

LONGITUD DE MEZCLA HIPERBÓLICA, PERFIL DE LAS VELOCIDADES Y LEY DE RESISTENCIA AL FLUJO

• Carlos Fuentes •
Universidad Autónoma de Querétaro, México

Resumen

Considerando que el esfuerzo cortante total en el flujo del agua resulta de la suma de un esfuerzo viscoso y uno turbulento, se introduce una longitud de mezcla hiperbólica en la hipótesis de Newton para describir la relación entre el esfuerzo cortante total y la derivada del perfil medio de las velocidades. La longitud hiperbólica se reduce a la longitud de mezcla de Prandtl, que es proporcional a la distancia a la pared cuando ésta es grande. La existencia de un punto de inflexión en el perfil de las velocidades induce un valor teórico de la constante de von Kármán muy cercano a su valor experimental. Con este perfil se deducen fórmulas para las velocidades medias del fluido en un tubo y en un canal rectangular; de éstas se deducen las leyes de resistencia al flujo. La ley de resistencia en el tubo llevada a la forma de Darcy-Weisbach indica que el factor de fricción presenta los comportamientos extremos de Poiseuille y de Prandtl. La rugosidad de la pared a altos números de Reynolds se introduce siguiendo la idea de Colebrook y White, al adicionar a la escala de la turbulencia otra proporcional al tamaño de los granos de arena de Nikuradse; el factor de fricción tiene el mismo comportamiento que el mostrado en el diagrama de Moody. La escala dependerá del número de Reynolds en régimen transitorio de acuerdo con los resultados experimentales de Nikuradse, y su dependencia a pequeños y moderados valores del número de Reynolds y de la rugosidad es un sujeto de estudio.

Palabras clave: un valor teórico de la constante de von Kármán, efectos de la rugosidad de la pared.

Introducción

En hidráulica de canales y tuberías, hidrología superficial, ingeniería de riego y drenaje, entre otras disciplinas, es de fundamental importancia la utilización de una ley de resistencia al flujo para estimar la fuerza de fricción. La ley de resistencia relaciona la pendiente de fricción (J) con la velocidad media (U) y el radio hidráulico (R_h) (Du Buat, 1786; Trueba-Coronel, 1954).

En flujo a superficie libre es común utilizar la ley en potencia $U = cR_h^b J^d$, que incluye las leyes extremas en flujo turbulento de Chézy (1776) ($b = 1/2$, $d = 1/2$) y en flujo laminar de Poiseuille (1840, 1841) ($b = 2$, $d = 1$) originalmente obtenida en tubos capilares. En un estudio

sobre el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant (1871) y de Richards (1931) en el riego por gravedad en un canal rectangular muy ancho, donde $R_h = h$, siendo h el tirante de agua, Fuentes *et al.* (2004) establecen que la singularidad presente en el tiempo inicial requiere que los exponentes estén relacionados por $b = 3d - 1$. Esta relación es exactamente satisfecha por las leyes de Chézy y Poiseuille, aproximadamente por la ley de Hazen-Williams ($b = 0.63$, $d = 0.54$) utilizada en el diseño de redes de tuberías (King *et al.*, 1952) y claramente la ley de Manning (1891) ($b = 2/3$, $d = 1/2$) es excluida por la singularidad.

La ley de resistencia en potencia que satisface la singularidad, haciendo intervenir

el coeficiente de viscosidad cinemática (ν) y la aceleración gravitacional (g), puede ser escrita como $U = k\nu^{1-2d}h^{3d-1}(gJ)^d$, donde $1/2 \leq d \leq 1$ y k es un coeficiente empírico; la expresión para el caudal unitario es $q = Uh = k\nu(h^3gJ/\nu^2)^d$. Una posible limitación en la aplicación de esta ley es la dependencia de d con respecto al número de Reynolds (1883) (Re), $d \rightarrow 1$ cuando $Re \rightarrow 0$ y $d \rightarrow 1/2$ cuando $Re \rightarrow \infty$. Por ejemplo, en el riego por gravedad es usual aportar un caudal constante, la presencia de un sumidero (infiltración del agua en el suelo) induce que el caudal sea nulo en el frente de onda, y puesto que $Re \propto q$, es claro que Re varía desde cero hasta un valor máximo proporcional al caudal unitario de aporte.

Existen investigaciones experimentales y teóricas sobre la dependencia de este exponente con respecto al número de Reynolds. En efecto, introduciendo el esfuerzo cortante en la pared $\tau_p = \rho g R_p J$ se definen las escalas de velocidad (u_*) y longitud (λ_c) siguientes:

$$u_* = \sqrt{\tau_p/\rho}; \quad \lambda_c = \nu/u_* \quad (1)$$

donde ρ es la densidad del agua y u_* es denominada la velocidad de fricción.

Con las escalas de la ecuación (1), la ley en potencia adquiere la forma $U/u_* = k(h/\lambda_c)^\delta$, donde $0 \leq \delta = 2d - 1 \leq 1$. Ésta puede ser deducida aceptando que el perfil de las velocidades medias en potencia $u(y) = k_\delta u_* (y/\lambda_c)^\delta$ es válido en todo el dominio $0 \leq y \leq h$, a partir de la expresión que define el caudal unitario:

$$q = hU_C = \int_0^h u(y) dy \quad (2)$$

con $k_\delta = k(1 + \delta)$ y en donde se ha agregado el subíndice C , para denotar que se trata de la velocidad media en un canal rectangular muy ancho. Para el caudal en un tubo se tiene:

$$Q = \pi R^2 U_T = \int_0^R u(y) 2\pi(R-y) dy \quad (3)$$

De acuerdo con las experiencias en tubos llevadas a cabo por Nikuradse, los parámetros k_δ y δ varían con el número de Reynolds (Re). En tubos lisos y para $5 \times 10^3 < Re < 10^5$, Blasius propone $k_\delta = 8.74$ y $\delta = 1/7$ (Sotelo-Ávila, 1974). Barenblatt (1993) y Barenblatt y Prostokishin (1993) argumentan que el comportamiento asintótico ($Re \rightarrow \infty$) de k_δ y δ puede ser $k_\delta = k_1/\varepsilon + k_2 + k_3\varepsilon + \dots$ y $\delta = \delta_1\varepsilon + \delta_2\varepsilon^2 + \delta_3\varepsilon^3 + \dots$, donde $\varepsilon = 1/h(Re)$ y sugieren, a partir de los datos de Nikuradse, los valores empíricos $k_1 = 0.577$, $k_2 = 2.50$ y $\delta_1 = 1.5$, y nulos el resto de los coeficientes. Zagorola y Smits (1997), con nuevos datos sugieren $k_1 = 0.7053$, $k_2 = 0.3055$, $\delta_1 = 1.085$, $\delta_2 = 6.535$, y nulos el resto de los coeficientes, para el rango del número de Reynolds de 3.1×10^4 a 3.5×10^7 . La dependencia de δ con respecto al número de Reynolds pequeños no es bien conocida.

La aplicabilidad de la ley de resistencia en potencia es posiblemente limitada, ya que la variación del exponente en la vecindad del régimen laminar no es plenamente conocida. Ante esta dificultad se investiga la posibilidad de extender la ley de resistencia que resulta del perfil logarítmico de las velocidades de Prandtl a números de Reynolds pequeños.

En el flujo turbulento cercano a la pared se distinguen tres regiones principales (e.g. Dally y Harleman, 1969; White, 1979): a) la región interior, donde los esfuerzos viscosos son dominantes, también denominada subcapa viscosa; b) la región exterior, donde los esfuerzos turbulentos son dominantes, y c) la región intermedia o capa de solape, donde ambos tipos de esfuerzos son importantes. En la supcapa viscosa, la velocidad es una función básicamente lineal de la distancia a la pared: $u/u_* = y/\lambda_c$ cuando $0 < y/\lambda_c < 4$. La región exterior sigue una ley de deflexión $(u_{\text{máx}} - u)/u_* = G(y/\delta)$, donde $u_{\text{máx}}$ es la velocidad máxima ubicada en el espesor de la capa límite δ , generalmente asimilada al radio R en un tubo. En la capa intermedia se ha argumentado que la velocidad sigue una ley logarítmica (Sotelo-Ávila, 1974):

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{\gamma \lambda_c} \right) \quad (4)$$

donde κ y γ son dos parámetros empíricos adimensionales. El parámetro κ es conocido como la constante de von Kármán.

Los valores experimentales reportados en la literatura se encuentran alrededor de los valores medios $k \cong 0.4$ y $\gamma \cong 0.13$; algunos autores señala que en particular la constante de von Kármán puede depender del número de Reynolds (e.g. Daily y Harleman, 1966; Landau y Lifchitz, 1989). Un análisis sobre el sujeto se hace ulteriormente.

La ley logarítmica es válida experimentalmente cuando $y/\lambda_c > 30$ a 70 , $y/\delta > 0.15$. En cuanto a la función G , en la ley de deflexión se ha argumentado experimentalmente que es una función logarítmica: $(u_{\text{máx}} - u)/u_* = -\kappa^{-1} \ln(y/\delta) + B$, donde B es una constante.

Considerando que la ley de deflexión puede ser incluida aproximadamente por la ecuación haciendo $B \approx 0$, y que la contribución al caudal por la subcapa viscosa es despreciable, la velocidad media se obtiene, a pesar de que la velocidad calculada en la pared es $u(0) = -\infty$ en lugar de cero, como el valor principal en el sentido de Cauchy de las integrales que definen el caudal en las ecuaciones (2) y (3). La forma general es la siguiente:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{h}{\beta \lambda_c} \right) \quad (5)$$

donde $\beta = \gamma e \cong 0.35$ en el canal; $\beta = \gamma e^{3/2} \cong 0.58$ en un tubo de radio R completamente lleno, h se reemplaza por R .

Es claro que la ecuación (5) no es aplicable cuando $h = 0$ o $R = 0$, ya que proporciona $U(0) = -\infty$ en lugar de cero. Este comportamiento de la velocidad media y del perfil de las velocidades se debe a que en la deducción de la ecuación (4) se desprecia la fricción debida a la viscosidad frente a la fricción por la turbulencia. No obstante, la ley de resistencia al flujo representa

adecuadamente los datos experimentales para altos números de Reynolds.

El objetivo de este trabajo es la extensión del perfil logarítmico de las velocidades, a fin de obtener el comportamiento correcto en la pared y su vecindad, para establecer la ley de resistencia, que incluya la ley de Poiseuille cuando el número de Reynolds sea pequeño.

Longitud de mezcla hiperbólica

Para alcanzar el objetivo es necesario recordar que la ley de Newton, válida en régimen laminar, establece que el esfuerzo cortante (τ) y el gradiente vertical de las velocidades horizontales son proporcionales, es decir:

$$\tau = \rho \nu \frac{du}{dy} \quad (6)$$

donde $\rho \nu = \mu$ es el coeficiente de viscosidad dinámica.

El perfil parabólico se obtiene tomando en cuenta que el esfuerzo cortante varía linealmente, siendo nulo en la superficie libre del agua o en el centro del tubo, y adquiriendo su valor máximo en la pared (τ_p), es decir:

$$\tau = \tau_p (1 - y/h) \quad (7)$$

el perfil de velocidades resultante es el siguiente:

$$u = \frac{1}{\nu} u_*^2 \left(y - \frac{y^2}{2h} \right) \quad (8)$$

Las velocidades medias en el canal y el tubo se obtienen introduciendo la ecuación en las ecuaciones (2) y (3):

$$U_C = \frac{1}{3\nu} h^2 g J \quad (9)$$

$$U_T = \frac{1}{8\nu} R^2 g J \quad (10)$$

En régimen turbulento, el cortante, según las hipótesis de Reynolds, es definido por

la media del producto de las fluctuaciones alrededor de las medias de las velocidades en el sentido horizontal (u') y en el sentido vertical (v'), es decir (Landau y Lifchitz, 1989):

$$\tau = -\rho \langle u'v' \rangle \quad (11)$$

Para la modelación del cortante turbulento citemos textualmente a Levi (1989): “En la teoría cinética de los gases se había utilizado un concepto importante: el de ‘camino libre medio’. Análogamente, Prandtl introduce una longitud característica capaz de definir el estado de turbulencia, longitud que se podría interpretar como la distancia que una partícula fluida recorre sin perder su individualidad al mezclarse con sus vecinas, o bien como el diámetro de los agregados de partículas que avanzan juntas; distancia y diámetro que —cuando el número de Reynolds es bastante grande— tendrían que ser proporcionales entre sí, pues la energía cinética de la masa debe ser igual al trabajo realizado por las partículas para vencer la resistencia a su avance que las vecinas oponen. A esta longitud característica, Prandtl la llama ‘longitud de mezcla’ (Mischungsweg) y la representa con la letra ℓ , basándose en la hipótesis de que, en un movimiento dirigido en promedio según el eje x (o sea $\bar{v} = 0$), las partículas fluidas tienden a abandonar la capa a la cual pertenecen y —luego de cruzar, paralelamente al eje y , la distancia ℓ — alcanzan otra posición, donde la velocidad media es distinta de la que la partícula poseía originalmente. Ahora, por ser ℓ muy pequeña, la diferencia de velocidades \bar{u} entre la capa de salida y la de llegada es $\ell \partial \bar{u} / \partial y$; y esta expresión representaría —para Prandtl— la fluctuación de velocidad $u' = \ell \partial \bar{u} / \partial y$. Como otras partículas se mueven de manera análoga en dirección opuesta, habrá choque de masas fluidas con valores contrarios de u' ; por tanto nacerán fluctuaciones v' (en el sentido transversal) del mismo orden de magnitud que u' . En conclusión, el esfuerzo aparente $-\rho \langle u'v' \rangle$ será proporcional a $\rho \ell^2 (\partial \bar{u} / \partial y)^2$. Para establecer la igualdad, Prandtl (1925)

propone que el coeficiente de proporcionalidad sea absorbido por la longitud de mezcla, y escribir:

$$\tau = \rho \ell_p^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy} \quad (12)$$

en la cual se ha introducido el subíndice P a la longitud de mezcla de Prandtl; se ha eliminado la barra que denota el perfil de las velocidades medias; se han reemplazado las derivadas parciales por las totales, y se ha introducido la función valor absoluto para que el signo quede determinado por du/dy .

El perfil logarítmico de las velocidades, definido por la ecuación (4), se obtiene de la ecuación (12), bajo el supuesto de que el esfuerzo cortante es una constante e igual a su valor en la pared ($\tau = \tau_p = \rho u_*^2$) y que la longitud de mezcla en un punto dado es proporcional a la distancia a la pared: $\ell_p = \kappa y$. Como se ha visto, la ecuación (12) no es aplicable en la pared debido a que se han despreciado los efectos viscosos. Lo anterior puede ser corregido, considerando que el esfuerzo cortante es el resultado de los efectos viscosos y turbulentos, es decir:

$$\tau = \tau_{\text{visc}} + \tau_{\text{turb}} \quad (13)$$

La sustitución de las ecuaciones (6) y (12) en la ecuación (13) conduce a:

$$\tau = \rho \left(v + \ell_p^2 \frac{du}{dy} \right) \frac{du}{dy} \quad (14)$$

La ecuación (14) se escribe bajo la forma de la hipótesis de Newton, reemplazando el coeficiente de viscosidad cinemática en la ecuación (6) por un coeficiente de ‘viscosidad cinemática total’ (v_t), a saber (Newton, 1985):

$$\tau = \rho v_t \frac{du}{dy} \quad (15)$$

en la cual $v_t = v + v_{\text{turb}}$ y $v_{\text{turb}} = \ell_p^2 du/dy$, es decir la ‘viscosidad cinemática turbulenta’ es proporcional a $u' \ell_p$.

De acuerdo con la ecuación (1), se define una longitud de mezcla total como $\lambda = v_t/u_*$, de modo que $\lambda = \lambda_c$ cuando $v_t = v$. En consecuencia, las ecuaciones (6), (12) y (15) se escriben de manera adimensional, introduciendo las variables adimensionales $y_+ = y/\lambda_c$, $u_+ = u/u_*$, $\tau_+ = \tau/\tau_p$, $\lambda_+ = \lambda/\lambda_c = v_t/v$, a saber:

$$\tau_+ = \lambda_+ \frac{du_+}{dy_+}; \quad \tau_{\text{visc}+} = \frac{du_+}{dy_+}; \quad \tau_{\text{turb}+} = \ell_{P+}^2 \left| \frac{du_+}{dy_+} \right| \frac{du_+}{dy_+} \quad (16)$$

donde $\tau_{\text{visc}+} = \tau_{\text{visc}}/\tau_p$, $\tau_{\text{turb}+} = \tau_{\text{turb}}/\tau_p$, $\ell_{P+} = \ell_p/\lambda_c$.

Puesto que $v_t = v\lambda/\lambda_c = u_*\lambda$, se tendrá $u_*\lambda = v + \ell_p^2 du/dy$, o en escritura adimensional $\lambda_+ = 1 + \ell_{P+}^2 du_+/dy_+$, y considerando la ecuación (16) se tiene $\lambda_+ = 1 + \ell_{P+}^2 \tau_+/\lambda_+$. De esta última se deduce:

$$\ell_+^2 = \lambda_+(\lambda_+ - 1); \quad \ell_+^2 = \ell_{P+}^2 \tau_+ \quad (17)$$

donde $\ell_+ = \ell/\lambda_c$ con ℓ una longitud de mezcla efectiva, que coincide con la longitud de mezcla de Prandtl cuando $\tau = \tau_p$.

Las relaciones entre los diferentes esfuerzos cortantes se deducen de las ecuaciones (16) y (17), a saber:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{visc}+} &= (1/\lambda_+) \tau_+; & \tau_{\text{turb}+} &= (1 - 1/\lambda_+) \tau_+; \\ \tau_{\text{visc}+} + \tau_{\text{turb}+} &= \tau_+ \end{aligned} \quad (18)$$

Para $\tau_+ = 1$ y cuando $y \gg \lambda_c$ según Prandtl se tiene $\ell \sim \kappa y$, y de la ecuación (17) se infiere también $\lambda \sim \kappa y$ ($\lambda_+ = \lambda/\lambda_c \gg 1$); en la pared ($y = 0$) se tiene $\lambda = \lambda_c$ ($\lambda_+ = 1$). Se propone unir estos comportamientos a través de la hipérbola $\lambda_+^2 = 1 + by_+ + (\kappa y_+)^2$. Para que existan las inestabilidades que originan la turbulencia se acepta que el perfil de velocidades presente un punto de inflexión a una distancia $y_+ > 0$ de la pared (Landau y Lifchitz, 1989).

De la ecuación (16) se deduce $d^2u_+/dy_+^2 = -(1/\lambda_+^2)d\lambda_+/dy_+$ para $\tau_+ = 1$, y en consecuencia $d\lambda_+/dy_+ = 0$ en un punto cercano a la pared. La hipérbola en cuestión presenta un mínimo

en $y_+ = -b/2\kappa^2$, implicando $b < 0$. Haciendo $b = -2\kappa\alpha$ con $\alpha > 0$, la ecuación de la hipérbola se escribe como sigue:

$$\lambda_+(y_+) = \sqrt{1 - \alpha^2 + (\kappa y_+ - \alpha)^2} \quad (19)$$

El punto mínimo de la hipérbola queda definido por $y_{m+} = \alpha/\kappa$, $\lambda_{m+} = \sqrt{1 - \alpha^2}$, y se tiene que $\lambda_+ = 1$ tanto en la pared como a una distancia $y_{f+} = 2y_{m+}$ de la misma, por consiguiente $\lambda_{m+} \leq \lambda_+ \leq 1$ en el intervalo $0 \leq y_+ \leq y_{f+}$.

De acuerdo con la ecuación (17), en el intervalo $0 \leq y_+ \leq y_{f+}$, se tiene $\ell_+^2 = -\lambda_+(1 - \lambda_+) \leq 0$, es decir que ℓ_+ es imaginaria, ya que $\lambda_{m+} \leq \lambda_+ \leq 1$. Esto se traduce en que el esfuerzo cortante turbulento definido en la ecuación (18) cambia de signo en esta región vecina a la pared. El hecho de que ℓ_+ es imaginaria puede ser interpretado considerando que partículas de fluido en el plano xy , donde x es la dirección principal del flujo, son transferidas a otro plano $x'y'$ paralelo al anterior; otras partículas llegan al plano xy procedentes de planos paralelos, de modo que la masa se conserva en cada plano. La igualdad $\tau_{\text{visc}+} = \tau_{\text{turb}+}$ se da cuando $\lambda_+ = 2$ y corresponde a $y_{vt+} = (1 + \sqrt{1 + 3/\alpha^2})y_{m+}$.

Un valor teórico de la constante de von Kármán

Los valores de los parámetros α y κ pueden ser estimados bajo algunas consideraciones. Derivando la ecuación (17) se obtiene:

$$\ell_+ \frac{d\ell_+}{dy_+} = (\lambda_+ - \frac{1}{2}) \frac{d\lambda_+}{dy_+} \quad (20)$$

Ahora bien, el punto mínimo de la longitud de mezcla hiperbólica $d\lambda_+/dy_+|_{y_{m+}} = 0$ implica que $d\ell_+/dy_+|_{y_{m+}} = 0$. De acuerdo con la ecuación (20), este resultado se obtiene también si $\lambda_{m+} = 1/2$, lo que implica $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cong 0.8660$. De la ecuaciones (16) y (17) se deduce que en el punto crítico se tiene $\ell_{m+}^2 = -1/4$ o sea $\ell_{m+} = \pm 1/2i$, $\tau_{\text{visc}+} = 2\tau_+$ y $\tau_{\text{turb}+} = -\tau_+$.

En la región $0 < y < y_f$, las escalas importantes son precisamente las que forman el punto crítico (y_m, λ_m) ; la primera caracteriza una masa crítica y la segunda es una longitud de mezcla crítica que caracteriza las inestabilidades que originan la turbulencia. Haciendo intervenir la viscosidad cinemática, el análisis dimensional proporciona las velocidades correspondientes $u_m = v/y_m$ y $v_m = v/\lambda_m$, así como el cortante en la pared $\tau_p = \rho u_m v_m$; este cortante tiene la forma de aquel definido por la ecuación (11). Dado que $\tau_p = \rho u_m^2$, ecuación (1), se tiene $u_m^2 = u_m v_m$ y $\lambda_m^2 = y_m \lambda_m$, es decir, en escritura adimensional $u_m v_m = 1$ y $y_m \lambda_m = 1$. De modo que $\lambda_m = 1/2$ implica que $y_m = \alpha/\kappa = 2$, esto es $\kappa = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cong 0.4330$ y, ver ecuación (23), $\gamma = \frac{2}{3}\sqrt{3} - 1 \cong 0.1547$, valores muy cercanos a los reportados en la ecuación (4). Por la importancia de estos parámetros se establecen a continuación los valores resultantes del análisis precedente:

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cong 0.8660; \quad \kappa = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cong 0.4330; \quad (21)$$

$$\gamma = \frac{2}{3}\sqrt{3} - 1 \cong 0.1547$$

Es importante señalar que este valor teórico de la constante de von Kármán es muy cercano al valor obtenido por Zaragola (1996), a partir de ensayos realizados en el rango 3.1×10^4 a 3.5×10^7 del número de Reynolds más amplio que el rango estudiado por Nikuradse (1932, 1933) (Zaragola y Smits, 1997; McKeon *et al.*, 2004), a saber: $\kappa \cong 0.436$.

Con los valores de α y κ definidos por la ecuación (21) se deduce la frontera superior de la región crítica cercana a la pared $y_{f+} = 4$ y la distancia a la pared donde los esfuerzos viscoso y turbulento son iguales $y_{vt+} = 2(1 + \sqrt{5}) \cong 6.4721$. Es de notar que el valor de $y_{f+} = 4$ coincide con el valor experimental del espesor de la subcapa viscosa.

Las gráficas de la longitud de mezcla hiperbólica definida por la ecuación (19) y la asíntota $\kappa y_+ - \alpha$, con los valores de los parámetros proporcionados por la ecuación (21), se muestran en la figura 1.

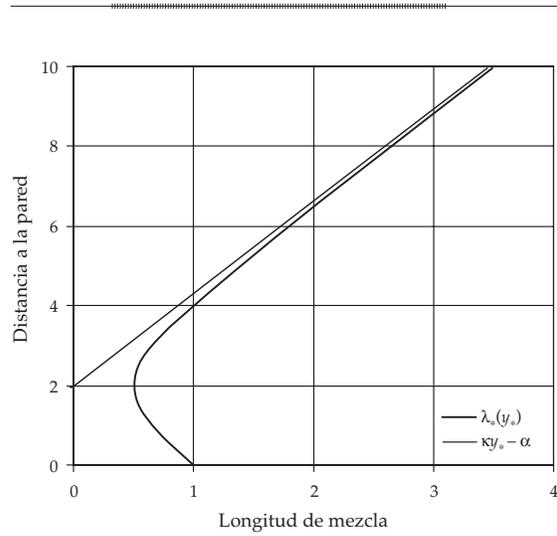


Figura 1. La longitud de mezcla hiperbólica, ecuación (19), y su asíntota. Los valores de las constantes son los definidos por la ecuación (21).

Perfil de las velocidades

El perfil de velocidades adimensional correspondiente a $\tau_+ = 1$ se obtiene de las ecuaciones (16) y (19), con la condición $u_+(0) = 0$, a saber:

$$u_{\infty+}(y_+) = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{\kappa y_+ - \alpha + \lambda_+(y_+)}{1 - \alpha} \right] \quad (22)$$

en donde se ha introducido la notación $u_{\infty+}(y_+)$ para indicar que $\tau_+ = 1$ se obtiene de la ecuación (8) cuando $h_+ \rightarrow \infty$.

Cuando $y_+ \gg 0$ la ecuación (22) tiene el comportamiento de la ecuación (4):

$$u_{\infty+}(y_+) = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{y_+}{\gamma} \right]; \quad \gamma = \frac{1 - \alpha}{2\kappa} \quad (23)$$

y cuando $y_+ \rightarrow 0$, su desarrollo es el siguiente:

$$u_{\infty+}(y_+) = y_+ + \frac{1}{2} \alpha \kappa y_+^2 + O(y_+^3) \quad (24)$$

el cual muestra el comportamiento lineal en la subcapa viscosa cerca de la pared (Panton, 1984).

El perfil adimensional de las velocidades correspondiente a la ecuación (7), $\tau_+ = 1 - y_+/h_+$, se obtiene de las ecuaciones (16) y (19), con la condición $u_+(0) = 0$, a saber:

$$u_+(y_+, h_+) = \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{\alpha}{\kappa h_+} \right) \ln \left[\frac{\kappa y_+ - \alpha + \lambda_+(y_+)}{1 - \alpha} \right] - \frac{1}{\kappa^2 h_+} [\lambda_+(y_+) - 1] \quad (25)$$

Es importante señalar que cuando y_+ es muy grande y en consecuencia también h_+ , ya que $0 < y_+ < h_+$, de la ecuación (25) se deduce el comportamiento $u_+(y_+, h_+) = \kappa^{-1}(1 - \alpha/\kappa h_+) \ln(y_+/\gamma)$. Escribiendo la ecuación (4) como $u_+ = \kappa_{vk}^{-1} \ln(y_+/\gamma)$, en donde se ha cambiado la notación para el parámetro original de von Kármán (κ_{vk}); es claro que $\kappa_{vk}^{-1} = \kappa^{-1}(1 - \alpha/\kappa h_+)$, la cual puede justificar la dependencia de dicho parámetro con respecto al número de Reynolds definido por $Re^* = h_+ = u_+ h / \nu$, argumentada por algunos autores cuando el perfil logarítmico es aplicado en flujos donde el esfuerzo cortante no puede ser considerado constante. Claramente, cuando $h_+ \rightarrow \infty$, la ecuación (25) se reduce a la ecuación (22).

El comportamiento de $u_+(y_+, h_+)$ cuando $y_+ \rightarrow 0$ es el siguiente:

$$u_+(y_+, h_+) = y_+ - (1 - \alpha \kappa h_+) \frac{y_+^2}{2h_+} + O(y_+^3) \quad (26)$$

en donde de nuevo aparece el comportamiento lineal en la subcapa viscosa.

El perfil parabólico correspondiente al régimen laminar y proporcionado por la ecuación (8) en escritura adimensional es $u_+ = y_+ - y_+^2/2h_+$, el cual se deduce de la ecuación (26) cuando $h_+ \rightarrow 0$.

La velocidad máxima ocurre a la distancia $y_+ = h_+$ de la pared; la diferencia entre esta velocidad y aquella en y_+ cercana a h_+ se calcula con las ecuaciones (22) y (25). Los resultados son las leyes de deflexión siguientes:

$$u_{\infty+}(h_+) - u_{\infty+}(y_+) \sim \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{h_+}{y_+} \right) \quad (27)$$

$$u_+(h_+, h_+) - u_+(y_+, h_+) \sim \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{\alpha}{\kappa h_+} \right) \ln \left(\frac{h_+}{y_+} \right) - \frac{1}{\kappa h_+} (h_+ - y_+) \quad (28)$$

donde la primera se deduce de la segunda haciendo $h_+ \rightarrow \infty$ y $h_+ - y_+ \rightarrow 0$.

Los perfiles de las velocidades definidos por la ecuación (22) y (25) se muestran en la figura 2, en los cuales se debe observar la existencia del punto de inflexión.

Velocidades medias

Se obtienen a continuación las expresiones de la velocidad media del agua en un tubo completamente lleno y en un canal rectangular muy ancho.

Tubo. La velocidad media adimensional para $\tau_+ = 1$ se obtiene introduciendo la ecuación (22) en la ecuación (3):

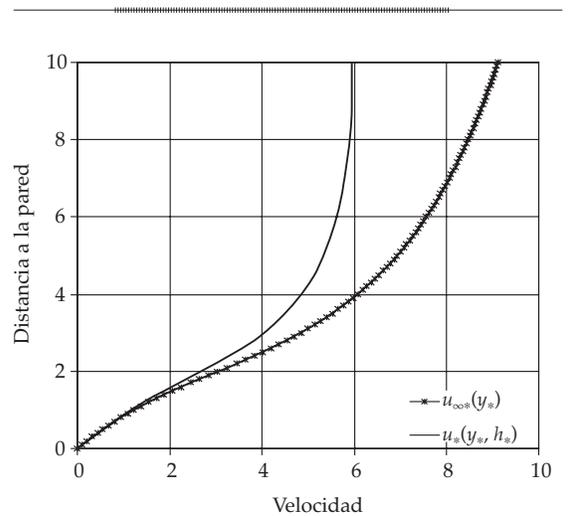


Figura 2. El perfil de las velocidades, ecuaciones (22) y (25), considerando esfuerzos cortantes constante y lineal. Los valores de las constantes son los definidos por la ecuación (21).

$$U_{T_{\infty+}}(R_+) = \frac{1}{\kappa} \left[2 \left(1 - \frac{\alpha}{\kappa R_+} \right) - \left(1 + \frac{1 - \alpha^2}{2\kappa^2 R_+^2} \right) \ln \left[\frac{\kappa R_+ - \alpha + \lambda_+(R_+)}{1 - \alpha} \right] + \frac{1}{2\kappa^3 R_+^2} [(\kappa R_+ + 3\alpha)\lambda_+(R_+) - 3\alpha] - \frac{2}{\kappa^2 R_+} [\lambda_+(R_+) - 1] \right] \quad (29)$$

Los comportamientos de $U_{T_{\infty+}}(R_+)$, cuando $R_+ \rightarrow 0$ y $R_+ \rightarrow \infty$ son, respectivamente, los siguientes:

$$U_{T_{\infty+}}(R_+) = \frac{1}{3} R_+ + O(R_+^2) \quad (30)$$

$$U_{T_{\infty+}}(R_+) = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{R_+}{\gamma e^{3/2}} \right) \quad (31)$$

la ecuación (31) corresponde a la ecuación (5).

La velocidad media adimensional para $\tau_+ = 1 - y_+/R_+$, se deduce de las ecuaciones (3) y (25):

$$U_{T_+}(R_+) = \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{\alpha}{\kappa R_+} \right) \left[2 \left(1 - \frac{\alpha}{\kappa R_+} \right) - \left(1 + \frac{3 - 5\alpha^2}{2\kappa^2 R_+^2} \right) \ln \left[\frac{\kappa R_+ - \alpha + \lambda_+(R_+)}{1 - \alpha} \right] + \frac{1}{2\kappa^2 R_+} \left[\left(1 + 3 \frac{\alpha}{\kappa R_+} \right) \lambda_+(R_+) - 3 \frac{\alpha}{\kappa R_+} \right] - \frac{3}{\kappa^2 R_+} \left(1 - \frac{\alpha}{\kappa R_+} \right) [\lambda_+(R_+) - 1] + \frac{2}{3\kappa^4 R_+^3} [\lambda_+^3(R_+) - 1] + \frac{\alpha}{\kappa^3 R_+^2} \left[\left(1 - \frac{\alpha}{\kappa R_+} \right) \lambda_+(R_+) + \frac{\alpha}{\kappa R_+} \right] \right] \quad (32)$$

Los comportamientos de $U_{T_+}(R_+)$ cuando $R_+ \rightarrow 0$ y $R_+ \rightarrow \infty$ son, respectivamente, los siguientes:

$$U_{T_+}(R_+) = \frac{1}{4} R_+ + O(R_+^2) \quad (33)$$

$$U_{T_+}(R_+) = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{R_+}{\gamma e^{1/6}} \right) \quad (34)$$

En escritura adimensional, la ley de Poiseuille de los tubos capilares definida por la ecuación (10) es $U_{T_+}(R_+) = \frac{1}{4} R_+$, la cual se deduce precisamente de la ecuación (33).

Canal rectangular. La velocidad media adimensional para $\tau_+ = 1$ se obtiene introduciendo la ecuación (22) en la ecuación (2):

$$U_{C_{\infty+}}(h_+) = \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{\alpha}{\kappa h_+} \right) \ln \left[\frac{\kappa h_+ - \alpha + \lambda_+(h_+)}{1 - \alpha} \right] - \frac{1}{\kappa^2 h_+} [\lambda_+(h_+) - 1] \quad (35)$$

Los comportamientos de $U_{C_{\infty+}}(h_+)$ cuando $h_+ \rightarrow 0$ y $h_+ \rightarrow \infty$ son, respectivamente, los siguientes:

$$U_{C_{\infty+}}(h_+) = \frac{1}{2} h_+ + O(h_+^2) \quad (36)$$

$$U_{C_{\infty+}}(h_+) = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{h_+}{\gamma e} \right) \quad (37)$$

la ecuación (37) corresponde a la ecuación (5).

La velocidad media adimensional para $\tau_+ = 1 - y_+/h_+$ se obtiene introduciendo la ecuación (25) en la ecuación (2):

$$U_{C_+}(h_+) = \frac{1}{\kappa} \left[\left(1 - \frac{\alpha}{\kappa h_+} \right)^2 - \frac{1 - \alpha^2}{2\kappa^2 h_+^2} \ln \left[\frac{\kappa h_+ - \alpha + \lambda_+(h_+)}{1 - \alpha} \right] - \left(\frac{3}{2\kappa^2 h_+} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{\kappa h_+} \right) [\lambda_+(h_+) - 1] + \frac{1}{2\kappa^2 h_+} \right] \quad (38)$$

Los comportamientos de $U_{C_+}(h_+)$ cuando $h_+ \rightarrow 0$ y $h_+ \rightarrow \infty$ son, respectivamente, los siguientes:

$$U_{C+}(h_+) = \frac{1}{3}h_+ + O(h_+^2) \quad (39)$$

$$U_{C+}(h_+) = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{h_+}{\gamma e^{3/2}} \right) \quad (40)$$

En escritura dimensional, la ecuación (39) corresponde al régimen de Poiseuille sobre una placa plana, ecuación (9).

El factor de fricción

La teoría anterior es válida en paredes lisas. En paredes rugosas y a grandes números de Reynolds, la escala λ_c se reemplaza por la escala λ_{er} que caracteriza la rugosidad de la pared; siguiendo a Colebrook y White (Colebrook, 1939), en régimen intermedio, la escala λ_c se reemplaza por la escala λ_r , definida como $\lambda_t = \lambda_c + \lambda_{er}$.

A altos números de Reynolds, la escala λ_{er} es proporcional a la altura media de las rugosidades de la pared, tomada como la altura equivalente de granos de arena (ϵ) o escala de Nikuradse, es decir:

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \lambda_{er}(Re, \epsilon) = c\epsilon \quad (41)$$

donde c es un coeficiente de proporcionalidad.

En un tubo, la ley de resistencia se aplica utilizando el coeficiente de fricción de Fanning (f) definido en la ecuación de Darcy-Weisbach $J = fU^2/2gD$, donde D es el diámetro interno del tubo (Darcy, 1857; Darcy y Bazin, 1865; Weisbach, 1850). Considerando la velocidad de fricción, este coeficiente queda definido como $f = 8/U_+^2$. Reemplazando la escala λ_c por la escala $\lambda_t = \lambda_c + \lambda_{er}$ la relación entre el coeficiente de fricción, el número de Reynolds definido por $Re = UD/\nu$, y la escala relativa definida por $\lambda_{er} = \lambda_c/D$, se obtiene de la ecuación (29) o (32):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{2}}{4} U_{T+} \left(\frac{1}{2} \left[\frac{4}{\sqrt{2} Re \sqrt{f}} + \lambda_{er} \right]^{-1} \right) \quad (42)$$

donde $\lambda_{er} = c\epsilon$, cuando $Re \rightarrow \infty$ y $\epsilon_r = \epsilon/D$ es la rugosidad relativa de Nikuradse.

El parámetro c se estima a partir de la información obtenida por Nikuradse en sus experiencias realizadas en tubos con seis valores de rugosidad relativa a grandes números de Reynolds (Sotelo-Ávila, 1974). Los valores de $(\epsilon/D, f)$ se presentan en el cuadro 1; asimismo, se reportan los valores correspondientes de λ_{er}/D obtenidos utilizando en la ecuación (42) las ecuaciones (29) y (32) con $Re \rightarrow \infty$. La relación entre λ_{er}/D y ϵ/D se muestra en la figura 3. Para la ecuación (29), $c \cong 0.125$ con $R^2 = 0.9996$, mientras que para la ecuación (32), $c \cong 0.09$ con $R^2 = 0.9997$.

En la zona de transición, la función $\lambda_{er}(Re, \epsilon)$ es desconocida y podrá ser aproximada empíricamente a partir de los datos experimentales. Con la finalidad de que la función $f[Re, \lambda_{er}(Re, \epsilon)]$, que define al factor de fricción implícitamente a través de la ecuación (42), manifieste algunas de sus características, se tomará el comportamiento asintótico definido por la ecuación (41).

La función $f(Re, c\epsilon)$, mostrada en la figura 4 para los seis valores de la rugosidad relativa de Nikuradse, utiliza la ecuación (32). La función así construida no proporciona el comportamiento observado del factor de fricción en la zona de transición; su comportamiento asintótico es similar al del factor de fricción mostrado en el clásico diagrama de Moody (1944, 1947). Sin embargo, el diagrama de la figura 4 tiene la principal ventaja de que contiene como caso límite, a bajos números de Reynolds, al régimen laminar de Poiseuille para el cual $f = 64/Re$.

En el caso de tubos o canales rugosos, si la rugosidad de la pared se obtiene de manera inversa en un problema de flujo en régimen laminar o de transición, es posible que el valor no tenga ningún significado físico, por ejemplo, que sea del mismo orden que el del diámetro del tubo, debido a que $f(Re, c\epsilon)$ es aproximada en esta región de flujo. En esta situación, tal vez es mejor retener el valor obtenido de la escala $\lambda_{er}(Re, \epsilon)$, la cual estará

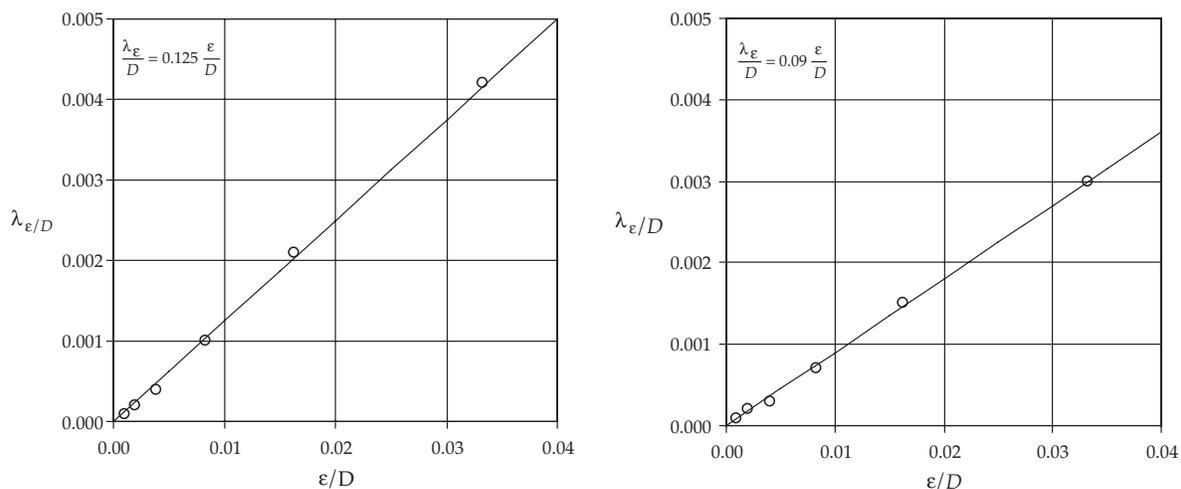


Figura 3. Relación entre la escala de rugosidad en la pared (λ_ϵ) relativa al diámetro del tubo (D), y la rugosidad relativa de los experimentos de Nikuradse (ϵ/D), ecuación (42): a) con la ecuación (29) ($\lambda_\epsilon/D \cong 0.125(\epsilon/D)$, con $R^2 = 0.9996$; b) con la ecuación (32) ($\lambda_\epsilon/D \cong 0.09(\epsilon/D)$, con $R^2 = 0.9997$).

Cuadro 1. La rugosidad relativa (ϵ/D) y el factor de fricción de Fanning (f), correspondientes a las experiencias de Nikuradse a grandes números de Reynolds ($Re \rightarrow \infty$); los valores de f son obtenidos de las gráficas de Sotelo-Ávila (1974). La escala relativa λ_ϵ/D es obtenida a partir de las ecuaciones (29) y (32) en la ecuación (42).

ϵ/D	f	$(\lambda_\epsilon/D) \times 10^4$ ecuaciones (29) y (42)	$(\lambda_\epsilon/D) \times 10^4$ ecuaciones (32) y (42)
$\frac{1}{30}$	0.0600	41.84	29.85
$\frac{1}{61.2}$	0.0450	20.58	14.70
$\frac{1}{120}$	0.0350	9.88	7.06
$\frac{1}{252}$	0.0275	4.37	3.13
$\frac{1}{504}$	0.0235	2.41	1.73
$\frac{1}{1014}$	0.0200	1.24	0.89

asociada con un número de Reynolds del régimen de flujo y con una rugosidad de la pared, y ser utilizada como un valor medio en un pequeño rango de variación de este número.

Conclusiones

Se ha considerado que el esfuerzo cortante en el flujo del agua es el resultado de la suma

de un esfuerzo viscoso y de un esfuerzo turbulento. El primero es proporcional, de acuerdo con Newton, a la derivada del perfil de las velocidades, mientras que el segundo, de acuerdo con Prandtl, al cuadrado del producto de la derivada de este perfil y una longitud de mezcla. Se ha introducido una longitud de mezcla hiperbólica para escribir la relación entre el esfuerzo cortante total y la derivada del perfil en la forma de Newton.

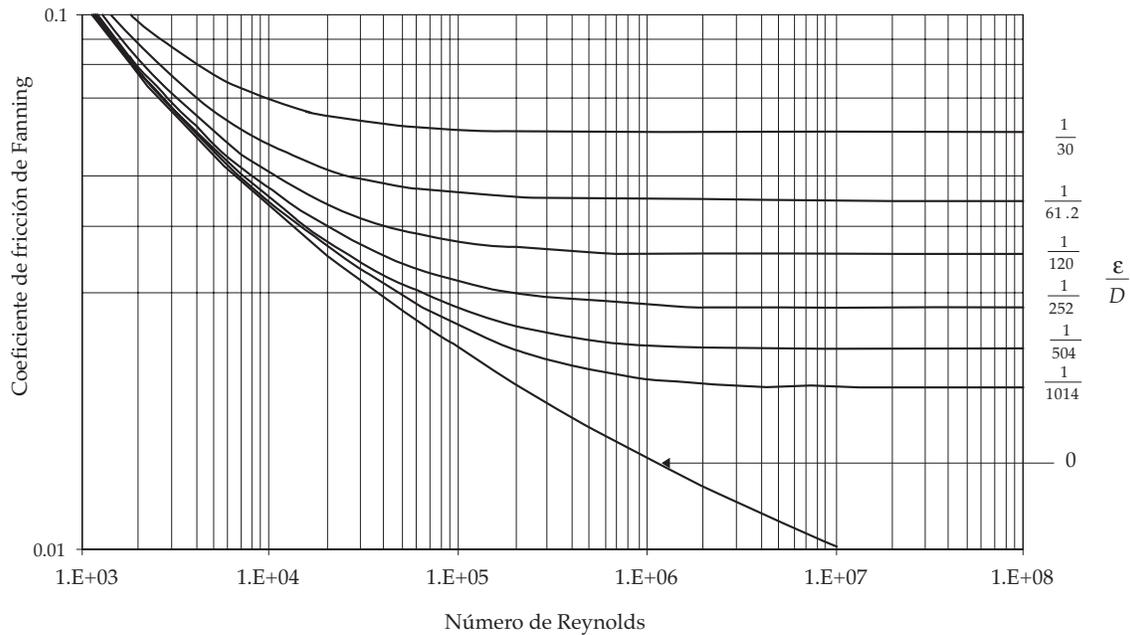


Figura 4. El coeficiente de fricción de Fanning (f) en un tubo completamente lleno de agua, ecuación (42) considerando la ecuación (32), en función del número de Reynolds (Re) en un tubo liso y para los seis valores de la rugosidad relativa de Nikuradse (ϵ/D).

La longitud hiperbólica ha sido construida de tal manera que tenga el comportamiento lineal con respecto a la distancia a la pared de la de Prandtl, en la cual el coeficiente de proporcionalidad es la constante de von Kármán, y que tenga un valor constante en la pared para incluir el régimen laminar. Esto induce que la hipérbola presente un punto mínimo cerca de la pared, hecho que a su vez induce un punto de inflexión en el perfil de las velocidades. La existencia de este punto crítico permite deducir un valor teórico de la constante de von Kármán bastante cercano a su valor experimental.

Con el perfil de las velocidades obtenido se han deducido las fórmulas para calcular las velocidades medias del fluido en un tubo completamente lleno de agua y en un canal rectangular de ancho muy grande; a partir de estas fórmulas se obtienen las leyes de resistencia al flujo. Se ha estudiado en particular la ley de resistencia en el tubo

llevándola a la forma de la ecuación de Darcy-Weisbach; el factor de fricción resultante presenta los comportamientos extremos clásicos, en función del número de Reynolds, es decir el régimen laminar de Poiseuille a bajos valores y el de Prandtl a altos valores de este número.

El efecto de la rugosidad de la pared a altos números de Reynolds se ha introducido en la ley de resistencia, siguiendo la idea de Colebrook y White de sumar a la escala de la turbulencia una escala proporcional al tamaño de los granos de arena de Nikuradse. El factor de fricción resultante tiene el mismo comportamiento que el mostrado en el diagrama clásico de Moody. Sin embargo, esta escala depende del número de Reynolds en régimen transitorio de acuerdo con los resultados experimentales de Nikuradse. La dependencia de esta escala a pequeños y moderados valores del número de Reynolds y de la rugosidad es un sujeto de investigación.

Agradecimientos

El autor manifiesta su profundo agradecimiento a don Samuel Trueba Coronel, ingeniero agrónomo especialista en irrigación de la Escuela Nacional de Agricultura de Chapingo y doctor *Honoris causa* por el Colegio de Postgraduados, por sus enseñanzas en hidráulica.

Recibido: 25/02/09
Aprobado: 08/06/10

Referencias

- BARENBLATT, G.I. Scaling laws for fully developed turbulent shear flows. Part 1. Basic hypotheses and analysis. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 248, 1993, pp. 513-520.
- BARENBLATT, G.I. and PROSTOKISHIN, V.M. Scaling laws for fully developed turbulent shear flows. Part 2. Processing of experimental data. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 248, 1993, pp. 521-529.
- CHÉZY, A. Rapport sur le canal de l'Yvette. En Herschel, C. On the origin of the Chézy formula. *J. Assoc. Eng. Soc.* 1897. Vol. 18, 1776, pp. 363-365.
- COLEBROOK, C.F. Turbulent flow in pipes with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws. *J. Inst. Civ. Eng.* Vol. 11, 1939, pp. 133-156.
- DAILY, J.W. and HARLEMAN, D.R.F. *Fluid dynamics*. Reading, USA: Addison-Wesley Publishing Co., 1966, 511 pp.
- DARCY, H.P.G. *Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux*. Paris: Imprimerie Nationale, 1857.
- DARCY, H. et BAZIN, H. *Recherches hydrauliques; première partie, recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts*. Paris: Imprimerie Nationale, 1865.
- DU BUAT, P.L.G. *Principes d'hydraulique, vérifiés par un grand nombre d'expériences faites par ordre du gouvernement*. Secund. ed. Paris: Imprimerie de Monsieur, 1786.
- FUENTES, C., DE LEÓN, B., SAUCEDO, H., PARLANGE, J.-Y. y ANTONINO, A.C.D. El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: 1. La ley de resistencia hidráulica en potencia. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. XIX, núm. 2, abril-junio de 2004, pp. 65-75.
- KING, H.W., WISLER, C.O. and WOODBURN, J.G. *Hydraulics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1952, 351 pp.
- LANDAU, L. et LIFCHITZ, E. *Physique théorique*. Tome 6: Mécanique des fluides. Seconde édition. Moscou: Éditions Mir, 1989, 748 pp.
- LEVI, E. *El agua según la ciencia*. Conacyt-Castell Mexicana, México, 1989, 677 pp.
- MANNING, R. On the flow of water in open channels and pipes. *Trans. Inst. Civil Engr. Ireland*. Vol. 20, 1891, pp. 161-207.
- McKEON, B.J., SWANSON, C.J., ZARAGOLA, M.V., DONNELLY, R.J. and SMITS, A.J. Friction factors for smooth pipe flow. *J. Fluid Mechanics*. Vol. 541, 2004, pp. 41-44.
- MOODY, L.F. Friction factors for pipe flows. *Trans. ASME*. Vol. 66, 1944, pp. 641.
- MOODY, L.F. An approximate formula for pipe friction factors. *Trans. ASME*. Vol. 69, 1947, pp. 1005.
- NEWTON, I. *De philosophiae naturalis principia mathematica*. Préface de S. Hawking. Postface de F. Biarnais. Paris: Christian Bourgeois Éditeur, 1985.
- NIKURADSE, J. Gesetzmäßigkeit der turbulenten Strömung in glatten Röhren. *Forsch. Arb. Ing.-Wes.* No. 356. English translation NACA TT F-10, 1932, 359 pp.
- NIKURADSE, J. Strömungsgesetze in rauhen Röhren. *Ver. Dtsch. Ing. Forsch.* 1933, 361 pp.
- PANTON, R.L. *Incompressible flow*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1984, 780 pp.
- POISEUILLE, J.L.M. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Vol. 11, 1840, pp. 961-967 y 1041-1049; vol. 12, 1841, pp. 112-115.
- PRANDTL, L. Über die ausgebildete Turbulenz. *ZAMM (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik)*. Vol. 5, 1925, pp. 136-139.
- REYNOLDS, O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and of the Law of Resistance in parallel channels. *Philos Trans. Royal Soc.* London. Vol. 174, 1883, pp. 935-982.
- RICHARDS, L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*. Vol. 1, 1931, pp. 318-333.
- SAINT-VENANT, A.J.C. BARRÉ DE. Théorie du mouvement non permanent des eaux avec application aux crues des rivières, et à l'introduction des marées dans leurs lits. *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*. Vol. 73, 1871 pp. 147-154 y 237-240.
- SOTELO-ÁVILA, G. *Hidráulica General*. México, D.F.: Editorial Trillas, 1974.
- TRUEBA-CORONEL, S. *Hidráulica*. México, D.F.: CECSA, 1954, 454 pp.
- WEISBACH, J. *Lehrbuch der Ingenieur-und Maschinen-Mechanik*. 2nd ed. Braunschweig: Vieweg und Sohn, 1850, 535 pp.
- WHITE, F.M. *Mecánica de fluidos*. México, D.F.: McGraw Hill, 1979, 757 pp.
- ZARAGOLA, M.V. *Mean-flow Scaling of Turbulent Pipe Flow*. Ph.D. thesis. Princeton: Princeton University, 1996.
- ZARAGOLA, M.V. and SMITS, A.J. Scaling of the mean velocity profile for turbulent pipe flow. *Physics Review Letters*. Vol. 78, núm. 2, 1997, pp. 239-242.

Abstract

FUENTES, C. *Hyperbolic mixture length, velocity profile, and flow resistance law*. Water Technology and Sciences, formerly Hydraulic engineering in Mexico (in Spanish). Vol. II, No. 1, January-March, 2011, pp. 19-31.

Considering that in water flow total shear stress is the sum of a viscous shear stress and a turbulent shear stress, a hyperbolic mixture length is introduced in the Newton hypothesis to describe the relationship between total shear stress and the mean velocity profile derivative. The hyperbolic length is reduced to the Prandtl length which is proportional to the wall distance when the latter is large. The existence of an inflexion point in the velocity profile induces a theoretical value of the von Kármán constant very close to its experimental value. From this, profile formulas for average fluid velocities in a pipe and rectangular channel are deduced, and from these latter, resistance to flow laws are established. The pipe resistance law, expressed in a Darcy-Weisbach form, indicates that the friction factor shows the extreme behaviors of Poiseuille and Prandtl laws. The wall roughness for high Reynolds numbers is introduced following the Colebrook and White idea, adding to the turbulence scale another one proportional to the Nikuradse sand grains size; the friction factor has the same behavior as that of the Moody diagram. The last scale will depend on the Reynolds number in transient regime in agreement with the experimental results of Nikuradse and its dependency with respect to small and moderate Reynolds number values, and the wall roughness is a study subject.

Keywords: theoretical value of the von Kármán constant, wall roughness effects.

Dirección institucional del autor

Dr. Carlos Fuentes

Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma de Querétaro
C.U., Cerro de las Campanas
76010 Santiago de Querétaro, Querétaro, México
Teléfono: +52 (442) 1921 200, extensión 6036
Fax: +52 (442) 1921 200, extensión 6006
cfuentes@uaq.mx