

# Perfil del flujo sobre un vertedor tipo cimacio y su comprobación

Gilberto Sotelo-Ávila

Universidad Nacional Autónoma de México

*El ingeniero que se enfrenta al diseño de un vertedor tipo cimacio utiliza la información experimental de diversos autores y dependencias para determinar su capacidad de descarga, el perfil del fondo, el perfil del flujo del agua sobre el cuerpo del cimacio y la distribución de la presión sobre la espalda del mismo. La información utilizada es sencilla, confiable, fácil de obtener y muy conocida por los especialistas en este tipo de obras.*

*Por su parte, varios autores han publicado diversas aproximaciones para predecir el perfil de la superficie del agua y la distribución de la presión sobre el vertedor, utilizando para ello redes de flujo, hipótesis simplificadoras en la teoría del potencial, la teoría del flujo curvilíneo poco profundo de Dressler y la teoría del vórtice libre. El autor de este trabajo muestra que la aplicación de la teoría del flujo sobre fondos curvos permite una predicción segura, tanto de la posición de la sección crítica en la proximidad de la cresta del cimacio, como del perfil del flujo y la distribución de la presión en el fondo, cuando se conoce su perfil geométrico y las condiciones en que opera.*

**Palabras clave:** cimacios vertedores, vertido sobre cimacios, flujo curvilíneo sobre cimacios.

## Antecedentes

Fawer (1937) inicia la investigación del flujo sobre un vertedor de cresta redondeada mediante la elaboración de una red de flujo según los lineamientos muy conocidos de Prasil (1926), comprobando la teoría con resultados experimentales. Concluyó que su solución gráfica proporciona el caudal máximo para una carga sobre la cresta dada de acuerdo con el principio de Belanger (1849), expresamente limitado a vertedores de cresta ancha donde las líneas de corriente son rectas.

Jaeger (1956) presentó las que él llamó *ecuaciones básicas del flujo curvilíneo gradualmente variado en canales*, en las que incluyó un término que toma en cuenta, de modo aproximado, la influencia de la curvatura del fondo en un flujo bidimensional a superficie libre. Jaeger admitió que era suficiente considerar un valor medio del radio de curvatura para fines prácticos. Con base en las ecuaciones antes mencionadas, Jaeger analizó el flujo sobre un vertedor de cresta redondeada y determinó la distribución de la velocidad en la sección vertical sobre la cresta y la expresión para el caudal vertido. Con ésta y el principio de energía específica mínima obtuvo una expresión para el tirante crítico en dicha sección y una

curva teórica para el coeficiente de descarga. Comparó sus resultados con los experimentales obtenidos por varios autores en vertedores con distintos radios de curvatura en la cresta y encontró algunas coincidencias.

Knapp (1960) aceptó que las líneas de corriente que cruzan una sección ortogonal a ellas en un flujo curvilíneo poseen el mismo centro de curvatura del fondo y que la velocidad en cada línea sigue la ley del vórtice libre. Con ello estableció la influencia de la curvatura del fondo en curvas verticales cóncavas o convexas, determinó la distribución de la presión en la sección y el valor de la energía total del movimiento en la misma. Knapp aplicó su teoría al caso de un vertedor tipo cimacio y encontró algunas coincidencias, con el apoyo de los resultados experimentales del *US Bureau of Reclamation* (1963).

Sivakumaran *et al.* (1981) presentaron un compendio de las ecuaciones no lineales de Dressler (1978) para flujos de poca profundidad con curvatura y las aplicaron sobre la región de la cresta de un cimacio tipo WES para obtener la relación carga-gasto y la distribución de la presión en dicha región, sin llegar a obtener el perfil del flujo. Encontraron buena coincidencia con los experimentos realizados con el mismo tipo de cimacios en la

Estación Experimental de Vías Fluviales WES (1978) del Cuerpo de Ingenieros de los Estados Unidos de Norteamérica.

### Objetivo

El vertido del agua sobre un cimacio equivale al que ocurre en un canal rectangular con fondo de curvatura convexa variable conocida, donde es importante determinar el coeficiente de descarga, la posición de la sección crítica en la proximidad de la cresta, el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de la presión en el fondo, para cualquier condición de operación, es decir, para cargas o gastos de vertido iguales o distintos a los que se utilizan para el diseño geométrico del perfil. Para su análisis se emplea la información experimental publicada por distintos autores o dependencias.

El propósito de este trabajo consiste en aplicar el modelo de flujo curvilíneo desarrollado por Sotelo y Escalante (2001 a y b) a las diversas condiciones de operación del vertedor tipo cimacio, conocido como tipo WES, para tener resultados que puedan compararse con los experimentales publicados por la estación experimental de vías fluviales, *Water Experiment Station* (1978) para dicho vertedor y comprobar o no la bondad del análisis.

### Diseño geométrico e hidráulico

La estación experimental de vías fluviales, *Waterways Experiment Station* (WES), *U. S. Army Corps of Engineers* (1978), realizó pruebas experimentales exhaustivas en modelo hidráulico, con el fin de establecer criterios para determinar el perfil del flujo vertido sobre cimacios y la distribución de la presión sobre ellos para distintas condiciones de operación. La ecuación adimensional que define el perfil geométrico del cimacio, con parámetro vertical aguas arriba y velocidad de aproximación insignificante, es:

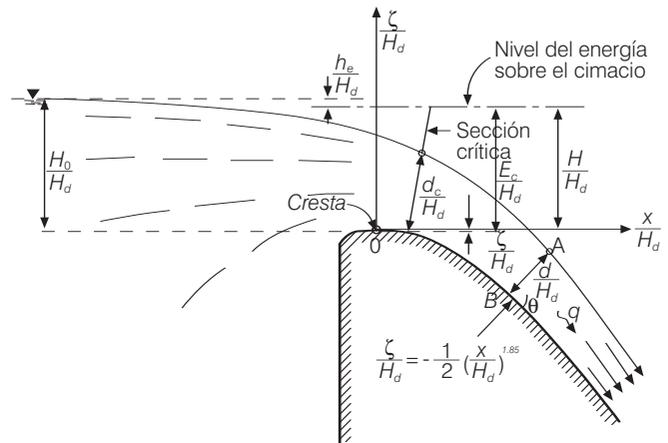
$$\frac{\zeta}{H_d} = -\frac{1}{2} \left( \frac{x}{H_d} \right)^{1.85} \quad (1)$$

con el origen del sistema coordenado  $(x, \zeta)$  en la cresta, como se muestra en la ilustración 1, siendo  $H_d$  la carga adoptada para el diseño geométrico del cimacio, medida como el desnivel entre dicha cresta y la superficie libre aguas arriba.

Un parámetro adimensional relacionado con el flujo y el perfil geométrico del cimacio es:

$$F = \frac{q}{\sqrt{2g} H_d^{3/2}} \quad (2)$$

**Ilustración 1. Condiciones de operación de un cimacio en términos adimensionales y pérdida de energía por entrada al mismo.**



el cual debe ser constante para cada caudal unitario vertido,  $q = Q/b$ , donde  $Q$  es el caudal total vertido y  $b$  la longitud de cresta del cimacio. El valor de  $q$  (por ende de  $F$ ) varía con la carga  $H_0$  de vertido o de operación del cimacio, medida también desde la cresta hasta la superficie libre aguas arriba. El coeficiente de descarga (o de vertido),  $C = q/H_0^{3/2}$ , en  $m^{1/2}/s$ , se relaciona entonces con  $F$  mediante la expresión:

$$F = \frac{C}{\sqrt{2g}} \left( \frac{H_0}{H_d} \right)^{3/2} \quad (3)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad.

La ilustración 2 muestra los valores experimentales de  $C$  para el perfil tipo WES, y la ilustración 3, los valores de  $F$  calculados de la ecuación (3). Por ejemplo, en el cuadro 1 se presentan los valores calculados de  $F$  y los experimentales de  $C$  para tres cargas distintas de operación.

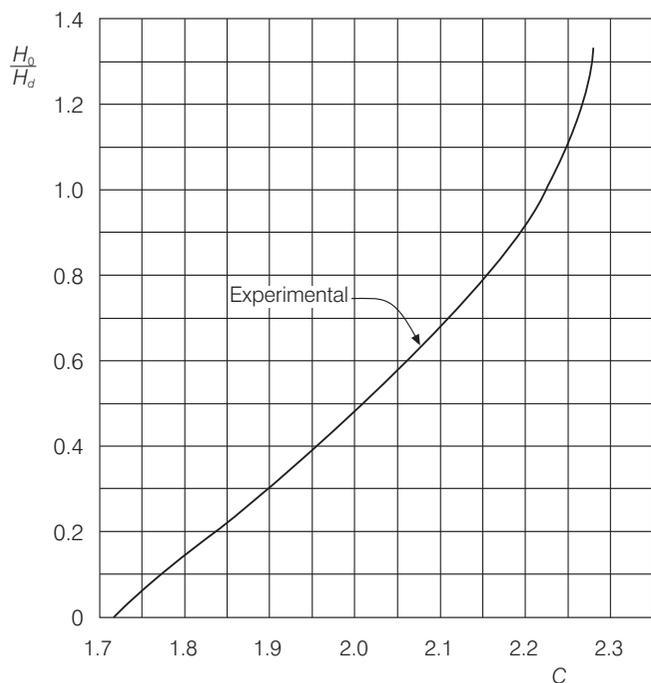
La curva de los valores experimentales de  $C$  se ajusta bien a la ecuación:

$$C = 0.49867 \sqrt{2g} \left( H_0/H_d \right)^{0.1316} \quad (4)$$

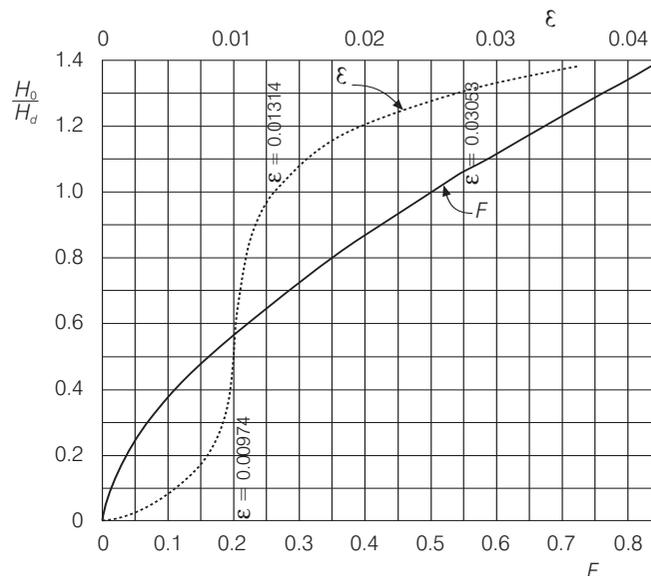
**Cuadro 1. Valores experimentales de C y los calculados de F para tres cargas de operación.**

$H_0/H_d$	0.5	1.0	1.33
$C$ ( $m^{1/2}/s$ )	2.004	2.222	2.28
$F$	0.16	0.5016	0.7895

**Ilustración 2. Coeficiente de descarga  $C$  en un cimacio tipo WES, con velocidad de llegada despreciable y distintas cargas de operación.**



**Ilustración 3. Valores calculados de  $F$  a partir de los experimentales de  $C$ . Valores calculados del coeficiente de pérdida  $\varepsilon$  según la ecuación (23).**



con errores menores del 0.6% en el intervalo:  $0.3 \leq H_0/H_d \leq 1.33$ . Por tanto, de la ecuación (3) resulta:

$$F = 0.49867 (H_0/H_d)^{1.6316} \quad (5)$$

### Ecuaciones por aplicar

La energía del flujo (por unidad de peso y tiempo) en una sección ortogonal al fondo curvo de un canal rectangular se obtiene de la ecuación (64) del artículo de Sotelo y Escalante (2001a), que se expresa en la forma:

$$H = \zeta + d \cos \theta + \frac{1}{I_Q^2 (1 - \kappa d)^2} \frac{Q^2}{2g} \quad (6)$$

donde  $I_Q$  es una integral que para la sección rectangular quedó valuada mediante la ecuación (26) del artículo de Sotelo y Escalante (2001b), y resultó:

$$I_Q = -(b/\kappa) \ln(1 - \kappa d) \quad (7)$$

donde  $\kappa$  es la curvatura del fondo. Por tanto, la energía total del flujo con respecto del plano horizontal que pasa por la cresta es:

$$H = \zeta + d \cos \theta + \left[ \frac{\kappa}{(1 - \kappa d) \ln(1 - \kappa d)} \right]^2 \frac{q^2}{2g} \quad (8)$$

expresión que permite determinar el perfil de la superficie libre de la lámina vertiente sobre el cimacio, cuya geometría se obtiene de la carga  $H_d$  de diseño.

La carga  $H_d$  sirve para adimensionalizar la ecuación (8), donde se sustituye también la ecuación (2) y se expresa en cualquiera de las formas siguientes:

$$\frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} = \frac{\cos \theta}{\kappa H_d} \chi + \left[ \frac{F \kappa H_d}{(1 - \chi) \ln(1 - \chi)} \right]^2 \quad (9a)$$

$$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} \left[ \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right] = \chi + \frac{\kappa H_d}{\cos \theta} \left[ \frac{F \kappa H_d}{(1 - \chi) \ln(1 - \chi)} \right]^2 \quad (9b)$$

donde  $\chi = \kappa d$ . La suma de términos antes del signo igual representa la energía específica (adimensional) en cada sección ortogonal al fondo, siendo  $H$  la altura de la línea de energía respecto de la cresta, la cual es constante para cualquier punto del campo de flujo.

Como ocurre en los canales de fondo plano, la ecuación (9) tiene dos raíces  $\chi$  (alternas) para cada valor de  $H/H_d$  y de  $\zeta/H_d$ , una en régimen subcrítico y otra en supercrítico, la primera mayor y la segunda menor que el crítico en cada sección. Para la solución puede adoptarse el método de Newton-Raphson.

La ecuación (66) del artículo de Sotelo y Escalante (2001a) proporciona la carga de presión en el fondo curvo del canal, dada por:

$$\frac{p_0}{g \rho} = d \cos \theta + \left[ (1 - \kappa d)^{-2} - 1 \right] \frac{u_0^2}{2g} \quad (10)$$

donde  $u_0$  es la velocidad local en el fondo de la sección y está relacionada con  $l_Q$ , de la ecuación (7), mediante el cociente  $u_0 = Q/l_Q$ . Al sustituir  $u_0$  e  $l_Q$  y adimensionalizar el resultado, se obtiene:

$$\frac{p_0}{g \rho H_d} = \frac{\cos \theta}{\kappa H_d} \chi + \left[ \frac{F \kappa H_d}{\ln(1 - \chi)} \right]^2 \left[ (1 - \chi)^{-2} - 1 \right] \quad (11)$$

Al eliminar el término  $(\cos \theta / \kappa H_d) \chi$  mediante la ecuación (9a), resulta que:

$$\frac{p_0}{g \rho H_d} = \left[ \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right] - \left[ \frac{F \kappa H_d}{\ln(1 - \chi)} \right]^2 \quad (12)$$

donde  $p_0$  es la presión en cualquier punto del perfil sólido del cimacio (de ordenada  $x$  y abscisa  $\zeta$ ),  $\rho$  es la densidad del líquido y  $F$  está definido por la ecuación (2).

Por otra parte, las ecuaciones (5c) y (23) del artículo de Sotelo (2004) definen el número de Froude y su valor crítico en un canal rectangular, a saber:

$$\mathcal{F} = \frac{u_0}{\sqrt{g d \cos \theta}} \quad (13)$$

$$\mathcal{F}_c = \left[ - \frac{(1 - \kappa d)^3 \ln(1 - \kappa d)}{\kappa d [\ln(1 - \kappa d) + 1]} \right]^{1/2} \quad (14)$$

Se sustituye  $u_0$  de la ecuación (13) en la (6) y se obtiene:

$$H = \zeta + \left[ 1 + \frac{\mathcal{F}^2}{2(1 - \chi)^2} \right] d \cos \theta \quad (15)$$

de la cual se despeja  $\mathcal{F}$  y en términos adimensionales resulta:

$$\mathcal{F} = \sqrt{2} (1 - \chi) \left[ \frac{\kappa H_d}{\chi \cos \theta} \left( \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right) - 1 \right]^{1/2} \quad (16)$$

La sección crítica se localiza donde  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ , es decir, el número de Froude se iguala con el valor crítico expresado por la ecuación (14). Por tanto, se debe cumplir que:

$$2 (1 - \chi_c)^2 \left[ \frac{\kappa H_d}{\chi_c \cos \theta} \left( \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right) - 1 \right] = - \frac{(1 - \chi_c)^3 \ln(1 - \chi_c)}{\chi_c [\ln(1 - \chi_c) + 1]} \quad (17a)$$

o bien:

$$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} \left( \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right) = \chi_c - \frac{1}{2} \frac{(1 - \chi_c) \ln(1 - \chi_c)}{\ln(1 - \chi_c) + 1} \quad (17b)$$

Esta ecuación permite calcular  $\chi_c$  para cada valor del término a la izquierda del signo igual, el cual depende a su vez de  $H/H_d$  y de  $\zeta/H_d$ .

La ecuación (17b) no ubica a la sección crítica y para localizarla se debe satisfacer una expresión cuyo desarrollo se expone en el Anexo al final del trabajo y que es:

$$f \left( \frac{x}{H_d}, \frac{H}{H_d} \right) = (1 - \chi_c) \frac{d\zeta}{dx} + \left[ 2 \left( \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right) - 3 \frac{\cos \theta}{\kappa H_d} \chi_c \right] \frac{H_d^2 (d\kappa/dx)}{\kappa H_d} = 0 \quad (18)$$

La curvatura  $\kappa$  en cada punto y el término  $d\kappa/dx$  se obtienen de la ecuación (1), de modo que al adimensionalizar resultan las expresiones siguientes:

$$\tan \theta = \frac{d\zeta}{dx} = -0.925 \left( \frac{x}{H_d} \right)^{0.85} \quad (19)$$

$$\kappa H_d = - \frac{0.78625}{\left( x/H_d \right)^{0.15} \left[ 1 + 0.855625 \left( x/H_d \right)^{1.7} \right]^{3/2}} \quad (20)$$

$$\frac{H_d^2 d\kappa/dx}{\kappa H_d} = - \frac{0.15}{x/H_d} \left[ \frac{1 + 15.40125 \left( x/H_d \right)^{1.7}}{1 + 0.855625 \left( x/H_d \right)^{1.7}} \right] \quad (21)$$

La curvatura adopta dos valores sobre la cresta del cimacio ( $x = \zeta = 0$ ):  $\kappa H_d = -2$ , como se observa de su geometría y la que se obtiene de hacer  $x/H_d = 0$  en la ecuación (19). Para  $x/H_d > 0$ , la solución de la ecuación (9b) cambia para cada valor de  $H/H_d$  y de  $x/H_d$ ; además

de que hay que localizar la sección crítica. Se puede demostrar que cuando el perfil del fondo es convexo y asimétrico, como es el caso, la sección crítica se desplaza hacia aguas abajo de la cresta y para localizarla se utiliza la ecuación (18).

Para comprobar la ecuación (9b) por la vía experimental con un cimacio de geometría diseñada con la carga  $H_d$ , se pueden seguir dos caminos:

1. Se establece un caudal en la instalación con una carga adimensional de operación  $H/H_d$  y después se mide el perfil de la superficie libre con diferentes abscisas  $x$ , se calcula  $F$  de la ecuación (9b), el cual se comprueba con  $q$  y la definición dada por la ecuación (2).

2. También se puede medir  $q$  para conocer  $F$ , así como el perfil de la superficie libre para obtener  $\chi$ ; después con  $\cos \theta$ ,  $\kappa H_d$  y la ecuación (9b), se calcula la carga relativa de operación  $H/H_d$ , la cual se comprueba con las mediciones.

Sivakumaran *et al.* (1981) analizaron parcialmente el caso utilizando el primer camino y encontraron algunas concordancias. El autor de este trabajo siguió el segundo camino.

### Procedimiento de cálculo

El primer paso consistió en encontrar la ubicación y características de la sección crítica que se forma en la proximidad de la cresta, para determinar la relación que hay entre el caudal y la energía. Para ello se consideraron dos modos equivalentes de localizar la sección crítica en el cimacio, a saber: a) obtener la energía específica mínima (crítica) necesaria para que fluya un caudal dado; b) determinar el caudal máximo que puede fluir con una energía específica dada.

Ambos modos se utilizaron para definir la relación entre el gasto  $q$  y la carga  $H_0$  sobre la cresta, como se muestra en la ilustración 1, aceptando que  $H_0$  es diferente de la energía que posee el flujo en la región del cimacio y sólo para las tres condiciones de operación antes mencionadas. Para el primer modo se eligieron los caudales (representados por  $F$ ) y se calcularon las alturas de energía  $H/H_d$  correspondientes a la sección crítica. Para el segundo modo se eligieron las cargas adimensionales y se calcularon los caudales críticos (máximos) correspondientes, representados por  $F$ .

En ambos casos son válidas las ecuaciones (6) a (21), pero para el primer modo es conveniente combinar las ecuaciones (9b) y (17b). Así, resulta que:

$$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} (F \kappa H_d)^2 = -\frac{1}{2} \frac{[(1-\chi_c) \ln(1-\chi_c)]^3}{\ln(1-\chi_c)+1} \quad (22)$$

donde el primer término es constante y permite obtener el valor de  $\chi_c$  que satisface a la ecuación (18), con el fin de localizar la sección crítica para el valor de  $F$  considerado.

Para el segundo modo,  $H/H_d$  es constante y es preferible resolver  $\chi_c$  de la ecuación (17b) que satisfaga la ecuación (18), para después calcular  $F$  de la ecuación (3), que corresponda a la energía  $H/H_d$  dada.

Un resumen de los cálculos se presenta en los cuadros 2a, 2b y 2c destacando sólo los resultados finales para cada modo. Por ejemplo, para el primer modo, con  $H_0/H_d = 0.5$  y  $F = 0.16$ , la sección crítica se localiza en  $x/H_d = 0.059302$ ; para ella,  $\chi_c = -0.41249$ ,  $H/H_d = 0.495128$ , al satisfacer la ecuación (18).

El valor  $F = 0.16$  se obtuvo experimentalmente para  $H_0/H_d = 0.5$ , como puede verse en el cuadro 1 o en la ilustración 3. La diferencia que se observa respecto del teórico ( $H/H_d = 0.495128$ ) antes mencionado, puede interpretarse de tres maneras distintas: a) que exista un error como resultado de las imperfecciones en la teoría y el experimento (para los valores anteriores, del orden del uno por ciento); b) que se produzca una pérdida de energía por efecto de la aceleración del agua, la turbulencia y el desarrollo de la capa límite, y que no fue considerada en la teoría; y c) que ocurra un efecto combinado de las dos anteriores.

La segunda posibilidad es la única manera factible de valuar numéricamente englobando a las otras dos; es decir, se acepta que ocurra la pérdida de energía  $h_e/H_d$  que se acota en la ilustración 1. Dicha pérdida se puede valuar como  $h_e = \epsilon H_0$ , donde  $\epsilon \leq 1$ , de manera que  $H_0 = H + h_e$ . Así, se tiene que:  $H_0 = H + \epsilon H_0$ ;  $\epsilon = 1 - (H/H_0)$ ; o bien, en forma adimensional se tiene:

$$\epsilon = 1 - (H/H_d)/(H_0/H_d) \quad (23)$$

donde  $\epsilon$  es el coeficiente de pérdida en términos de la carga aguas arriba.

Para el segundo modo de abordar el problema se presentan los valores calculados de  $F$  para las cargas  $H/H_d$  utilizadas, en los cuadros 2a, 2b y 2c; dichos valores son mayores que los que se muestran en el cuadro 1. Por ejemplo, cuando el nivel de la energía para el flujo sobre el cimacio es  $H/H_d = 0.5$ , se obtiene  $F = 0.162573$ , que es mayor que el valor dado en el cuadro 1. Esto significa que dicho gasto es posible sólo si la carga aguas arriba es mayor; es decir, si  $H_0/H_d > H/H_d = 0.5$ , donde  $H/H_d = 0.504995$ , debiendo interpretarse la diferencia entre ambas como la pérdida antes expuesta, para después calcular  $\epsilon$  de la misma manera que en el modo anterior.

**Cuadro 2a. Posición y características del flujo en la sección crítica para distintos gastos y cargas de operación en el cimacio.**

		$Q = \text{const.}; H = H_c$					$H = \text{const.}; Q = Q_{m\acute{a}x}$				
		$F = 0.16$					$H/H_d = 0.5$				
$\frac{x}{H_d}$	$\frac{\zeta}{H_d}$	$\tan \theta$	$\cos \theta$	$\kappa H_d$	$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta}$	$\frac{H_d^2 \frac{d\kappa}{dx}}{\kappa H_d}$	$(F \kappa H_d)^2$	$\chi_c$	$\frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d}$	$\chi_c$	$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} (F \kappa H_d)^2$
	ec. 1	ec. 19		ec. 20		ec. 21	$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} (F \kappa H_d)^2$	f en la ec. 18	$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} \left( \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right)$	f en la ec. 18	$(F \kappa H_d)^2$
0.05	-0.001959	-0.072488	0.997383	-1.222647	-1.225855	-3.266579	0.038269	-0.423443	0.501959	-0.427837	
							-0.046912	0.49497	0.615329	0.037336	
								-0.043386			
0.06	-0.002745	-0.084639	0.996437	-1.186282	-1.190523	-2.802294	0.036026	-0.411739	0.502745	-0.415869	
							-0.04289	0.495127	0.59853	-0.000856	
								0.002815			
0.059302	-0.002686	-0.083801	0.996507	-1.188616	-1.192782	-2.829297	0.036168	-0.41249			
							-0.04314	0.495128			
								0.0			
0.059748	-0.002724	-0.084337	0.996462	-1.187120	-1.191335	-2.811953			0.502724	-0.416141	-0.044373
									-0.598912	0.0	0.037246
											$F = 0.162573$

**Cuadro 2b. Posición y características del flujo en la sección crítica para distintos gastos y cargas de operación en el cimacio (continuación).**

		$Q = \text{const.}; H = H_c$					$H = \text{const.}; Q = Q_{m\acute{a}x}$				
		$F = 0.5016$					$H/H_d = 1.0$				
$\frac{x}{H_d}$	$\frac{\zeta}{H_d}$	$\tan \theta$	$\cos \theta$	$\kappa H_d$	$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta}$	$\frac{H_d^2 \frac{d\kappa}{dx}}{\kappa H_d}$	$(F \kappa H_d)^2$	$\chi_c$	$\frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d}$	$\chi_c$	$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} (F \kappa H_d)^2$
	ec. 1	ec. 19		ec. 20		ec. 21	$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} (F \kappa H_d)^2$	f en la ec. 18	$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} \left( \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right)$	f en la ec. 18	$(F \kappa H_d)^2$
0.098	-0.006804	-0.128435	0.991853	-1.086972	-1.095901	-1.952869	0.297271	-0.768045	1.006804	-0.778452	
							-0.325779	0.986855	-1.103357	-0.501545	
								-0.002339			
0.099	-0.006933	-0.129548	0.991713	-1.084859	-1.093924	-1.940299			1.006933	-0.777116	
									-1.101508	-0.002840	
0.097375	-0.006724	-0.127739	0.99194	-1.088302	-1.097145	-1.960876	0.297998	-0.768876			
							-0.326947	0.986856			
								0.0			
0.09824	-0.006834	-0.128702	0.991819	-1.086464	-1.095425	-1.949829			1.006834	-0.778031	-0.340176
									-1.102912	0.0	0.310546
											$F = 0.512915$

**Cuadro 2c. Posición y características del flujo en la sección crítica para distintos gastos y cargas de operación en el cimacio (continuación).**

$\frac{x}{H_d}$	$\frac{\zeta}{H_d}$	$\tan \theta$	$\cos \theta$	$\kappa H_d$	$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta}$	$\frac{H_d^2 \frac{d\kappa}{dx}}{\kappa H_d}$	$Q = \text{const.}; H = H_c$		$H = \text{const.}; Q = Q_{m\acute{a}x}$	
							$F = 0.7895$	$(F \kappa H_d)^2$	$\chi_c$	$\frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d}$
	ec. 1	ec. 19		ec. 20		ec. 21	$f$ en la ec. 18	$f$ en la ec. 18	$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} \left( \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right)$	$f$ en la ec. 18
0.11	-0.008425	-0.141686	0.990111	-1.062683	-1.073297	-1.819848	0.703901	-0.988031	1.338425	-1.019683
							-0.755495	1.289330	-1.436526	-0.031353
								0.010679		
0.12	-0.009896	-0.152562	0.988562	-1.043986	-1.056066	-1.733346	0.679351	-0.972969	1.339896	-1.004086
							0.717439	1.289360	-1.415019	0.007038
								0.015046		
0.115796	-0.009264	-0.148007	0.989224	-1.051695	-1.063152	-1.76744	0.689420	-0.97918		
							-0.732959	1.28939		
								0.0		
0.118059	-0.009602	-0.150462	0.988869	-1.047520	-1.059311	-1.748709			1.339602	-1.007013
									-1.419055	0.0
										-0.805506
										0.760405
										$F = 0.832453$

**Cuadro 3. Valores críticos para tres condiciones de operación del cimacio.**

a) Para  $Q = \text{constante}, H = H_c$

$\frac{H_0}{H_d}$	$F$	$\frac{\chi_c}{H_d}$	$\chi_c = \kappa d_c$	$\frac{H}{H_d}$	$\epsilon$	$\kappa H_d$	$\frac{d_c}{H_d}$	$C$
0.50	0.1600	0.059302	-0.412490	0.495128	0.009743	-1.188615633	0.347034	2.0342
1.00	0.5016	0.097375	-0.768876	0.986856	0.013144	-1.088301875	0.706490	2.2663
1.33	0.7895	0.115796	-0.979180	1.289390	0.030534	-1.051695345	0.931049	2.3885

b) Para  $H = \text{constante}, Q = Q_c$

$\frac{H}{H_d}$	$\frac{\chi_c}{H_d}$	$\chi_c = \kappa d_c$	$F_c$	$\frac{H_0}{H_d}$	$\epsilon$
0.50	0.059748	-0.416141	0.162573	0.504995	0.009891
1.00	0.098240	-0.778131	0.512915	1.013400	0.013220
1.33	0.118059	-1.007013	0.832453	1.379000	0.035500

En los cuadros 3a y 3b se presenta el resumen de los cálculos antes descritos para las condiciones críticas y los valores del factor  $\epsilon$  de pérdida. Puede observarse que la energía del flujo en la zona del cimacio ( $H/H_d$ ) es, en cualquier caso, siempre menor que la que existe como carga aguas arriba ( $H_0/H_d$ ). La ilustración 3 muestra la representación gráfica de los valores de  $\epsilon$  según los cuadros 3a y 3b, y se observa que existe congruencia entre ambos modos de solución.

### Perfil del flujo y distribución de la presión

El cálculo de los perfiles del flujo debe entonces realizarse para los valores mostrados en los cuadros 3a y 3b, ya que corresponden a los obtenidos experimentalmente para las tres cargas de operación. Dicho cálculo se presenta en los cuadros 4a, 4b y 4c, donde las características geométricas del perfil del cimacio se obtuvieron de las ecuaciones (19) y (20), las raíces  $\chi_i$  de la ecuación (22) y los valores de la presión de la ecuación (12).

**Cuadro 4a. Cálculo del perfil del flujo y carga de presión sobre la espalda de un cimacio para tres cargas de operación.**

$\frac{x}{H_d}$	$\frac{\zeta}{H_d}$	$\tan \theta$ $d\zeta/dx$	$\cos \theta$	$\kappa H_d$	$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta}$	$F = 0.16$		$F = 0.5016$		$F = 0.7895$	
						$H/H_d = 0.495128$		$H/H_d = 0.986856$		$H/H_d = 1.28939$	
						$\frac{H}{H_d} = \frac{\zeta}{H_d}$	$\chi$	$\frac{H}{H_d} = \frac{\zeta}{H_d}$	$\chi$	$\frac{H}{H_d} = \frac{\zeta}{H_d}$	$\chi$
						$(F \kappa H_d)^2$	$d/H_d$ $\rho/g\rho H_d$	$(F \kappa H_d)^2$	$d/H_d$ $\rho/g\rho H_d$	$(F \kappa H_d)^2$	$d/H_d$ $\rho/g\rho H_d$
- 0.2	- 0.042978	0.539781	0.879986	- 5.0	- 5.68191	0.538106 0.640000	- 2.931999 0.5864 0.196694	1.029834 6.290064	- 5.623513 1.124703 - 0.729887	1.332368 15.582756	- 7.281528 1.456306 - 2.154400
- 0.15	- 0.023030	0.314485	0.953939	- 2.0	- 2.09657	0.518158 0.1024	- 0.964279 0.482139 0.293496	1.009886 1.006410	- 1.894269 0.947135 0.118785	1.312420 2.493241	- 2.471585 1.235792 - 0.297101
- 0.1	- 0.010102	0.204124	0.979796	- 2.0	- 2.041241	0.505230 0.1024	- 0.884856 0.442428 0.250357	0.996958 1.006410	- 1.781193 0.890596 0.035067	1.299492 2.493241	- 2.338312 1.169156 - 0.416261
- 0.05	- 0.002506	0.100504	0.994987	- 2.0	- 2.010076	0.497635 0.1024	- 0.833849 0.416924 0.219178	0.989362 1.006410	- 1.712621 0.856310 - 0.021258	1.291896 2.493241	- 2.258586 1.129293 - 0.494792
0.0	0.0	0.0	1.00	- 2.0	- 2.0	0.495128 0.1024	- 0.815595 0.407797 0.207252	0.986856 1.006410	- 1.689368 0.844684 - 0.041429	1.28939 2.493241	- 2.231832 1.115916 - 0.522501
0.059302 crítico	- 0.002686	- 0.083801	0.996507	- 1.188616	- 1.192782	0.497815 0.036167	- 0.412490 0.347034 0.19457	0.989542 0.355466	- 0.875635 0.736685 0.090935	1.292076 0.880617	- 1.167732 0.982431 - 0.179093
0.097375 crítico	- 0.006723	- 0.127739	0.99194	- 1.088302	- 1.097145	0.501852 0.030321	- 0.358121 0.329064 0.178254	0.993579 0.296993	- 0.768876 0.706491 0.077486		

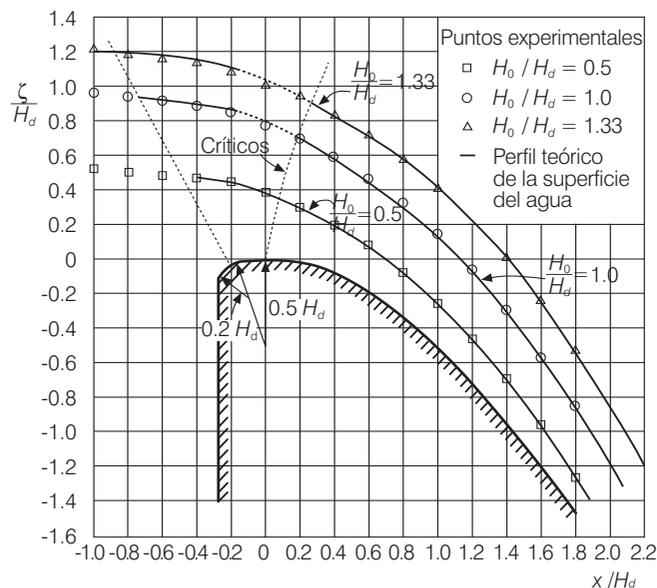
**Cuadro 4b. Cálculo del perfil del flujo y carga de presión sobre la espalda de un cimacio para tres cargas de operación (continuación).**

0.115796 crítico	- 0.009264	- 0.148007	0.989224	- 1.051695	- 1.063152					1.298654 0.689420	- 0.97918 0.931049 - 0.180614
0.2	- 0.025461	- 0.235514	0.973369	- 0.92308	- 0.948334	0.520589 0.021813	- 0.270981 0.293562 0.141222	1.012317 0.214384	- 0.598773 0.648668 0.03865	1.314851 0.531108	- 0.809320 0.876761 - 0.195733
0.4	- 0.091787	- 0.424515	0.920492	- 0.703576	- 0.764348	0.586915 0.012673	- 0.173367 0.246408 0.091135	1.078643 0.124548	- 0.403248 0.573141 - 0.006475	1.381118 0.308551	- 0.554756 0.78848 - 0.203069
0.6	- 0.194334	- 0.599198	0.857796	- 0.535785	- 0.624606	0.689463 0.007349	- 0.114149 0.213049 0.060470	1.181190 0.072226	- 0.277725 0.518351 - 0.021288	1.483724 0.178931	- 0.388431 0.724975 - 0.177686
0.8	- 0.330892	- 0.765188	0.794173	- 0.407233	- 0.512776	0.826020 0.004245	- 0.076339 0.187457 0.041542	1.317748 0.041725	- 0.193003 0.473939 - 0.022047	1.620282 0.103369	- 0.274013 0.672867 - 0.142268

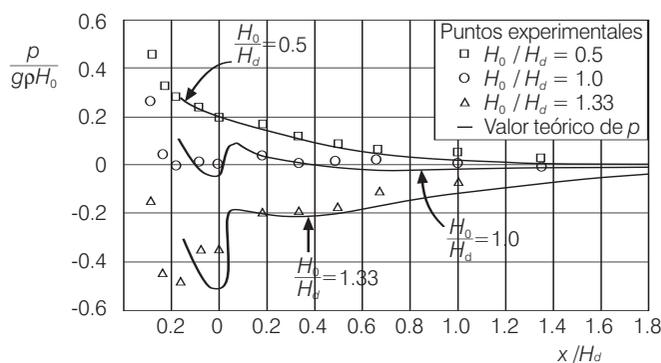
Cuadro 4c. Cálculo del perfil del flujo y carga de presión sobre la espalda de un cimacio para tres cargas de operación (continuación).

$\frac{x}{H_d}$	$\frac{\zeta}{H_d}$	$\tan \theta$ $d\zeta/dx$	$\cos \theta$	$\kappa H_d$	$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta}$	$F = 0.16$		$F = 0.5016$		$F = 0.7895$	
						$H/H_d = 0.495128$		$H/H_d = 0.986856$		$H/H_d = 1.28939$	
						$\frac{H}{H_d} = \frac{\zeta}{H_d}$	$\chi$	$\frac{H}{H_d} = \frac{\zeta}{H_d}$	$\chi$	$\frac{H}{H_d} = \frac{\zeta}{H_d}$	$\chi$
						$(F \kappa H_d)^2$	$\rho/g\rho H_d$	$(F \kappa H_d)^2$	$\rho/g\rho H_d$	$(F \kappa H_d)^2$	$\rho/g\rho H_d$
1.0	-0.5000	-0.925	0.734099	-0.311047	-0.423712	0.995128 0.002477	-0.051953 0.167025 0.029599	1.486856 0.024343	-0.135634 0.436056 -0.017856	1.7894 0.060305	0.195120 0.627302 -0.108677
1.2	-0.700576	-1.080055	0.679389	-0.239905	-0.353119	1.195704 0.001473	-0.036063 0.150323 0.02183	1.687432 0.014481	-0.096681 0.402997 -0.012766	1.989966 0.035874	-0.140672 0.586366 -0.080911
1.4	-0.931766	-1.231262	0.630440	-0.187316	-0.297118	1.426894 0.000898	-0.025558 0.136445 0.016604	1.918622 0.008828	-0.07003 0.373861 -0.008267	2.221156 0.021870	-0.102884 0.549254 -0.059364
1.6	-1.192867	-1.379252	0.586984	-0.148191	-0.252461	1.687995 0.000562	-0.018489 0.124765 0.012972	2.179723 0.005525	-0.051579 0.348059 -0.004731	2.482257 0.013688	-0.0764 0.515551 -0.043150
1.8	-1.483283	-1.524486	0.548486	-0.118787	-0.216572	1.978412 0.000361	-0.013640 0.114828 0.010372	2.470139 0.003550	-0.038622 0.325137 -0.002113	2.772673 0.008795	-0.057606 0.484950 -0.031128

Ilustración 4. Valores adimensionales teóricos y experimentales para tres cargas de operación.



a) Perfiles de la superficie libre sobre la espalda del cimacio



b) Distribución de la presión sobre la espalda del cimacio

## Resultados obtenidos

Los perfiles del flujo calculados para las tres cargas de operación en los cuadros 4a a 4c se dibujan con línea llena en la ilustración 4a, donde también aparecen los puntos que fueron obtenidos experimentalmente. La ilustración 4a contiene asimismo el perfil del cimacio ajustado al sistema de ejes coordenados representado en la ilustración 1. Se observa una excelente concordancia entre los perfiles teóricos y los experimentales para la región aguas abajo de la cresta, no así para la región antes de ella, donde ocurren pequeñas diferencias. A pesar de que en la región antes de la cresta los valores de  $\chi$  son mayores de dos para  $x/H_d = -0.2$ , se observa una buena concordancia con los valores experimentales al efectuar el trazo dentro de la ilustración.

La ilustración 4b contiene los valores de  $x/H_d$  en el eje horizontal y los de  $p/g\rho H_d$  en el eje vertical. En ella se muestra una comparación gráfica entre los valores teóricos correspondientes a los cuadros 4a, 4b, 4c y los experimentales de la presión relativa para las mismas tres cargas de operación, donde nuevamente se observan las mayores discrepancias antes de la cresta, ya que los valores de  $\chi$  se acercan o rebasan el valor límite (-2) acordado para la validez de la hipótesis del flujo poco profundo.

Las mayores discrepancias se presentan ligeramente detrás de la cresta, pero una vez alcanzada la sección crítica existe una gran coincidencia entre los valores teóricos y los experimentales.

## Conclusiones

La aplicación del modelo de flujo curvilíneo a curvas verticales convexas de geometría conocida, como en un cimacio, conduce efectivamente a muy buenos resultados, ya que, a pesar de las pequeñas diferencias entre los valores calculados y los valores experimentales, habría que pensar que ambos contienen imperfecciones propias de cada método. Las mayores discrepancias se observan en el perfil del flujo antes de la cresta, donde resulta difícil definir la sección ortogonal por la geometría que el fondo tiene en esta zona. Además, como ya se explicó, se viola la hipótesis de flujo poco profundo que sustenta la teoría. No obstante, puede decirse que las diferencias no son importantes, pues en esa región no se requiere mayor precisión en la determinación del perfil del flujo.

Por lo que se refiere a la sección crítica en la proximidad de la cresta, la teoría permite detectar su posición para cada valor de la carga de operación, así como las características de tirante, velocidad y energía específica

en ella. Es obvio que en ningún caso dicha sección crítica coincide con la vertical que pasa por la cresta, como ha sido común considerarlo en la práctica, con la aceptación además de un flujo rectilíneo formado sobre dicha cresta, que dista mucho de ser correcto. La profundidad del flujo medida experimentalmente en dicha sección vertical es cercana al valor de  $0.75 H$ , distinto de  $2H/3$  que resulta de la condición crítica del flujo rectilíneo.

El modelo de flujo muestra, una vez más, que es capaz de predecir de manera confiable la distribución de la presión sobre el cuerpo del cimacio, variable de mucha importancia en el problema. Por lo que se refiere a los valores teóricos, se determinaron valores positivos de la presión, casi iguales a cero y negativos, para una carga de operación menor, igual y mayor que la de diseño. Estos valores coinciden con los experimentales en magnitud, pero en puntos con posiciones ligeramente distintas. Las mayores diferencias en posición ocurren prácticamente sobre la cresta y antes de ella, es decir, el mismo comportamiento observado para el perfil del flujo.

## Anexo

Demostración de la ecuación (18).

La ubicación de la sección crítica depende de  $\zeta_c$ , es decir, de la coordenada  $x_c$  de la sección donde  $dH/dx = 0$  y  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ . Para encontrarla, se sustituye  $\chi = \kappa d$  en la ecuación (8) y ésta se convierte en:

$$\left[ (1-\chi) \ln(1-\chi) \right]^{-2} = \frac{2g}{\kappa^2 q^2} (H-\zeta) - \frac{2g \cos \theta}{\kappa^3 q^2} \chi \quad (\text{A.1})$$

la cual se escribe de modo simplificado en la forma:

$$\gamma(\chi) = A + B\chi \quad (\text{A.2})$$

donde:

$$A = \frac{2g}{\kappa^2 q^2} (H-\zeta) \quad (\text{A.3})$$

$$B = -\frac{2g \cos \theta}{\kappa^3 q^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma(\chi) = \left[ (1-\chi) \ln(1-\chi) \right]^{-2} \quad (\text{A.5})$$

Las soluciones de la ecuación A.2 se muestran en la ilustración A.1 para los valores:  $\kappa > 0$  en el primer cuadrante del sistema coordenado  $[\chi, \gamma(\chi)]$ ;  $\kappa < 0$  en el segundo. Las rectas de pendiente  $\pm B$  intersectan a la curva de ecuación A.2 en dos puntos de cada cuadrante:  $\chi^\pm$  en régimen subcrítico,  $\chi_0^\pm$  en supercrítico.

Sólo el punto  $\chi_c^\pm$  corresponde a la condición crítica y ésta se obtiene de la derivada de la ecuación (A.5) de la siguiente manera:

$$\frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} = -2[(1-\chi)\ln(1-\chi)]^{-3} \left[ -\frac{1-\chi}{1-\chi} - \ln(1-\chi) \right]$$

o bien:

$$\frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} = \frac{2[1+\ln(1-\chi)]}{[(1-\chi)\ln(1-\chi)]^3} \quad (\text{A.6})$$

Para valores positivos de  $\kappa$  el valor mínimo de  $\gamma(\chi)$  se alcanza cuando  $d\gamma(\chi)/d\chi = 0$ , lo que ocurre para  $\chi = 0.6321$ , como se muestra en la ilustración A.1.

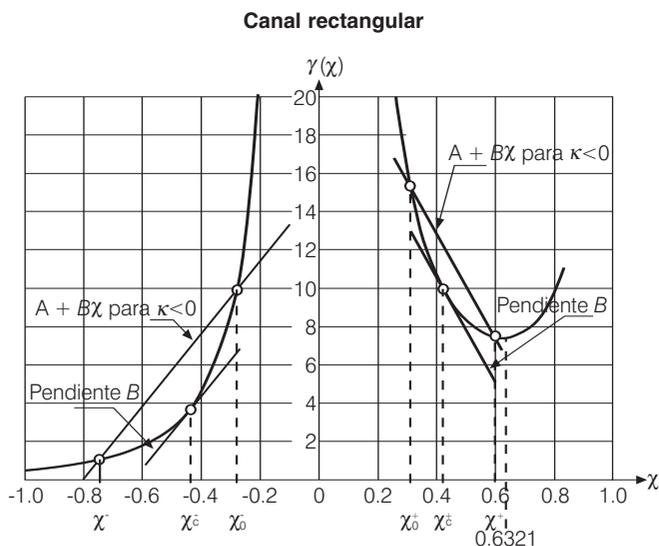
El número de Froude para el canal rectangular está dado por la ecuación (13), donde se sustituye  $u_0$  tomado de la ecuación (7) y resulta:

$$\mathcal{F} = -\frac{q\kappa/\ln(1-\chi)}{\sqrt{gdcos\theta}}$$

Cuando ocurre el estado crítico  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$  y de la ecuación (14) se obtiene:

$$-\frac{\kappa q/\ln(1-\chi)}{\sqrt{gdcos\theta}} = \left[ -\frac{(1-\chi)^3 \ln(1-\chi)}{\chi [\ln(1-\chi)+1]} \right]^{-1/2}$$

**Ilustración A.1. Solución de  $\gamma(\chi) = A + B\chi$ ;  $\chi^\pm$  subcrítico,  $\chi_c^\pm$  crítico,  $\chi_0^\pm$  supercrítico.**



Al elevar al cuadrado, sustituir  $d = \chi/\kappa$  y obtener el recíproco de los términos, para  $\kappa > 0$  ( $\chi > 0$ ), resulta:

$$\frac{2g\cos\theta}{\kappa^3 q^2} \chi = -\frac{2[1+\ln(1-\chi)]}{[(1-\chi)\ln(1-\chi)]^3} \chi$$

O bien, de las ecuaciones (A.4) y (A.6), la anterior se convierte en:

$$-B = \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi}$$

Cuando  $\kappa < 0$  ( $\chi < 0$ ) se invierte el signo de  $B$ , de manera que cuando  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$  se cumple que:

$$\frac{1}{|B|} \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} = 1$$

cualquiera que sea el signo de  $\kappa$ .

Se sustituye ahora la ecuación (A.5) en la (8) y la energía total se expresa en la forma:

$$H = \zeta + d\cos\theta + \gamma(\chi) \frac{q^2 \kappa^2}{2g} \quad (\text{A.8})$$

La curvatura  $\kappa$  en una determinada sección es constante e independiente de  $d$ , pero  $\theta$  es función de  $x$  y la derivada respecto de la coordenada  $x$  de la ecuación anterior resulta:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d\zeta}{dx} + \cos\theta \frac{dd}{dx} - d\sin\theta \frac{d\theta}{dx} \quad (\text{A.9})$$

$$+ \gamma(\chi) \frac{q^2 \kappa}{g} \frac{d\kappa}{dx} + \frac{q^2 \kappa^2}{2g} \frac{d\gamma(\chi)}{dx}$$

Debido a que:  $\kappa = 1/R$ ;  $R d\theta = \sqrt{(dx)^2 + (d\zeta)^2} = dx \sqrt{1 + (d\zeta/dx)^2}$ ; se tiene:

$$d\sin\theta \frac{d\theta}{dx} = \kappa d\sin\theta \sqrt{1 + \left( \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right)^2}$$

$$= \chi \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \chi \tan\theta = \chi \frac{d\zeta}{dx}$$

Por otra parte, vale también que:

$$\frac{dd}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\chi}{\kappa} \right) = \frac{1}{\kappa} \frac{d\chi}{dx} - \frac{\chi}{\kappa^2} \frac{d\kappa}{dx}$$

$$\frac{d\gamma(\chi)}{dx} = \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dx}$$

Al sustituir las tres últimas expresiones en la ecuación (A.9) y agrupar términos, se obtiene:

$$\frac{dH}{dx} = (1-\chi) \frac{d\zeta}{dx} + \left[ 1 + \frac{q^2 \kappa^3}{2g \cos \theta} \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} \right]$$

$$\frac{\cos \theta}{\kappa} \frac{d\chi}{dx} + \frac{q^2 \kappa}{2g} \left[ 2\gamma(\chi) - \frac{2g \cos \theta}{q^2 \kappa^3} \chi \right] \frac{d\kappa}{dx}$$

Pero de las ecuaciones (A.2) a (A.4) resulta:

$$\frac{dH}{dx} = (1-\chi) \frac{d\zeta}{dx} + \left[ 1 - \frac{1}{B} \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} \right] \frac{\cos \theta}{\kappa} \frac{d\chi}{dx} + \frac{q^2 \kappa}{2g}$$

$$\left[ 2A + 2B\chi + B\chi \right] \frac{d\kappa}{dx}$$

Cuando  $dH/dx = 0$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ , es decir, vale la ecuación (A.7); por tanto, la expresión anterior se convierte en:

$$(1-\chi_c) \frac{d\zeta}{dx} + \frac{q^2 \kappa}{2g} \left[ 2A + 3B\chi_c \right] \frac{d\kappa}{dx} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Se sustituyen los valores de A y B tomados de las ecuaciones (A.3) y (A.4) y se obtiene:

$$(1-\chi_c) \frac{d\zeta}{dx} + \frac{q^2 \kappa}{2g} \left[ \frac{4g}{q^2 \kappa^2} (H-\zeta) - \frac{6g \cos \theta}{q^2 \kappa^3} \chi_c \right] \frac{d\kappa}{dx} = 0$$

que al simplificar resulta:

$$(1-\chi_c) \frac{d\zeta}{dx} + \left[ \frac{2H_d^2}{\kappa H_d} \left( \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right) - \frac{3 \cos \theta}{(\kappa H_d)^2} H_d^2 \chi_c \right] \frac{d\kappa}{dx} = 0$$

Finalmente, en términos adimensionales vale la expresión:

$$(1-\chi_c) \frac{d\zeta}{dx} + \left[ 2 \left( \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right) - \frac{3 \cos \theta}{\kappa H_d} \chi_c \right] \frac{H_d^2}{\kappa H_d} \frac{d\kappa}{dx} = 0 \quad (\text{A.11})$$

que es la condición que debe cumplirse para encontrar la posición de la sección crítica e igual a la ecuación (18) del texto.

## Simbología

$b$	longitud de cresta del cimacio, en m
$d$	tirante medido en dirección perpendicular al fondo, en m
$d_c$	tirante en la sección crítica, en m
$g$	aceleración de la gravedad, en m/s <sup>2</sup>
$h_e$	pérdida de energía entre la existente aguas arriba del cimacio y la energía crítica, en m
$p_0$	presión en el fondo de cualquier sección perpendicular al fondo, en N/m <sup>2</sup>
$q$	gasto unitario sobre la cresta ( $Q/b$ ), en m <sup>2</sup> /s
$u_0$	componente de la velocidad local en el fondo de la sección, en dirección tangente a dicho fondo, en m/s
$x$	coordenada horizontal, cuyo valor cero coincide con la cresta del cimacio, en m
$C$	coeficiente de descarga del cimacio, en m <sup>1/2</sup> /s
$F$	parámetro adimensional relacionado con el flujo y la geometría del cimacio, según ecuación (3)
$H$	energía total del flujo (carga) respecto de un plano horizontal que pasa por la cresta, en m
$H_d$	carga sobre la cresta (energía total del flujo) elegida para el diseño del perfil geométrico del cimacio, en m
$H_0$	carga sobre la cresta con que opera el cimacio para verter el gasto $Q$ , medida como el desnivel entre la superficie libre aguas arriba y la cresta del mismo cimacio
$Q$	gasto de operación vertido sobre el cimacio, en m <sup>3</sup> /s
$\epsilon$	coeficiente de pérdida de energía entre la que existe aguas arriba del cimacio y la cresta del mismo, sin dimensiones
$\kappa$	curvatura del fondo de la sección, en m <sup>-1</sup>
$\rho$	densidad del agua, en kg/m <sup>3</sup>
$\theta$	ángulo de inclinación de la tangente al perfil del cimacio en una sección cualquiera perpendicular al fondo
$\chi$	variable adimensional equivalente a $\kappa d$
$\chi_c$	valor de $\chi$ en la sección crítica
$\zeta$	coordenada vertical cuyo valor cero coincide con la cresta del cimacio, en m
$\zeta_c$	desnivel entre la cresta y el fondo de la sección crítica, en m

Recibido: 25/06/2004  
Aprobado: 11/05/2005

## Referencias

- BELANGER, J. B. CH., *Notes sur le cours d'hydraulique*. Memories cole Nationale des Ponts et Chaussées, 1849-1850, pp. 32-33.
- DRESSLER, Robert F., New nonlinear shallow-flow equations with curvature, *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, 1978, vol.16, num. 3, pp. 205-222.
- FAWER, C. *Etude de quelques écoulements permanent à filets courbes*, Tesis Université de Laussane, Laussane, 1937.
- JAEGER, Charles. *Engineering Fluid Mechanics*, Traducción de la edición en alemán de 1949. Londres, Glasgow. Blackie & Son Limited, 1949, 529 pp.
- KNAPP F. H. *Überfall und Durchfluss im Wasserbau*. Karlsruhe, Verlag G. Braun, 1960, 671 pp.
- PRÁSIL, Franz. *Technische Hydrodynamik*, Segunda edición, Berlín, Springer Verlag, 1926.
- SIVAKUMARAN, S. S., T. TINGSANCHALI, R. J., HOSKING. Steady shallow flow over a spillway, *Journal of fluid mechanics*, 1981, núm. 111, pp. 411-420.
- SOTELO, G. y C., ESCALANTE. Ecuaciones generales del flujo impermanente en canales de fondo curvo. *Ingeniería Hidráulica en México*. Segunda Época, abril-junio, 2001 a, vol. XVI, núm. 2, pp. 27-42.
- SOTELO, G. y C., ESCALANTE. Ecuaciones del flujo impermanente en canales trapeciales de fondo curvo. *Ingeniería hidráulica en México*. Segunda Época, octubre-diciembre, 2001 b, vol. XVI, núm. 4, pp. 45-51.
- SOTELO, G. Flujo crítico en canales trapeciales de fondo curvo. *Ingeniería hidráulica en México*. Segunda Época, enero-marzo, 2004, vol. XIX, núm. 1, pp. 27-40.
- US ARMY CORPS OF ENGINEERS, *Corps of Engineers. Hydraulic Design Criteria*, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Miss., 1978.

**Abstract**

SOTELO-ÁVILA, G. *Flow profile on an overflow spillway and its verification*. Hydraulic engineering in Mexico (in Spanish). Vol. XXI, no. 1, January-March, 2006, pp. 29-42.

*Many authors have shown different approaches to predict the flow profile and the pressure distributions of water flowing on an overflow spillway. The authors have used flow nets, simplified hypothesis in the potential theory, the shallow-flow equations with curvature by Dressler and other procedures based on the theory of vortex-free flow. Author shows the application of the theory of flow on a curved bed allows predicting the location of the critical section around the crest, the flow profile and the pressure distribution when the shape of the spillway is known.*

**Keywords:** *overflow spillways, curvilinear flow over a spillway.*

**Dirección institucional del autor:**

*Dr. Gilberto Sotelo-Ávila*

Doctor en Ingeniería.  
Profesor Emérito.  
Universidad Nacional Autónoma de México,  
Facultad de Ingeniería,  
División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica,  
Departamento de Ingeniería Hidráulica,  
Ciudad Universitaria, Circuito Exterior,  
Coyoacán, 04510, México, D. F. México,  
teléfono: + (52) (55) 56 22 80 11,  
fax: + (52) (55) 55 50 77 09,  
sotelo@servidor.unam.mx