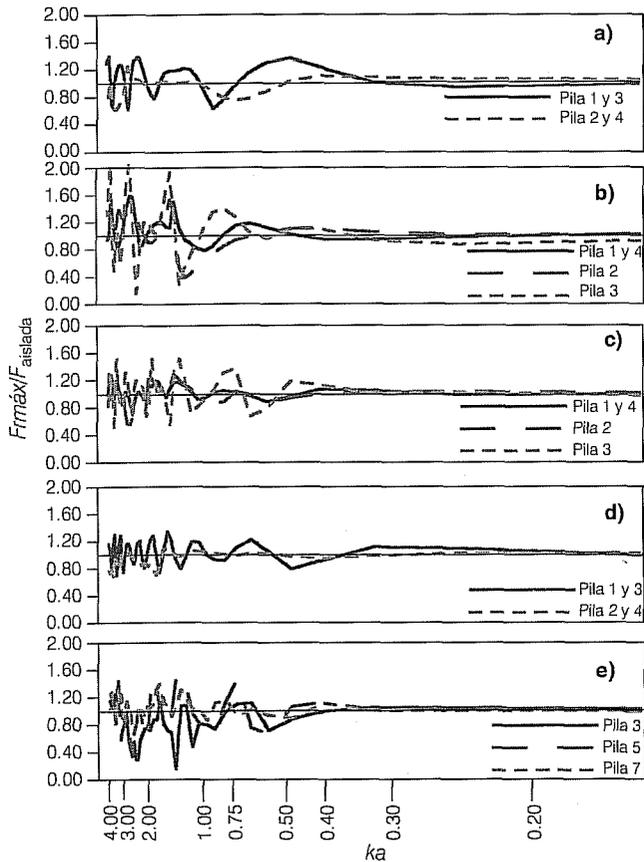


de incidencia es otra vez de  $0^\circ$ . La variabilidad de la fuerza resultante máxima respecto a  $ka$  es similar a la de la configuración 3 (que tiene la misma separación entre pilas), pero el orden de magnitud de la variación respecto a la consideración de una pila aislada se asemeja más a la de la configuración 1 (con mismo ángulo de incidencia). Los puntos en los que la resonancia alcanza mayores niveles son los mismos que en los casos anteriores ( $L \approx s$  y  $L \approx w$ ).

Para observar lo que sucede con la perturbación cuando hay más pilas, se presenta la ilustración 10, donde aparece el caso de nueve elementos equidistantes ortogonalmente en tres líneas de tres elementos. Se aprecia que los efectos de la perturbación son mucho mayores que en las configuraciones anteriores y que la mayor maximización se alcanza en la pila central.

A partir de los casos analizados que se muestran en este trabajo (ilustración 11) y de otros realizados por Ávila (2002), se ha observado que la interacción oleaje-estructura comienza a ser significativa cuando  $ks > \pi$  o  $s/L > 1/2$ .

**Ilustración 11.**  $ka$  con escala modificada para ser proporcional al periodo de la onda versus fuerza resultante máxima: a) configuración 1, b) configuración 2, c) configuración 3, d) configuración 4, e) configuración de nueve pilas.



## Conclusiones

En este trabajo se ha presentado una herramienta analítica de muy fácil implementación numérica y que puede ser sumamente útil para estudiar las transformaciones que sufre el oleaje al interactuar con una pila o un conjunto de pilas, así como los efectos que el oleaje ya perturbado puede generar sobre las estructuras e inclusive sobre el fondo marino.

Del análisis de los resultados presentados anteriormente y de muchos más estudiados durante el desarrollo de este trabajo de investigación (Govaere, 2002; Ávila, 2002) se puede concluir lo siguiente:

- La diferencia entre considerar los efectos de la perturbación del oleaje debida a todo el conjunto de pilas y de considerar a cada una como si estuviera aislada puede ser importante.

- La magnificación de efectos debida a la interacción conjunta será mayor mientras menor sea la separación entre pilas, y para las configuraciones tipo analizadas, la magnificación de efectos será mayor cuando el ángulo de incidencia sea cercano a  $45^\circ$ .
- Los efectos máximos o resonancia se presentan cuando la longitud de onda incidente es de magnitud similar a la separación ortogonal ( $w$ ) y a la separación diagonal ( $s$ ) entre pilas.
- La relación entre la fuerzas sobre las pilas provocadas por el oleaje y las dimensiones del conjunto es no lineal.
- En los casos analizados se ha observado que los efectos de la perturbación total del conjunto empiezan a ser importantes cuando  $ks > \pi$  o  $s/L > 1/2$ , o dicho de otra forma, las fuerzas sobre las pilas calculadas, considerando la interacción completa oleaje-estructura, son muy parecidas a las obtenidas si se toma en cuenta cada pila aislada únicamente cuando  $ks < \pi$  o  $s/L < 1/2$ ; siendo  $k$  el número de onda,  $s$  la separación diagonal entre pilas y  $L$  la longitud de onda incidente.

A pesar de que las conclusiones anteriores pueden ser de gran ayuda cuando se analicen casos similares y que la forma en que se normalizaron los resultados permite homologar configuraciones de mismas proporciones en planta y ángulo de incidencia, es importante recalcar que los factores que influyen en la cuantificación de la perturbación del oleaje son tantos (tirante de agua, dimensiones de las pilas, separación entre ellas, dirección, periodo y amplitud del oleaje incidente, etcétera), que es necesario analizar exhaustivamente cada caso en particular.

Recibido: 30/08/2002

Aprobado: 11/04/2003

## Referencias

- ABRAMOWITZ, M. y STEGUN, I.E. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. *Applied mathematics*. Series 55. Washington D.C.: National Bureau of Standards, US Department of Commerce, 1972, 1046 pp.
- ÁVILA, A. *Sobre la estabilidad hidrodinámica de pilas cilíndricas*. Tesis de licenciatura. México, D.F.: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2002, 148 pp.
- CHAKRABARTI, S. *Offshore structure modeling*. Advanced series on ocean engineering. Vol. 9. Singapur: World Scientific, 1994. 470 pp.

- DEAN, R. y DALRYMPLE, R. *Water wave mechanics for engineers and scientists*. New Jersey: Prentice-Hall, 1984, 353 pp.
- GOVAERE, G. *Acción de oleaje sobre estructuras disipativas de simetría radial*. Tesis doctoral. México, D.F.: División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM, 2002, 212 pp.
- LINTON, C. y EVANS, D. The interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders. *Journal of fluid mechanics*. Vol. 215, Gran Bretaña, junio de 1990, pp. 661-682.
- MEI, C. *The applied dynamics of ocean surface waves*. Advanced series on ocean engineering. Vol. 1. Singapur: World Scientific, 1989, 740 pp.
- McCAMY, R.C. y FUCHS, R.A. Wave forces on piles: a diffraction theory. U.S. *Memorias técnicas núm. 69*. Army Corps of Engineers, Beach Erosion Board, 1954, 17 pp.
- SARPKAYA, T. e ISAACSON, M. *Mechanics of wave forces on offshore structures*. New York: Van Nostrand Reinhold Comp. 1981, 651 pp.
- SILVA, R. *Transformación del oleaje debido a obras de defensa litoral*. Tesis doctoral. Santander, España: Universidad de Cantabria, 1995, 338 pp.
- SPRING, B.H. y MONKMEYER, P.L. Interaction of plane waves with vertical cylinders. *Proc. 14th Coastal Engineering Conference*. Vol. III. Copenhagen, 1974, pp. 1828-1847.

### Abstract

ÁVILA ARMELLA, A., SILVA CASARÍN, R. & GOVAERE VICARIOLI, G.A. Estimation of wave-induced forces on cylindrical pile systems. *Hydraulic engineering in Mexico (in Spanish)*. Vol. XIX, no.1, January-March, 2004, pp. 83-94.

*The lateral loading design condition for fixed marine (offshore) structures, such as those used for oil extraction or for harbor components, is usually represented by hydrodynamic wave forces. When the supporting elements, usually one or more circular cross-section piles, are big enough, e.g. in slotted breakwaters; quay foundations; fixed, SPAR or TLP platforms; etc., the resulting wave scattering should not be neglected. Furthermore, when there is more than one pile, the effect over the waves near each pile is influenced by the presence of the other piles. The equations for the scattered velocity potential with one or more vertical cylinders are presented, and the expressions for estimating wave forces and bending moments over the piles are obtained considering the effect of the pile group, which is usually neglected. We also present, through study cases, the magnification of the effects when considering the overall wave scattering, and we compare it with results obtained without considering that interaction for the case of a group of four piles, showing the importance of that consideration.*

**Keywords:** pile group, wave-structure interaction, dynamic pressure, hydrodynamic force, maximum force, effect magnification.

### Dirección institucional de los autores:

Ing. Alberto Ávila Armella  
Dr. Rodolfo Silva Casarín  
Dr. Georges Andre Govaere Vicarioli

Universidad Nacional Autónoma de México,  
Instituto de Ingeniería,  
Coordinación de Hidráulica,  
Grupo de Ingeniería de Costas y Puertos,  
Ciudad Universitaria, Apartado Postal 70-472,  
Coyoacán, 04510 México, D.F.,  
teléfono: +(52) (55) 5622 3346, extensión 15,  
fax: +(52) (55) 5616 2164,  
aavilaa@iingen.unam.mx, rsilvac@iingen.unam.mx,  
ggovaerev@iingen.unam.mx.