

Evaluación de fronteras transmisoras para sistemas cortina-embalse

César Vera-Mendoza

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Javier Avilés-López

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Se presenta una evaluación de las fronteras transmisoras desarrolladas para el análisis sísmico de sistemas cortina-embalse. Para el caso de cortinas rígidas, se deduce la condición de radiación que debe cumplirse cuando se consideran los efectos tanto de la compresibilidad del agua como de la flexibilidad del fondo del embalse. Se deriva una expresión relativamente simple que puede aplicarse fácilmente en análisis por el método de elementos finitos o de frontera. Asimismo, se desarrollan expresiones apropiadas para el cálculo de las presiones hidrodinámicas sobre el paramento mojado de la cortina, así como para los respectivos coeficientes de presión. Se presentan y discuten algunos resultados numéricos que muestran la influencia de la frecuencia excitadora y de la flexibilidad del fondo del embalse.

Palabras clave: *frontera transmisora, condición de radiación, análisis sísmico, cortina, embalse, presión hidrodinámica.*

Introducción

Hasta finales de la década de los años sesenta, el análisis sísmico de las presas se hacía en dos fases independientes: 1) se obtenía la respuesta sísmica de la cortina ignorando el embalse y 2) se agregaba la presión hidrodinámica suponiendo que la cortina era rígida. Ya en esos años se había concebido que el problema debía resolverse en forma integral, es decir, analizando el sistema completo cortina-embalse considerando los efectos de interacción entre ellos (Chopra, 1970). Para esa época, incluso, se habían llevado a cabo aplicaciones importantes, pero básicamente en la instancia de la investigación.

La aplicación del método de elementos finitos constituyó un nuevo avance en el análisis sísmico de las presas. Con este método es posible analizar el sistema presa-embalse en forma integral, tomando en cuenta los fenómenos de interacción entre las partes a través de las

condiciones de frontera correspondientes. Un poco más tarde se desarrolló el método de elementos de frontera, igualmente poderoso, pero sin necesidad de discretizar el dominio cortina-embalse, sino sólo sus fronteras. Estos métodos permiten considerar factores que con las técnicas antiguas era prácticamente imposible hacerlo. Entre estos factores se pueden mencionar: forma de la cortina, topografía del embalse, composición de la cortina con materiales de distintas propiedades, comportamiento no lineal de la estructura y flexibilidad del fondo del embalse.

La aplicación de los métodos de elementos finitos o de frontera requiere acotar el dominio en estudio. Para ello, el embalse, que generalmente tiene una longitud muy grande, debe truncarse a cierta distancia de la cortina, creándose de esta manera una frontera artificial llamada frontera transmisora. En ella se debe cumplir cierta condición que sea equivalente al efecto que causaría la parte del embalse que se eliminó. Es

evidente que la introducción en el método de análisis de una condición de radiación adecuada es muy importante, ya que de ella depende, en cierta medida, el grado de exactitud de los resultados.

En las últimas tres décadas se han realizado importantes investigaciones orientadas a la búsqueda de condiciones de radiación en fronteras transmisoras y a su implantación eficiente en el método de análisis seleccionado. El objetivo de este trabajo es evaluar algunas de las soluciones existentes, así como desarrollar una expresión para la condición de radiación que considere la compresibilidad del agua y la flexibilidad del fondo del embalse.

El primer estudio científico para calcular la presión hidrodinámica en presas que tuvo importancia práctica fue publicado por Westergaard (1933), quien resolvió la ecuación de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

considerando las siguientes hipótesis: el flujo es compresible, irrotacional e invíscido; la cortina es rígida y de paramento mojado vertical; la base del embalse es rígida, horizontal y de longitud infinita; y la excitación es armónica ($\ddot{x}_g = \ddot{x}_0 e^{i\omega t}$), horizontal y de pequeña amplitud. Con estas consideraciones se obtuvo la siguiente expresión para la presión hidrodinámica:

$$p = 2 \ddot{x}_0 \rho H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma_n \lambda_n} e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \quad (2)$$

donde ρ es la densidad del agua; H , la profundidad del líquido; \ddot{x}_0 , la amplitud de la aceleración del terreno; x, y , las coordenadas cartesianas (ver ilustración 1) y λ_n , las raíces de la ecuación trascendente:

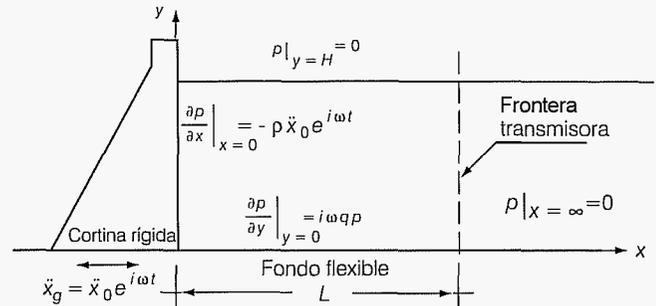
$$\lambda_n \cos(\lambda_n) = 0 \quad (3)$$

dadas por $\lambda_n = (2n-1)\pi/2$. Además, $\gamma_n = \sqrt{\lambda_n^2 - \Omega^2}$ y $\Omega = \omega H/c$, siendo ω la frecuencia circular de excitación; Ω , la frecuencia excitadora normalizada y $c = 1,438$ m/s, la velocidad de ondas de compresión en el agua.

Para fines prácticos, la ecuación (2) suele expresarse de la siguiente forma simplificada:

$$p = \gamma H C_s C_p \quad (4)$$

Ilustración 1. Modelo cortina-embalse y condiciones de frontera para la presión hidrodinámica p ; el amortiguamiento debido a la refracción por el fondo está representado por q .



donde γ es el peso específico del agua; $C_s = \ddot{x}_0/g$, el coeficiente sísmico, y C_p , el coeficiente de presión. El coeficiente de presión se interpreta como la relación entre la presión hidrodinámica y la presión hidrostática en la base, multiplicada por el coeficiente sísmico, lo que resulta en:

$$C_p = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma_n \lambda_n} e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \quad (5)$$

A diferencia de la presión hidrostática, que varía linealmente con la profundidad, la distribución de la presión hidrodinámica se define mediante la superposición de modos naturales que tienen formas cosenoidales.

Fronteras transmisoras existentes

Sommerfeld (1949), al aplicar la ecuación de onda a un dominio de longitud infinita, propuso truncarlo a una distancia suficientemente grande donde el frente de onda pueda considerarse plano. Bajo esta hipótesis dedujo de la ecuación (2) que en la frontera transmisora se debe cumplir la siguiente condición:

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{x=L} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (6)$$

donde L es la distancia a la que se trunca el dominio y n es la normal a la frontera transmisora. Esta condición

equivale a colocar un elemento de amortiguamiento en esta frontera. Años después, Zienkiewicz y Newton (1969) demostraron esta misma expresión aplicando el concepto de onda plana a la presión hidrodinámica. En

el caso de un fluido incompresible, $c = \infty$ y la condición de radiación se reduce a:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{x=L} = 0 \quad (7)$$

Humar y Roufaiel (1983) comprobaron que la condición (6) no da resultados aceptables para frecuencias excitadoras mayores que la primera frecuencia natural del embalse ($\omega > \omega_1$). Propusieron otra condición de radiación deducida a partir de la hipótesis de que, a distancias suficientemente grandes, el componente de la respuesta de la presión hidrodinámica que está fuera de fase con la excitación se puede despreciar para frecuencias excitadoras mayores que la primera frecuencia natural del embalse. Esta condición de frontera se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{x=L} &= 0 && \text{para } \omega < \omega_1 \\ \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{x=L} &= -\frac{1}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2} \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{x=L} && \text{para } \omega > \omega_1 \end{aligned} \quad (8)$$

donde ω es la frecuencia excitadora; ω_1 , la frecuencia natural del embalse y L , la distancia a la que se ubica la frontera de radiación. Estos mismos investigadores comprobaron que los resultados obtenidos empleando las condiciones (8) son mejores que los obtenidos empleando la condición de Sommerfeld, cuando la frontera de radiación se ubica a una distancia de la cortina igual o mayor que dos veces la profundidad del embalse.

Posteriormente, Sharan (1985) encontró una expresión para la condición de radiación, que dedujo por simple derivación de la solución clásica de la presión hidrodinámica en líquidos incompresibles. Esta condición está dada por:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{x=L} = -\frac{\pi}{2H} \rho \left. p \right|_{x=L} \quad (9)$$

A grandes distancias de la cortina (ver ilustración 1), la presión hidrodinámica desaparece y la condición anterior se transforma en $\partial p / \partial n = 0$, que coincide precisamente con la condición de Sommerfeld. El mismo Sharan (1985) propuso una nueva condición más general para la frontera transmisoras, la cual se expresa como:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{x=L} = \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = Z \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{x=L} \quad (10)$$

donde:

$$Z = \frac{i \sum_{n=1}^{\infty} f_n}{\Omega c \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n} \quad (11)$$

$$f_n = \frac{(-1)^{n-1} e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \cos(\lambda_n \frac{y}{H})}{2n-1} \quad (12)$$

Es notorio que la ecuación (10) tiene la misma forma que la condición de Sommerfeld. El coeficiente Z es una función compleja ($i = \sqrt{-1}$), que depende de las coordenadas x , y . Este coeficiente también se puede expresar como:

$$Z = -\frac{1}{c} (\alpha + i\beta) \quad (13)$$

donde a los parámetros α y β se les llama coeficientes de amortiguamiento. Considerando además que $p = \bar{p} e^{i\omega t}$, siendo \bar{p} la amplitud de la presión hidrodinámica, se tiene que:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{x=L} = i\omega p \quad (14)$$

Entonces, la condición de radiación en la frontera transmisoras se expresa finalmente como:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{\alpha}{c} \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{x=L} + \frac{\beta\omega}{c} \rho \left. p \right|_{x=L} \quad (15)$$

Los coeficientes de amortiguamiento α y β se determinan como la parte real e imaginaria del producto $-cZ$, respectivamente, que se calcula mediante la ecuación (11). Una vez conocidos estos parámetros, la condición de la frontera transmisoras queda completamente definida. Esta forma de expresar la condición en la frontera transmisoras ha sido usada por varios investigadores y tiene la ventaja de ser muy simple para implementarse en un análisis por elementos finitos o de frontera. Es la forma final de la condición de radiación que se considerará en este trabajo.

Finalmente, Sharan (1992) ha propuesto otra condición para la frontera de radiación que considera aproximadamente la absorción de la energía de las ondas de presión por el fondo del embalse. Para ello ha recurrido a la condición de frontera propuesta por Hall y Chopra (1980), para este fin. Más adelante se dará una explicación detallada de esta condición, pues es la que nosotros liemos reformulado. La condición de radiación resultante se expresa como:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=L} = -\frac{\zeta}{H} p\Big|_{x=L} \quad (16)$$

donde $\zeta = \sqrt{\beta_1^2 - \Omega^2}$ y β_1 es la primera raíz de la ecuación trascendente:

$$e^{2i\beta_1 H} = \frac{\omega q H - \beta_1}{\omega q H + \beta_1} \quad (17)$$

siendo q un coeficiente que depende de las propiedades del material del fondo del embalse. Esta condición posee la simplicidad de la ecuación de Sommerfeld y de la ecuación (9). Se comprobó, además, que usando esta condición de frontera se obtienen muy buenos resultados para $L=0.1H$ y para un amplio rango de frecuencias excitadoras, excepto en las cercanías de la segunda y tercera frecuencias naturales del embalse, donde se observó un error relativamente pequeño.

Para que la mayoría de las condiciones de radiación conocidas arrojen buenos resultados es necesario que se haga una adecuada discretización del embalse. Recientemente, Li *et al.* (1996) propusieron una condición de radiación que no depende de la discretización del embalse y, en este sentido, es una condición exacta. Dicha condición está dada por:

$$\nabla \psi \cdot n^w = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m g_m(Y, \omega)}{d_m} \int_0^H g_m(Y, \omega) \psi(Y, \omega) dY \quad (18)$$

donde ψ es el potencial de velocidad; n^w , la normal exterior a la superficie de radiación; ∇ , el operador gradiente; $\alpha_m = \pm \sqrt{\beta_m^2 - (\omega/c^w)^2}$, $g_m(Y, \omega) = \text{sen} \beta_m (H-Y)$ y $d_m = (1/2\beta_m)[\beta_m H - \text{sen}(\beta_m H) \cos(\beta_m H)]$. Los valores de β_m son las raíces de la ecuación trascendente:

$$\beta_m \cot(\beta_m H) + i\omega \xi = 0 \quad (19)$$

donde ξ es el coeficiente de amortiguamiento del material del fondo del embalse, que se determina en función de sus propiedades elásticas. El empleo de esta condición de frontera permite obtener excelentes resultados para un amplio rango de frecuencias, con tan sólo un número moderado de términos de la sumatoria, aproximadamente diez. Una ventaja importante en este caso es el uso de una malla poco densa para lograr buenos resultados.

Frontera transmisoras propuesta

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar una condición de radiación en la frontera transmisoras que considere los efectos tanto de la compresibilidad del agua como de la flexibilidad del fondo del embalse. La presión hidrodinámica en el embalse (ver ilustración 1) está gobernada por la ecuación de Hemholtz, dada por la expresión (1). Esta ecuación se resuelve junto con las condiciones de frontera siguientes:

1. El suelo y la cortina vibran armónicamente con una aceleración horizontal igual a:

$$\ddot{x}_g(t) = \ddot{x}_0 e^{i\omega t} \quad (20)$$

2. En $x=0$, la cortina y las partículas del agua se mueven con la misma aceleración. Entonces, considerando las ecuaciones de movimiento de Euler, en el paramento mojado de la cortina se debe cumplir:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\rho \ddot{x}_0 e^{i\omega t} \quad (21)$$

3. En la superficie libre del agua, la presión hidrodinámica es nula:

$$p\Big|_{y=H} = 0 \quad (22)$$

Cabe señalar que el oleaje en la superficie no tiene influencia en la condición de radiación, como se demuestra en Vera (1999).

4. La presión hidrodinámica a una distancia infinitamente grande de la cortina también es nula:

$$p\Big|_{x=\infty} = 0 \quad (23)$$

5. El material del fondo del embalse es flexible. Para considerar este efecto, Hall y Chopra (1980) propusieron la ecuación:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} = i\omega q p(x, 0, t) \quad (24)$$

donde la constante q se interpreta como un factor de amortiguamiento debido a la refracción por el fondo, y se determina como:

$$q = \frac{1 - \alpha_r}{c} \frac{1 - \alpha_r}{1 + \alpha_r} \quad (25)$$

$$\alpha_r = \frac{1 - \frac{\gamma c}{\gamma_r c_r}}{1 + \frac{\gamma c}{\gamma_r c_r}} \quad (26)$$

donde γ y γ_r representan los pesos específicos del agua y la roca basal, en tanto que c y c_r son las velocidades de ondas de compresión respectivas. Para cada tipo de roca existen valores conocidos de γ_r y c_r , y, a través de ellos, se calculan las constantes a_r y q . En el caso hipotético de fondo absolutamente rígido, no hay amortiguamiento de las ondas de compresión y éstas viajan a una velocidad infinita. Para este caso se cumple que $c_r = \infty$, $a_r = 1$ y $q = 0$. Por el contrario, si el fondo es absolutamente flexible, entonces $c_r = 0$, $a_r = -1$ y $q = \infty$. En el caso de roca suave, el valor de a_r se puede limitar razonablemente a cero y, por tanto, $q = 1/c$ (Li et al., 1996).

La ecuación de movimiento (1) se resuelve junto con las condiciones de frontera (21)-(24) por el método de separación de variables. Para ello, la presión hidrodinámica se expresa como el producto de tres funciones:

$$p = p_t p_x p_y \quad (27)$$

donde p_x y p_y son funciones que sólo dependen de las coordenadas x y y , respectivamente, y p_t es otra función que sólo depende del tiempo. La naturaleza oscilatoria de la presión hidrodinámica se considera a través de la función p_t , que se define como:

$$p_t = \bar{p}_t e^{i\omega t} \quad (28)$$

siendo \bar{p}_t la amplitud de la presión hidrodinámica.

Derivando dos veces las funciones p_x , p_y y p_t , y sustituyendo en la ecuación (1), se obtiene:

$$\frac{p_x''}{p_x} + \frac{p_y''}{p_y} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0 \quad (29)$$

En vista de que la relación ω/c es una cantidad constante, entonces de la ecuación (23) se deduce que las relaciones p_x''/p_x y p_y''/p_y son otras constantes. Estas relaciones se pueden representar de la siguiente forma:

$$\frac{p_x''}{p_x} = \xi^2 \quad (30)$$

$$\frac{p_y''}{p_y} = -\eta^2 \quad (31)$$

Si sustituimos:

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2 \quad (32)$$

junto con las expresiones (30) y (31) en la ecuación (29), se obtiene:

$$\xi^2 - \eta^2 + k^2 = 0 \quad (33)$$

Las expresiones (30) y (31) son ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son bien conocidas. Haciendo uso de ellas, la ecuación (27) resulta ser:

$$p(x, y, t) = (Be^{\xi x} + De^{-\xi x}) [F \cos(\eta y) + G \sin(\eta y)] p_t \quad (34)$$

donde B , D , F y G son constantes de integración que se determinan aplicando las condiciones de frontera establecidas. Si suponemos que $\eta = \lambda/H$ y $\xi = \gamma/H$, las ecuaciones (33) y (34) se transforman en:

$$\gamma^2 - \lambda^2 + \Omega^2 = 0 \quad (35)$$

$$p(x, y, t) = \left(Be^{\frac{\gamma x}{H}} + De^{-\frac{\gamma x}{H}} \right) \left[F \cos\left(\lambda \frac{y}{H}\right) + G \sin\left(\lambda \frac{y}{H}\right) \right] p_t \quad (36)$$

Aplicando las condiciones de frontera (22) a (24), es posible llegar a las siguientes expresiones:

$$p(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] \rho_t \quad (37)$$

$$\lambda_n \cot(\lambda_n) + i\Omega qc = 0 \quad (n=1, 2, \dots, \infty) \quad (38)$$

Nótese que a cada raíz λ_n le corresponde un valor $\gamma_n = \pm \sqrt{\lambda_n^2 - \Omega^2}$, de acuerdo con la ecuación (35).

Por último, para obtener los coeficientes A_n se aplica la condición de frontera (21), con lo que se llega a las siguientes expresiones:

$$\rho_t = \rho \ddot{x}_0 e^{i\omega t} \quad (39)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{H} A_n \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] = 1 \quad (40)$$

Si multiplicamos ambos términos de la ecuación (40) por $\cos(\lambda_m y/H)$, $m=1, 2, \dots, \infty$, e integramos desde $y=0$ hasta $y=H$, se obtiene:

$$\int_0^H \cos\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{H} A_n \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] dy \quad (41)$$

$$dy = \int_0^H \cos\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right) dy$$

Haciendo algunas manipulaciones algebraicas y utilizando las propiedades de ortogonalidad de las funciones seno y coseno, la ecuación (41) se reduce a:

$$A_m = \frac{H \int_0^H \cos\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right) dy}{\gamma_m \int_0^H \cos^2\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right) dy} \quad (42)$$

Evaluando las integrales y sustituyendo el subíndice m por n , en virtud de que ambos son mudos, se encuentra que:

$$A_n = \frac{H \operatorname{sen}(\lambda_n)}{\gamma_n \lambda_n \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4\lambda_n} \operatorname{sen}(2\lambda_n) \right]} \quad (43)$$

Por otro lado, al considerar la ecuación (4) junto con la ecuación (37), se deduce fácilmente que el coeficiente de presión está dado por:

$$C_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{H} e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] \quad (44)$$

En este trabajo se consideró que en la frontera transmisoras debe cumplirse la condición de radiación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=L} = Z \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{x=L} \quad (45)$$

Despejando la función Z de la ecuación (45), considerando las ecuaciones (37) y (39), se llega a:

$$Z = \frac{i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n A_n e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right]}{\Omega c \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right]} \quad (46)$$

También se demostró que es conveniente expresar la condición de radiación de la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=L} = -\frac{\alpha}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\beta \omega}{c} \rho \Big|_{x=L} \quad (47)$$

donde los coeficientes de amortiguamiento α y β se determinan con las siguientes expresiones:

$$\alpha = \operatorname{Re}(-cZ) \quad (48)$$

$$\beta = \operatorname{Im}(-cZ) \quad (49)$$

siendo Re e Im las partes real e imaginaria de cZ , respectivamente. Una vez conocidos los parámetros α y β queda completamente definida la condición de radiación de interés.

Resultados numéricos

En la ilustración 2 se muestra la variación del coeficiente de presión calculado para un valor de $\alpha_r = 0.75$. Los resultados se comparan con los que resultan de desprestigiar la flexibilidad del fondo del embalse. Puede

observarse que los efectos son prácticamente nulos para frecuencias excitadoras menores que la frecuencia fundamental del embalse, dada por $\Omega = \pi/2$, pero llegan a ser apreciables para frecuencias mayores. Cabe señalar que los resultados para fondo rígido crecen infinitamente alrededor de la frecuencia resonante, ya que en este caso se carece de un mecanismo de disipación de energía. De ahí que la atenuación de la presión hidrodinámica debido a la refracción por el fondo sea crítica alrededor de la frecuencia fundamental del embalse. Para fondo flexible, la magnitud de la presión siempre es finita, incluso para valores de a , cercanos a la unidad (fondo rígido).

El comportamiento del coeficiente de presión en función de la distancia a la cortina se aprecia en la ilustración 3, para una sola frecuencia excitadora. Es interesante notar que, pese a la hipótesis de flujo invíscido, el coeficiente de presión se amortigua rápidamente al alejarse de la cortina. A una distancia no

Ilustración 2. Variación del coeficiente de presión en la cortina para varias frecuencias excitadoras; comparación de resultados para fondo rígido y flexible.

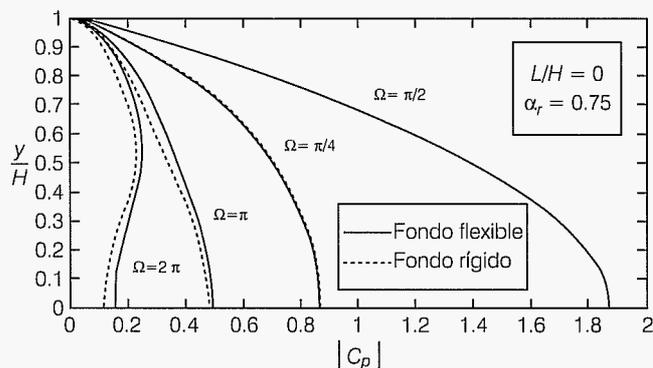
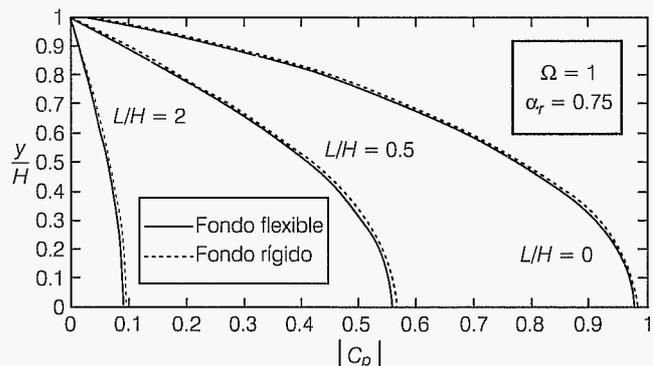


Ilustración 3. Variación del coeficiente de presión a diferentes distancias de la cortina; comparación de resultados para fondo rígido y flexible.



muy grande, prácticamente desaparece el efecto hidrodinámico. Es claro que esta atenuación no se debe a amortiguamiento interno, sino a amortiguamiento geométrico. Resultados para otras frecuencias excitadoras se muestran en la ilustración 4. Aquí se observa la atenuación que sufre el coeficiente de presión con la distancia, para un punto ubicado a la mitad de la altura del líquido. Se deduce que sería aceptable cortar el embalse a una distancia $L/H > 8$, a fin de obtener soluciones razonablemente precisas, sin necesidad de introducir fronteras transmisoras.

Con la finalidad de conocer la influencia de la flexibilidad del fondo del embalse en los coeficientes de amortiguamiento α y β , se realizó un análisis paramétrico considerando $\alpha_r = 0.75$ y diferentes frecuencias excitadoras. Los resultados se muestran en la ilustración 5, donde se aprecia que ambos coeficientes sufren pocas alteraciones para la combinación $L/H = 1$ y $\Omega = 3$, pero llegan a crecer sustancialmente para las demás combinaciones de estos parámetros. Contrariamente a lo esperado, el efecto de las altas frecuencias es importante. Cabe señalar, sin embargo, que estas frecuencias contribuyen poco a la presión hidrodinámica sobre la cortina, como se observa claramente en la ilustración 2.

Se evaluó también el efecto de la ubicación de la frontera transmisoras, el cual se muestra en la ilustración 6 para diferentes frecuencias excitadoras. Los cálculos se efectuaron para un punto localizado a la mitad de la altura del líquido. Es manifiesto que para $\Omega < 4$ ambos coeficientes de amortiguamiento, α y β , tienden a estabilizarse rápidamente. De hecho, para valores de L/H cercanos a la unidad adquieren valores prácticamente constantes. Para $\Omega > 4$, dichos coeficientes tienen un comportamiento cíclico amortiguado. En vista de lo

Ilustración 4. Atenuación del coeficiente de presión con la distancia, en un punto intermedio de la cortina y para diferentes frecuencias excitadoras.

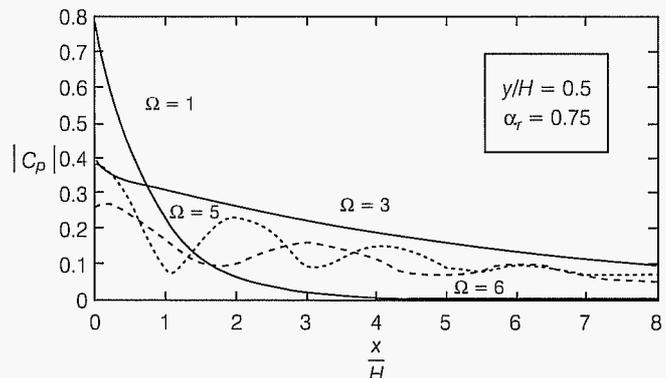
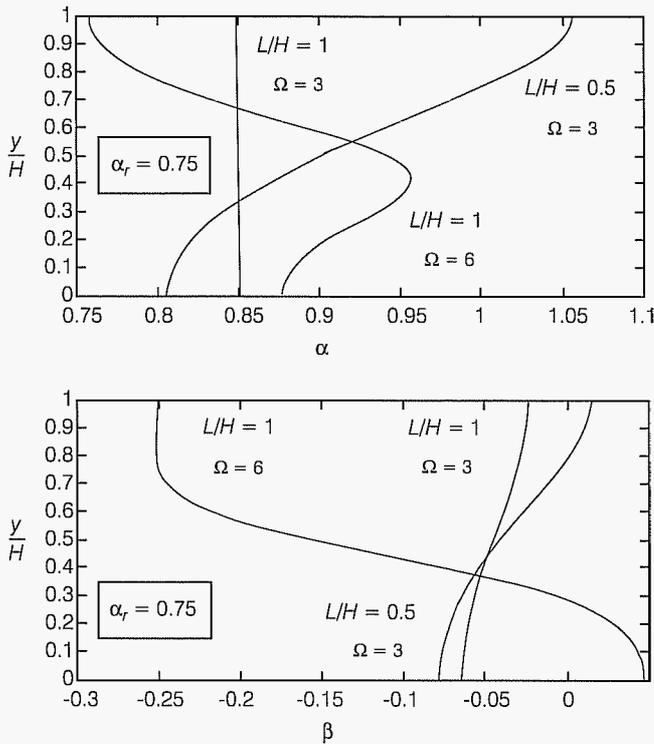


Ilustración 5. Efectos de la flexibilidad del fondo del embalse en los coeficientes de amortiguamiento α y β , para diferentes combinaciones de L/H y Ω .

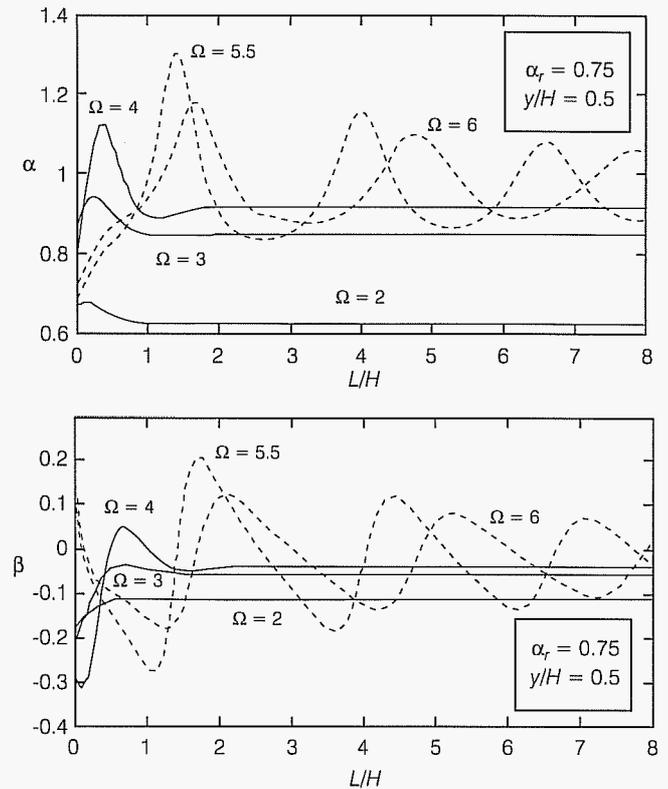


anterior, se puede recomendar que la frontera transmisor se fije a una distancia de la cortina igual a la profundidad del embalse.

Finalmente, en la ilustración 7 se presenta un conjunto de gráficas que muestran la influencia de la flexibilidad del fondo del embalse en la variación del coeficiente de presión, para diferentes frecuencias excitadoras. Es importante señalar que estos resultados incluyen el efecto del oleaje en la superficie; de ahí que la presión hidrodinámica en $y/H=1$ sea diferente de cero. Obsérvese que este efecto disminuye conforme crece la refracción por el fondo, controlada por el valor de α . Otro efecto de gran importancia es el debido a la compresibilidad del líquido. Este efecto se relaciona con la magnitud de la frecuencia excitadora. En general, la presión hidrodinámica tiende a reducirse al aumentar la frecuencia excitadora. Para frecuencias bajas, $\Omega < 3$, la distribución de presión es esencialmente parabólica, como sucede en el caso de líquido incompresible. Pero para frecuencias altas, $\Omega > 3$, dicha distribución adquiere formas complejas que dependen de las formas modales involucradas.

La utilidad práctica de estos resultados se ilustra a continuación. Estimada la frecuencia dominante de la

Ilustración 6. Comportamiento de los coeficientes de amortiguamiento α y β en función de la ubicación de la frontera transmisor, para diferentes frecuencias excitadoras.

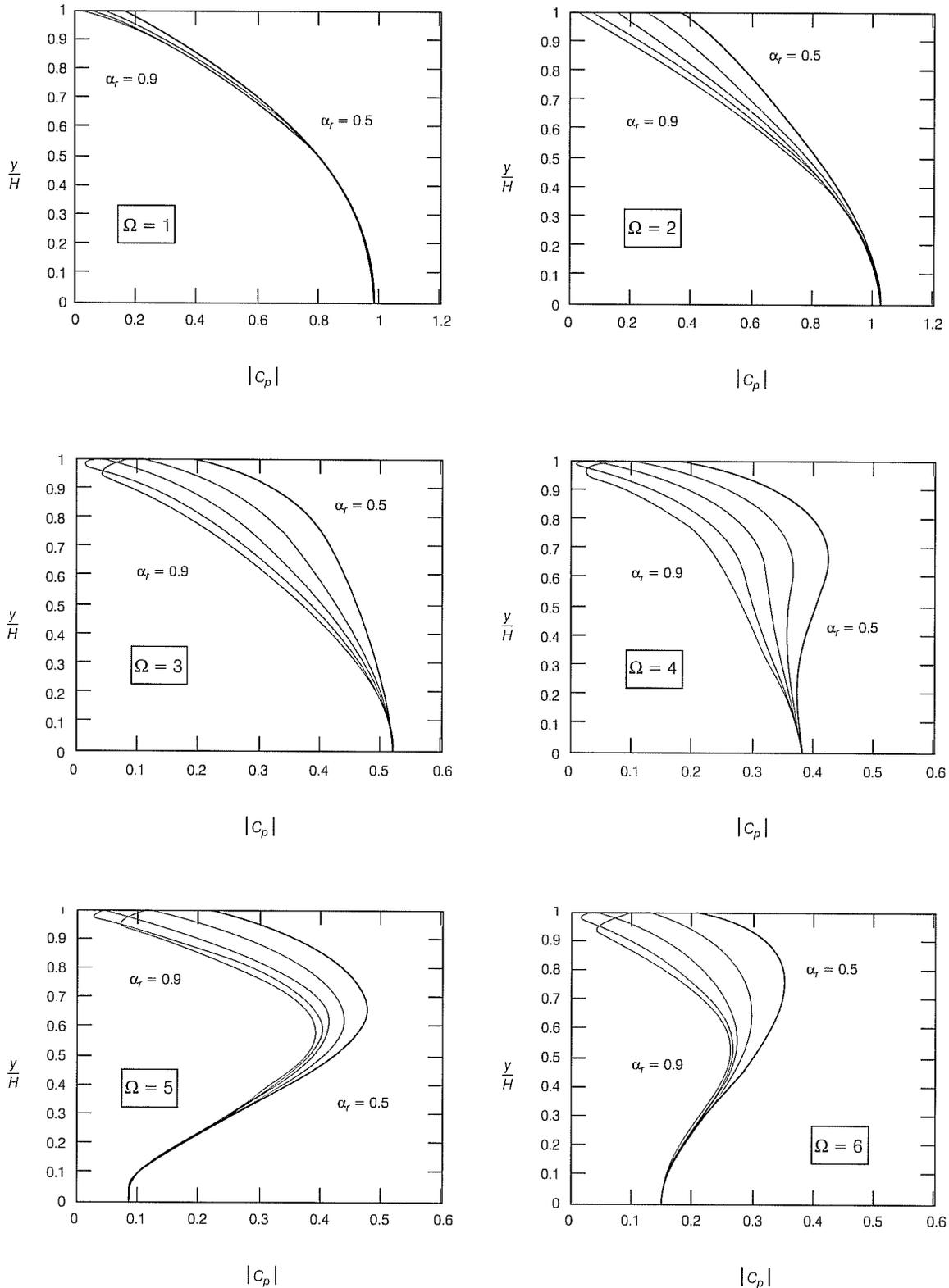


excitación, o, se determina la frecuencia normalizada $\Omega = \omega H/c$. Conocida ésta y definido el valor de α , según la ecuación (26), se entra a la gráfica correspondiente de la ilustración 7 para calcular la variación del coeficiente de presión C_p con la altura. Al leer dichas gráficas puede utilizarse simple interpolación lineal. La presión hidrodinámica se determina entonces, según la ecuación (4), como $p = \gamma H C_s C_p$, siendo C_s el coeficiente sísmico especificado reglamentariamente para el sitio de emplazamiento.

Conclusiones

Al aplicar métodos de elementos finitos o de frontera a un sistema cortina-embalse, el dominio en estudio debe truncarse a cierta distancia de la cortina, requiriéndose para ello de fronteras transmisoras. En este trabajo se han presentado las condiciones de radiación que deben cumplirse en dichas fronteras, considerando los efectos combinados de la compresibilidad del líquido almacenado y la flexibilidad del fondo del embalse. Se desarrollaron expresiones para calcular la presión

Ilustración 7. Influencia de la flexibilidad del fondo del embalse en la variación del coeficiente de presión, para diferentes frecuencias excitadoras.



hidrodinámica y el coeficiente de presión asociado. Se mostró con resultados numéricos que la refracción por el fondo tiene un efecto importante en la presión hidrodinámica, que debería ser considerado en el cálculo pues tiende a reducir su magnitud. También se examinó el comportamiento de los coeficientes de amortiguamiento α y β , con los cuales queda definida la condición de radiación para la frontera transmisoras. Adicionalmente, se elaboró un conjunto de gráficas para estimar el coeficiente de presión para varios casos de interés práctico.

Recibido: 03/03/2004

Aprobado: 13/05/2004

Referencias

- CHOPRA, A.K. Earthquakes response of concrete gravity dams. *Journal of engng. mech. div., ASCE*. Vol. 96, núm. EM4, 1970, pp. 443-474.
- HALL, J.F. y CHOPRA, A.K. *Dynamic responses of embankment concrete gravity and arch dam including hydrodynamic interaction*. Report EERC-UCV-80-39. Berkeley, EUA: Earthquake Engineering Research Center, University of California, 1980.
- HUMAR, J.L. y ROUFAIEL, M. Finite element analysis of reservoir vibration. *Journal of engng. mech. div., ASCE*. Vol. 109, núm. 1, 1983, pp. 215-230.
- HUMAR, J.L. y JABLONSKI, A.M. Boundary element reservoir model for seismic analysis of gravity dams. *Earthq. engng. & struct. dynam.* Vol. 16, 1988, pp. 1129-1156.
- LI, X., ROMO, M.P. y AVILÉS, J. Finite element analysis of dam-reservoir systems using an exact far-boundary condition. *Comput. & struct.* Vol. 60, núm. 5, 1996, pp. 751-762.
- SHARAN, S.K. Finite element analysis of unbounded and incompressible fluid domains. *Int. journal of num. meth. engng.* Vol. 21, 1985, pp. 1659-1669.
- SHARAN, S.K. Finite element modeling of infinite reservoirs. *Journal of engng. mech. div., ASCE*. Vol. 111, núm. 2, 1985, pp. 1457-1469.
- SHARAN, S.K. Efficient finite element analysis of hydrodynamic pressure on dams. *Comput. & struct.* Vol. 42, núm. 5, 1992, pp. 713-723.
- SOMMERFELD, A. *Partial differential equations in physics*. New York: Academic Press, 1949, 335 pp.
- VERA, C. Modelación con elemento finito de sistemas embalse-cortina usando fronteras de radiación. Tesis de maestría. Puebla, México: UPAEP, 1999, 76 pp.
- WESTERGAARD, H.M. Water pressures on dams during earthquakes. *Trans. ASCE*. Vol. 98, 1933, pp. 418-472.
- ZIENKIEWICZ, O.C. y NEWTON, R.E. Coupled vibrations of structure submerged in a compressible fluid. *Proc. Int. Symp. on Finite Element Techniques*. Stuttgart: 1969, pp. 359-379.

Abstract

CÉSAR VERA-MENDOZA, C., J. AVILÉS-LÓPEZ. *Evaluation of transmission boundaries for darn-reservoir systems. Hydraulic engineering in Mexico (in Spanish). Vol. XX, no. 1, January-March, 2005, pp. 109-119.*

An evaluation of the transmission boundaries developed for the earthquake analysis of darn-reservoir systems is presented. For the case of rigid darns, the boundary condition that must be fulfilled when the effects of both water compressibility and bedrock flexibility are taken into account is deduced. A relatively simple expression is derived which can be readily applied to analyses by the method of finite or boundary elements. Also, suitable expressions are developed for the computation of the hydrodynamic pressures on the upstream face of the darn, as well as for the corresponding pressure coefficients. Some numerical results showing the influence of the exciting frequency and the bedrock flexibility are presented and discussed.

Keywords: *transmission boundary, radiation condition, earthquake analysis, darn, reservoir, hydrodynamic pressure.*

Dirección institucional de los autores:

M. en I. Cesar Vera-Mendoza

*Facultad de Ingeniería Civil y Tecnológica,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
Apartado Postal J39, Ciudad Universitaria,
Puebla, Puebla, México,
teléfono y fax: + (52) (222) 2 29 55 00, extensión 7623,
vpablo@ece.buap.mx*

Dr. Javier Avilés-López

*Coordinación de Tecnología Hidráulica,
Instituto Mexicano de Tecnología del Agua,
Paseo Cuauhnahuac 8532,
62450 Progreso, Jiutepec, Morelos, México,
teléfono y fax: + (52) (777) 3 29 36 79,
javiles@tlaloc.imta.mx*