DOI: 10.24850/j-tyca-2021-04-04

Artículos

Análisis de frecuencias de crecientes con la distribución GVE para r eventos anuales Flood frequency analysis with the GEV distribution for r-annual events

Daniel Francisco Campos-Aranda¹

¹Profesor jubilado de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México, campos_aranda@hotmail.com

Autor para correspondencia: Daniel Francisco Campos-Aranda, campos aranda@hotmail.com

Resumen

Las crecientes son los gastos máximos anuales de un río y su análisis de frecuencias son técnicas estadísticas que permiten estimar valores asociados con bajas probabilidades de ser excedidos. Tales predicciones permiten el diseño y la revisión hidrológica de las obras hidráulicas. La etapa fundamental del análisis de frecuencias consiste en seleccionar y ajustar, a los datos o muestra disponible, una función de distribución de probabilidades para realizar las predicciones. La distribución general de valores extremos (GVE) tiene bases teóricas que la convierten en un modelo probabilístico adecuado a crecientes, niveles máximos del mar, velocidades extremas de viento, etcétera.



Debido a su génesis, la GVE procesa un dato por año, el máximo. Esta desventaja fue superada con el método de los r eventos máximos anuales. Tal procedimiento se describe y aplica al ajuste de la función GVE, a través del método de máxima verosimilitud, utilizando al algoritmo Complex de múltiples variables restringidas, para la maximización numérica. Se integraron cinco registros de crecientes con cinco eventos por año, en estaciones hidrométricas de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México. Además, se procesaron dos registros de niveles máximos del mar con r = 5, tomados de la literatura especializada; uno de ellos es no estacionario al presentar tendencia. Se analizaron los resultados y se contrastaron las predicciones del ajuste de la GVE con r eventos anuales contra las de los métodos clásicos de momentos L y LH. Por último, se formulan las conclusiones, las cuales destacan la conveniencia del método descrito y señalan las ventajas del uso del algoritmo Complex como técnica numérica; debido a lo anterior, se recomienda la aplicación sistemática del procedimiento descrito.

Palabras clave: distribución GVE, método de máxima verosimilitud, algoritmo Complex, variables de decisión y dependientes, test de Wald-Wolfowitz, error estándar de ajuste, covariables, predicciones.

Abstract

Floods are the maximum annual flows of a river and their frequency analysis are statistical techniques that allow estimating values associated with low probabilities of being exceeded. Such *predictions* allow the hydrological design and review of hydraulic works. The fundamental stage of frequency analysis is the selection and fit, to the available data or sample, of a probability distribution function to make



predictions. The generalized extreme value (GEV) distribution has theoretical bases that make it a probabilistic model suitable for floods, maximum sea levels, extreme wind speeds, etc. Due to its genesis, the GEV processes one data per year, the maximum. This disadvantage has been overcome with the method of the r annual maximum events. Such procedure is described and applied to the adjustment of the GEV function, through the maximum likelihood method, using the Complex algorithm of multiple restricted variables, for numerical maximization. Five records of floods with five events per year were integrated from hydrometric stations of the Hydrological Region No. 10 (Sinaloa), Mexico. Also, two records of maximum sea levels with r = 5 were processed, taken from specialized literature; one of them is nonstationary since it shows a trend. Results were analyzed and the predictions of the GEV adjustment with r annual events, were compared against those of the classical methods of moments L and LH. Finally, conclusions are formulated, which highlight the convenience of the described method and point out the advantages of using the Complex algorithm as a numerical technique; due to the above, the systematic application of the described procedure is recommended.

Keywords: GEV distribution, maximum likelihood method, complex algorithm, decision and dependent variables, Wald-Wolfowitz test, standard error of fit, covariates, predictions.

Recibido: 18/06/2020

Aceptado: 03/09/2020



Introducción

En términos simples, el análisis de frecuencias es una técnica estadística que permite ajustar un modelo probabilístico o función de distribución de probabilidades (FDP) a una muestra de n datos. Su propósito se centra en realizar predicciones, más allá del intervalo de los datos empleados para estimar los parámetros de ajuste de la FDP seleccionada. Por lo general, las predicciones buscadas son mayores al más grande de los eventos observados y, por ello, el análisis de frecuencias consiste en el estudio de los eventos pasados con la finalidad de establecer probabilidades para ocurrencias futuras. Por ejemplo, se estudian los gastos máximos anuales de un río para obtener las crecientes de diseño, que son gastos máximos asociados con bajas probabilidades de ser excedidos. En resumen, los métodos del análisis de frecuencias no predicen el futuro con certeza, pero generan modelos probabilísticos que explican y hacen uso eficiente de los eventos extremos ocurridos en el pasado (Khaliq, Ouarda, Ondo, Gachon, & Bobée, 2006).

El análisis de frecuencias consta de cuatro pasos: (1) verificación de la calidad estadística de los datos o muestra disponible. En realidad, la validez y exactitud de las predicciones requieren que los datos sean independientes y muestren *estacionariedad*, lo cual implica que hayan sido generados por un proceso aleatorio estable en el tiempo; (2) selección de una FDP; (3) selección de un método de estimación de los parámetros de ajuste de la FDP, y (4) adopción de los resultados o predicciones. Comúnmente, se aplica el error estándar de ajuste, que

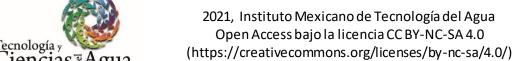


es una medida cuantitativa entre datos observados y estimados con la FDP ajustada (Rao & Hamed, 2000; Stedinger, 2017).

En relación con el tópico de la selección de una FDP, la teoría de valores extremos es una disciplina estadística que desarrolla modelos que describen lo inusual de los datos. Siendo los valores extremos escasos por naturaleza, sus predicciones implican fuertes extrapolaciones y la teoría de valores extremos proporciona modelos que las permiten con base en un fundamento asintótico (Coles, 2001).

La distribución general de valores extremos (GVE) tiene una base teórica que la vuelve imprescindible en el análisis de frecuencias de eventos extremos, como crecientes de un río, niveles máximos del mar, velocidades extremas de viento, etcétera (Guedes, Soares, & Scotto, 2004; Khaliq et al., 2006; An & Pandey, 2007). Sin embargo, implícita en su propia formulación de máximo de un lapso o bloque, que se expone posteriormente, la distribución GVE emplea un solo valor extremo por año y por ello han surgido dos enfoques que buscan incorporar más eventos de cada año (Coles, 2001; Khaliq et al., 2006).

El primero se denomina de *excedencias arriba de un umbral* o análisis POT (*peaks over threshold*); utiliza todos los eventos que exceden a un valor umbral, por ejemplo, el valor más bajo de los máximos anuales observados. Lógicamente, habrá que cumplir con la condición de independencia entre los eventos seleccionados. El segundo enfoque de uso de más datos se conoce como modelo de r estadísticas de orden más grandes (r largest order statistics) y consiste en incluir más información de eventos máximos en cada año o bloque que cumplan con la condición de independencia entre ellos. Para cumplir lo anterior, en la práctica se ha encontrado que $r \le 5$ (Ramesh & Davison, 2002). La ventaja fundamental de ambos enfoques consiste en utilizar otros valores máximos de la muestra, en el extremo derecho





de la función GVE, para estimar predicciones más precisas o robustas, ya que se tienen más datos para cuantificar sus parámetros de ajuste (Tawn, 1988; Coles, 2001; Khaliq et al., 2006).

Los *objetivos* de este estudio se centran en los cuatro siguientes: (1) exponer la teoría en que se basa la aplicación de la distribución GVE, con r eventos máximos anuales independientes; (2) describir el método de máxima verosimilitud para estimar los tres parámetros de ajuste (μ, σ, κ) de la distribución GVE; (3) integrar cinco registros de crecientes con r = 5, dentro de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México, para realizar un contraste de predicciones de la distribución GVE, entre las obtenidas con el método de r eventos anuales y las de los métodos de sextiles, momentos L y momentos LH, estos contrastes se realizan con base en el error estándar de ajuste, y (4) procesar con el método de los r eventos anuales el registro de niveles máximos del mar en Venecia, Italia, que es no estacionario, pues presenta tendencia lineal ascendente.

Teoría operativa

La distribución GVE

En el análisis de frecuencias de datos hidrológicos extremos, como crecientes o gastos anuales, niveles del mar, velocidades de viento y lluvias máximas, las distribuciones de valores extremos tienen un papel preponderante. Su origen se establece a partir de una muestra de variables aleatorias $(X_1, X_2, ..., X_n)$, independientes e idénticamente distribuidas (iid), que tienen una función de distribución de probabilidades F(x). En la práctica, X_i son valores del proceso observado que se mide cada hora como los niveles del mar o diariamente como los gastos de un río.

El estadístico definido en la Ecuación (1) es el máximo del proceso durante *n* unidades de tiempo de observación (*block máxima*) y en su comportamiento probabilístico se centra el desarrollo de la teoría de valores extremos:

$$M_n = \max[X_1, X_2, \dots, X_n] \tag{1}$$

La distribución de probabilidades acumuladas M_n está definida por la condición *iid* y es (Smith, 1986; Tawn, 1988; Dupuis, 1997; Coles, 2001; An & Pandey, 2007):

$$P(M_n \le x) = P[X_1 \le x, \dots, X_n \le x] ; P(M_n \le x) = P(X_1 \le x) \cdot \dots \cdot P(X_n \le x) ; P(M_n \le x) = [F(x)]^n$$
(2)

Para obtener el comportamiento de la Ecuación (2) conforme n tienda a infinito y se eviten soluciones triviales o degenerativas, se hace una normalización lineal de la variable M_n , con base en las constantes $a_n > 0$ y b_n , la cual es:

$$M_n^* = \frac{M_n - b_n}{a_n} \tag{3}$$

Ahora la distribución de los extremos converge a un resultado no trivial, definido así:

$$P(M_n^* \le x) = [F(a_n \cdot x + b_n]^n \to G(x) \text{ cuando } n \to \infty$$
(4)

La distribución asintótica G(x) debe converger en alguna de las tres familias llamadas Gumbel, Fréchet y Weibull. Estas tres distribuciones se incluyen en la general de valores extremos (GVE), cuya expresión es:

$$G(x) = \exp\left\{-\left[1 + \kappa \frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^{-1/\kappa}\right\} \tag{5}$$

en la cual, μ , σ y κ son los parámetros de ubicación, escala y forma; con $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ y $-\infty < \kappa < \infty$. Además, está definida por el conjunto $\{x\colon [1+\kappa(x-\mu)/\sigma]>0\}$. Si $\kappa>0$, la GVE tiene tipo II o Fréchet, sin límite superior $(\mu-\sigma/\kappa < x < \infty)$. Cuando $\kappa<0$, se define la tipo III o Weibull, con límite superior $(\infty < x < \mu - \sigma/\kappa)$. Finalmente, cuando $\kappa=0$, se llega, en un sentido asintótico, a la distribución tipo I o de Gumbel $(-\infty < x < \infty)$, también denominada doble exponencial, cuya ecuación es:

$$G(x) = \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\} \tag{6}$$

Seleccionado los máximos (Ecuación (1)) en cada año, las *predicciones* buscadas (X_{Tr}) para una probabilidad de excedencia q o un periodo de retorno Tr en años (Tr = 1/q), se obtienen con base en la Ecuación (5), ya que G(x) = 1 - q (Coles, 2001):

$$X_{Tr} = \mu - \frac{\sigma}{\kappa} \{1 - [-\ln(1-q)]^{-\kappa}\} \text{ para } \kappa \neq 0$$
 (7)

$$X_{Tr} = \mu - \sigma \cdot \ln[-\ln(1-q)] \text{ para } \kappa = 0$$
 (8)

Conviene aclarar que en el siglo pasado la ecuación de la distribución GVE (Smith, 1986; Tawn, 1988; Dupuis, 1997; Hosking & Wallis, 1997; Rao & Hamed, 2000) era:

$$G(x) = \exp\left\{-\left[1 - \kappa \frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^{1/\kappa}\right\} \tag{9}$$

para la cual, el modelo Fréchet se obtiene con $\kappa < 0$. Este cambio de κ por - κ en la Ecuación (9) ha sido iniciado, lógicamente por Coles (2001), y aceptado por Ramesh y Davison (2002), Katz, Parlange y Naveau (2002), y por Khaliq *et al*. (2006). Tiene una leve conveniencia de signos al manejar la función de verosimilitud y sus restricciones de positividad en las ecuaciones (13) a (15) siguientes, y por ello se conserva en este estudio.



Método de máxima verosimilitud

De acuerdo con textos consultados (Kite, 1977; Rao & Hamed, 2000; Coles, 2001; Kottegoda & Rosso, 2008; Meylan, Favre, & Musy, 2012) el *principio de máxima verosimilitud* se explica con diferentes niveles de detalle. Pero, en general, implica lo siguiente: dada una muestra $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de observaciones iid, que siguen una distribución F_θ con parámetros de ajuste θ_1 , θ_2 ,..., θ_q . Entonces, por definición, la probabilidad de obtener un valor X_i será:

$$P(x_i \le X \le x_i + dx_i) = f_\theta(x_i) \cdot dx_i \tag{10}$$

siendo $f_{\theta}(x_i)$ la función de densidad de probabilidad. Como los datos son iid, la probabilidad de obtener n valores X_i será la probabilidad conjunta o función de verosimilitud, designada L del inglés likelihood y expresada como:

$$L(\theta) = f_{\theta}(x_1) \cdot f_{\theta}(x_2) \cdots f_{\theta}(x_n) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i)$$
(11)

El método de máxima verosimilitud consiste en encontrar un vector $\hat{\theta}$ de parámetros que hagan máxima a $L(\theta)$ y por lo tanto a la probabilidad de obtener la muestra $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Con frecuencia, resulta más conveniente tomar logaritmos y trabajar con la función logarítmica de verosimilitud (Coles, 2001), es decir:



$$l(\theta) = \log L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f_{\theta}(x_i)$$
 (12)

lo anterior es aceptable debido a que la función logarítmica es monotónica y entonces la función $I(\theta)$ alcanza su máximo en el mismo punto que la función $L(\theta)$.

Función $I(\theta)$ de la distribución GVE

La función de densidad de probabilidad de la distribución GVE es la siguiente (Coles, 2001; Ramesh & Davison, 2002):

$$f(x; \mu, \sigma, \kappa) = \frac{1}{\sigma} \left[1 + \kappa \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]_{+}^{-1 - 1/\kappa} \cdot \exp \left\{ - \left[1 + \kappa \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]_{+}^{-1/\kappa} \right\}$$
 (13)

donde $\sigma > 0$, $-\infty < \mu$, $\kappa < \infty$ y el intervalo de x es tal que $[1 + \kappa(x - \mu) / \sigma] > 0$, lo cual se indica con el signo + afuera de los paréntesis rectangulares. Cualquier combinación de parámetros de ajuste que viola la condición anterior de *positividad* implica que al menos uno de los puntos observados (x) está más allá de los puntos finales de la distribución, y entonces la función de verosimilitud es cero y la función logarítmica de verosimilitud es igual a $-\infty$ (Coles, 2001). Si se tiene una muestra de máximos anuales $X_1, X_2, ..., X_n$, que son independientes, la función logarítmica de verosimilitud es:



$$l(\mu, \sigma, \kappa) = -n \ln \sigma - \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) \sum_{i=1}^{n} \ln \left[1 + \kappa \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]_{+} - \sum_{i=1}^{n} \left[1 + \kappa \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]_{+}^{-\frac{1}{\kappa}}$$
 (14)

Función $I(\theta)$ de la GVE para r eventos anuales

Cuando se incluyen otros valores máximos anuales en el ajuste de la distribución GVE para buscar una inferencia de predicciones más precisa, entonces en cada año se tienen r eventos definidos como: $x^1 \ge x^2 \ge \ldots \ge x^r$, y la función de densidad de probabilidad conjunta permite definir la función logarítmica de verosimilitud para n años de r valores anuales máximos independientes cada uno (Coles, 2001; Ramesh & Davison, 2002), que es: $l(\mu,\sigma,\kappa) = -n \cdot r \cdot \ln \sigma - \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \ln \left[1 + \kappa \left(\frac{x_i^j - \mu}{\sigma}\right)\right]_+$

$$-\sum_{i=1}^{n} \left[1 + \kappa \left(\frac{x_i^r - \mu}{\sigma} \right) \right]_+^{-1/\kappa} \tag{15}$$

Las restricciones definidas en la Ecuación (13) para los parámetros de ajuste se aplican a la expresión anterior y además $\left[1+\kappa(x^j-\mu)/\sigma\right]$ debe ser positivo para cada j=1,...,r. La Ecuación (14) es un caso especial de la Ecuación (15), que se obtiene cuando r=1. Tawn (1988) presenta una ecuación similar a la (15), que considera variable cada año el número de eventos r.



Función $I(\theta)$ de la GVE para series no estacionarias

Los procesos no estacionarios tienen características que cambian sistemáticamente a través del tiempo. En los procesos climatológicos e hidrológicos, la no estacionariedad se observa por épocas debido a los efectos de los patrones climáticos diferentes en varios meses. También está presente como tendencia, originada principalmente por el cambio climático regional o global (Coles, 2001).

No existe una teoría general de valores extremos para los procesos no estacionarios y, por ello, se sigue un enfoque pragmático consistente en utilizar la distribución GVE ajustada por máxima verosimilitud, cambiando con el tiempo, o con alguna otra *covariable* y sus parámetros de ajuste (Katz *et al.*, 2002). Para el caso específico de una tendencia lineal, se hace variar el parámetro de ubicación con el tiempo (Coles, 2001):

$$\mu(t) = \beta_0 + \beta_1 \cdot t \tag{16}$$

La expresión anterior se sustituye en la Ecuación (15) para maximizar tal función y obtener los cuatro parámetros de ajuste $((\beta_0,\beta_1,\sigma,\kappa))$. Otros modelos basados en la GVE para series no estacionarias con el enfoque de *covariables* las describe Coles (2001) en su capítulo 6.



El algoritmo Complex

La maximización de la Ecuación (15) para obtener los parámetros óptimos de ajuste (μ , σ , κ) de la GVE buscada debe ser abordada de manera *numérica*, y para ello se seleccionó el algoritmo Complex de múltiples variables (z) restringidas o acotadas. Su planteamiento teórico es el siguiente (Box, 1965):

$$Minimizar F(z_1, z_2, ..., z_s)$$
 (17)

Sujeta a m variables dependientes (y), función de las variables de decisión (z):

$$y_1 = F(z_1, z_2, \dots, z_s) : : y_m = F(z_1, z_2, \dots, z_s)$$
 (18)

Ambas variables tienen límites inferiores y superiores del tipo \leq , es decir, $z_{inf} \leq z_i \leq z_{sup}$ y $y_{inf} \leq y_i \leq y_{sup}$. El algoritmo Complex es una técnica de exploración local, que se guía exclusivamente por lo que encuentra a su paso; sus antecedentes, una descripción breve de su proceso operativo y su código OPTIM se pueden consultar en Campos-Aranda (2003). En Bunday (1985) se tiene otra descripción y código de este método de búsqueda.



Las designaciones principales en el código OPTIM son NX y NY, que definen el número de variables de decisión y dependientes; para el caso analizado tres (μ, σ, κ) y n (número de años del registro), debido a que las variables dependientes son restricciones de positividad, con $j=1,\ldots,r$ valores por año $\left[1+\kappa(x^j-\mu)/\sigma\right]$. MI = 500 es el número máximo de evaluaciones de la función objetivo y NQ = 25 el número de tales cálculos entre impresión de resultados. Estas variables se accesan en la subrutina de lectura de datos.

Una ventaja importante del código OPTIM radica en permitir un fácil acceso de los límites (L = lower, U = upper), nombres y valores iniciales de las variables, en la subrutina citada, por medio de las designaciones siguientes: XL(I), XU(I), XU(I), XN\$(I), X(I), YL(J), YU(J), YN\$(J) y Y(J). Para el caso estudiado, I varía de 1 a 3, y J de 1 a n (número de años del registro). Después, se incluyen los criterios de convergencia FA y FR para las deviaciones absoluta y relativa de la F. Se utilizaron los valores siguientes: 0.0002 y 0.00001, respectivamente.

La función objetivo se denomina F en el código OPTIM y se accesa al final del programa; corresponde lógicamente a la Ecuación (15), con nombre FO\$="FLMV" de función logarítmica de máxima verosimilitud. Se asigna con signo negativo a F debido a que el algoritmo Complex minimiza a la función (Ecuación (17)) y se desea maximizar a la FLMV.

Por último, se aclara que por la naturaleza del problema numérico planteado, se tiene otra variable, que es NR = 1, ..., 5, la cual equivale a cada muestra anual de niveles o gastos. La captura de datos se hace con dos ciclos anidados: uno para i, variando de 1 a n o número de años del registro procesados; y el otro para j, que va de 1 a 5, es decir, r de la Ecuación (15).



Test de Wald-Wolfowitz

Esta prueba no paramétrica ha sido utilizada por Bobée y Ashkar (1991), Rao y Hamed (2000), y Meylan, Favre y Musy (2012) para probar *independencia* y *estacionariedad* en registros de gastos máximos anuales (x_i). Para el caso estudiado, se propuso aplicar la prueba al registro de gastos máximos anuales (r = 1), que debe ser una muestra de valores aleatorios. Wald y Wolfowitz, basándose en el trabajo de Anderson sobre el coeficiente de correlación serial, desarrollaron tal prueba, cuyo estadístico es:

$$R = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \cdot x_{i+1} + x_n \cdot x_1 \tag{19}$$

Cuando el tamaño (n) de la serie o muestra (x_i) no es pequeño y sus datos son independientes, R procede de una distribución normal con media y varianza, dadas por las expresiones siguientes:

$$E[R] = \bar{R} = \frac{S_1^2 - S_2}{n - 1} \tag{20}$$



$$Var[R] = \frac{S_2^2 - S_4}{n - 1} + \frac{S_1^4 - 4 \cdot S_1^2 \cdot S_2 + 4 \cdot S_1 \cdot S_3 + S_2^2 - 2 \cdot S_4}{(n - 1)(n - 2)} - \bar{R}^2$$
(21)

en las cuales:

$$S_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \tag{22}$$

Finalmente, se calcula U, con la ecuación:

$$U = \frac{R - \bar{R}}{\sqrt{Var[R]}} \tag{23}$$

El valor de U sigue una distribución normal con media cero y varianza unitaria, y se puede usar para probar la independencia de los datos de la serie con un nivel de significancia a, por lo común del 5 %. En una prueba de dos colas, la variable normal estandarizada es $Z_{a/2} \cong 1.96$; entonces, cuando |U| < 1.96, la serie estará integrada por valores independientes (muestra aleatoria).

Error estándar de ajuste



Es el indicador más común (Chai & Draxler, 2014) para el contraste de una distribución de probabilidades a datos reales; se estableció a mediados de la década de 1970 (Kite, 1977) y se ha aplicado en México haciendo uso de la fórmula empírica de Weibull (Benson, 1962). Ahora se aplicará utilizando la fórmula de Cunnane (Ecuación (25)), que de acuerdo con Stedinger (2017) conduce a probabilidades de no excedencia (p) aproximadamente insesgadas con las distribuciones utilizadas en hidrología. La expresión del error estándar de ajuste (EEA) es:

$$EEA = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{X}_i)^2}{(n-np)}\right]^{1/2}$$
 (24)

 X_i son los niveles y gastos máximos anuales (r = 1) ordenados de menor a mayor, cuyo número es n y \hat{X}_i los gastos máximos estimados con la Ecuación (7) y la probabilidad evaluada con la Ecuación (25); np = 3 es el número de parámetros de ajuste de la GVE:

$$p = \frac{i - 0.40}{n + 0.20} \tag{25}$$

Búsqueda de la solución óptima y robusta



Conforme se avanza de r=1 a r=5, al aplicar la Ecuación (15) y buscar su máximo con el algoritmo Complex, se van procesando cada vez más datos, primero n y por último 5n. Esto modifica los valores óptimos de los parámetros de ajuste (μ, σ, κ) y también hace cambiar al *EEA*, que se calcula *exclusivamente* con la serie anual de niveles o gastos máximos anuales (r=1).

Lo anterior, para poder establecer una *comparación objetiva* en el uso de más información de cada año procesado (solución robusta) y buscar una combinación de μ , σ y κ (solución óptima) que conduzcan a un *EEA* menor o similar al mínimo obtenido con los métodos de ajuste por sextiles (Clarke, 1973; Campos-Aranda, 2001); momentos L (Hosking & Wallis, 1997; Stedinger, 2017), y momentos LH (Wang, 1997a; Wang, 1997b; Campos-Aranda, 2016).

Datos procesados

Registro de niveles en el Mar del Norte

Guedes Soares y Scotto (2004) presentan una gráfica de cinco niveles máximos anuales (metros) en el Mar del Norte, en el periodo 1976-1999; por lo cual, n=24. Sus valores aproximados se muestran en la Tabla 1. Estos autores, para asegurarse de utilizar r valores anuales



independientes, usan el concepto de duración o longitud estándar de tormenta (Tawn, 1988), definida en 480 horas (20 días), al muestrear un registro de niveles máximos tomado cada tres horas.

Tabla 1. Cinco niveles máximos anuales independientes (metros) en el Mar del Norte (Guedes Soares & Scotto, 2004).

Año	<i>r</i> valores anuales							
	1	2	3	4	5			
1976	10.38	9.39	9.21	8.59	8.45			
1977	10.60	9.57	9.03	7.80	7.69			
1978	11.34	9.06	7.82	7.57	6.78			
1979	10.33	10.22	9.42	8.37	7.53			
1980	10.54	9.43	9.30	8.50	7.90			
1981	11.22	10.13	9.44	9.24	9.17			
1982	8.85	8.67	8.34	7.96	7.85			
1983	10.53	10.16	9.14	8.78	7.27			
1984	9.20	8.97	8.43	8.11	7.14			
1985	10.68	9.40	8.89	8.44	7.60			
1986	9.92	9.49	8.60	8.47	8.14			
1987	9.36	8.22	7.96	7.92	7.18			
1988	12.95	10.17	9.08	8.67	8.34			
1989	10.32	10.03	9.80	9.14	8.66			
1990	10.46	10.00	9.60	9.00	8.47			
1991	9.98	9.48	8.98	8.47	8.00			



1992	11.47	9.80	8.46	7.98	7.48
1993	12.00	10.98	10.40	9.48	8.98
1994	9.00	8.46	7.98	7.50	7.20
1995	11.48	10.98	10.47	9.98	7.98
1996	10.97	10.00	9.00	8.00	7.50
1997	12.00	9.33	8.47	7.66	7.48
1998	8.52	8.40	8.18	8.04	7.88
1999	8.40	7.86	7.44	7.00	6.87

Integración de los registros de crecientes

Se procesaron cinco registros que fueron integrados con base en la información disponible en el sistema *BANDAS* (IMTA, 2002), en el CD 1, la cual se denomina "Gastos máximos mensuales", e incluye día, hora y lectura de escala de cada uno de los 12 gastos máximos del año analizado. Los cinco registros por procesar de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México, se exponen de mayor a menor área de cuenca. El parteaguas y colector principal de las estaciones hidrométricas: Huites, Santa Cruz, Jaina, Guamúchil y El Bledal, se muestran en la figura 1 de Campos-Aranda (2014), junto con otras 17 cuencas de tal región.

Para su integración, se aceptó que un lapso de 15 días asegura condiciones meteorológicas diferentes en la formación de cada



creciente dentro de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México (Schulz, 1976; Campos-Aranda, 2000).

No se realizó una verificación de eventos extremos debido a que se acepta que la información hidrométrica que contiene el sistema *BANDAS* (IMTA, 2002) ha sido contrastada y depurada contra los datos o mediciones de campo.

buscar que los registros se integren con gastos independientes, se siguió el siguiente proceso, en cada año (a) se selecciona el gasto máximo anual (x_i^1) , y se revisa hacia adelante y hacia atrás de tal valor si el gasto mensual adyacente tiene un mínimo de 15 días de diferencia con la fecha de este primer máximo; el gasto mensual que no cumpla con tal plazo se elimina; después se busca el siguiente gasto en magnitud (x_i^2) entre los gastos máximos mensuales disponibles (11, 10 o 9 restantes) y se sigue el proceso descrito; así se gastos hasta los cinco máximos avanza integrar independientes (x_i^5) .

Registro de crecientes en la hidrométrica Huites

La estación de aforos Huites en el río Fuerte de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México, con clave 10037 y área de cuenca de 26057 km², comenzó a operar en septiembre de 1941 y concluyó en diciembre de 1992 (n=51), cuando inició la construcción de la Presa Luis Donaldo Colosio. Con el proceso descrito se integró su registro de cinco gastos máximos anuales independientes, que se expone en la Tabla 2.



Tabla 2. Cinco gastos máximos anuales independientes (m³/s) en la estación hidrométrica Huites, de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

Año	<i>r</i> valores anuales						
	1	2	3	4	5		
1942	2 531.0	2 037.6	1 868.8	780.3	427.6		
1943	14 376.0	3 283.0	1 085.0	416.4	414.2		
1944	2 580.0	1 262.5	1 024.8	768.0	474.6		
1945	1 499.2	1 250.0	268.4	197.4	24.3		
1946	1 164.8	445.0	427.5	151.0	62.2		
1947	1 127.3	754.8	718.8	634.0	205.0		
1948	3 215.0	799.0	623.2	493.5	118.8		
1949	10 000.0	2 297.5	895.3	942.4	826.4		
1950	3 229.3	1 384.0	961.0	439.0	438.9		
1951	677.0	587.5	322.2	37.6	37.4		
1952	1 266.0	895.0	355.8	238.3	223.5		
1953	1 025.0	885.0	68.3	57.3	39.0		
1954	954.8	540.1	481.2	406.6	171.4		
1955	4780.3	1 069.9	662.0	561.8	35.8		
1956	695.7	531.7	493.2	278.6	204.8		
1957	593.0	489.0	380.0	362.0	156.2		
1958	3 010.0	1 045.2	894.0	608.5	307.1		



1959	1 908.0	1 831.0	1 345.5	652.0	544.3
1960	15 000.0	1 046.0	985.2	721.4	140.5
1961	1 396.3	905.9	831.6	771.2	682.0
1962	1 620.0	912.0	892.8	501.0	374.5
1963	2 702.0	1 054.0	980.1	969.2	323.0
1964	1 319.1	938.5	216.0	145.2	105.0
1965	1 944.0	1 787.6	491.2	360.0	147.6
1966	2 420.0	892.2	738.0	688.9	340.0
1967	2 505.8	1 310.5	1 192.8	462.5	272.6
1968	1 534.3	1 118.0	1 019.6	703.8	401.6
1969	1 508.0	736.0	504.0	417.6	300.0
1970	1 558.0	1 330.0	970.0	328.7	206.0
1971	2 200.0	1 176.0	592.0	591.2	576.3
1972	2 225.0	2 040.0	1 142.0	1 109.0	732.1
1973	7 960.0	2 256.5	1 546.1	1 380.0	372.5
1974	3 790.0	3 315.0	1 120.0	886.7	587.5
1975	1 095.0	965.5	532.9	213.2	59.2
1976	2 677.0	1 350.2	1 211.0	69.6	50.4
1977	1 135.0	622.0	266.9	153.5	120.0
1978	4 790.0	1 750.0	1 119.2	756.0	475.4
1979	6 860.0	1 001.0	820.0	480.0	302.0
1980	1 496.0	1 475.0	1 197.8	660.2	452.0
1981	4 828.1	2 448.0	2 280.0	2 052.0	1 000.3
		1	l	l	



1982	2 450.0	1 571.6	1 085.2	624.0	412.8
1983	8 275.0	1 439.0	1 400.0	1 006.7	893.0
1984	5 580.0	1 623.0	1 132.0	624.5	369.2
1985	3 585.0	1 250.0	1 121.4	925.0	307.6
1986	1 348.8	1 329.3	436.8	434.0	193.7
1987	1 429.2	679.2	310.4	78.7	62.9
1988	1 866.3	1 494.3	132.6	82.7	47.2
1989	1 868.5	1 413.9	1 230.3	1 164.7	249.9
1990	11 558.6	3 544.2	970.1	815.6	376.9
1991	2 563.1	2 370.0	1 721.5	1 517.6	1 266.7
1992	2 025.3	1 564.8	1 348.9	787.3	528.5

Registro de crecientes en la hidrométrica Santa Cruz

La estación de aforos Santa Cruz en el río San Lorenzo de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México, con clave 10040 y área de cuenca de 8919 km², comenzó a operar en mayo de 1943 y concluyó su registro continuo en diciembre de 1980 (n=38). Con el proceso descrito se integró su registro de cinco gastos máximos anuales independientes, lo cual se muestra en la Tabla 3 y Figura 1.



Tabla 3. Cinco gastos máximos anuales independientes (m³/s) en la estación hidrométrica Santa Cruz, de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

Año	r valores anuales					
	1	2	3	4	5	
1943	2 102.9	2 067.3	1 166.0	485.0	266.2	
1944	2 142.0	1 210.0	173.3	257.0	125.4	
1945	1 023.4	623.8	427.4	267.7	66.8	
1946	837.6	374.0	265.4	141.1	133.0	
1947	1 161.2	734.0	672.8	211.5	134.6	
1948	1 062.0	787.8	618.6	606.0	562.6	
1949	784.2	503.6	270.4	233.8	207.7	
1950	1 086.3	836.7	309.0	302.0	51.4	
1951	487.8	421.0	333.4	272.0	146.0	
1952	677.0	244.2	161.9	110.0	75.3	
1953	807.0	480.6	385.0	122.0	92.0	
1954	553.0	424.0	276.8	126.0	14.2	
1955	1 252.0	895.6	768.4	426.0	26.8	
1956	369.5	329.7	334.1	129.0	38.6	
1957	293.0	279.0	190.6	154.0	11.6	
1958	1 157.2	576.7	455.0	438.3	337.8	
1959	762.2	232.1	48.0	40.4	28.0	
1960	1 074.0	679.0	591.5	536.7	364.2	



1961	1 280.0	765.0	587.6	521.0	112.5
1962	1 002.0	574.0	284.4	44.5	43.7
1963	3 680.0	707.4	615.1	566.7	277.0
1964	861.0	728.5	400.0	322.3	151.6
1965	888.8	346.0	187.4	175.0	55.9
1966	1 166.4	692.6	103.4	99.6	75.0
1967	950.0	651.2	603.6	252.6	225.8
1968	7 000.0	766.8	458.6	442.0	421.6
1969	484.0	438.0	365.0	323.0	192.0
1970	920.6	780.0	512.0	161.5	49.5
1971	812.0	747.0	443.3	280.6	126.0
1972	3 332.4	1 748.5	610.0	543.0	267.4
1973	898.0	890.0	800.0	90.5	73.3
1974	2 790.0	1 748.0	580.0	256.6	8.7
1975	620.0	410.0	392.5	182.0	23.8
1976	1 495.0	410.0	359.6	330.0	290.0
1977	836.0	696.0	512.9	114.6	78.0
1978	940.0	420.0	315.5	265.6	46.0
1979	3 080.0	523.3	484.0	67.9	22.0
1980	1 550.0	682.9	422.7	411.2	252.5



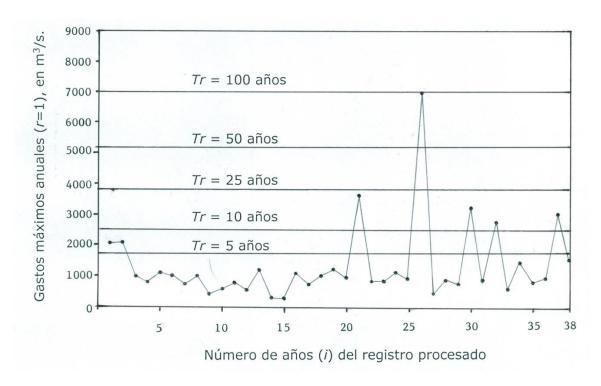


Figura 1. Serie de gastos máximos anuales (r = 1) y rectas de predicciones estacionarias en la estación hidrométrica Santa Cruz, de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

Registro de crecientes en la hidrométrica Jaina

La estación de aforos Jaina en el río Sinaloa de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México, con clave 10036 y área de cuenca de 8179 km², comenzó a operar en enero de 1942 y concluyó su registro continuo en diciembre de 1997 (n=56). Con el proceso descrito se integró su registro de cinco gastos máximos anuales independientes, lo cual se expone en la Tabla 4.



Tabla 4. Cinco gastos máximos anuales independientes (m³/s) en la estación hidrométrica Jaina, de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

Año	<i>r</i> valores anuales						
	1	2	3	4	5		
1942	2 065.2	707.0	219.5	217.0	114.4		
1943	6 991.3	1 715.0	1091.4	501.9	427.0		
1944	580.0	514.0	404.9	366.0	253.8		
1945	714.2	501.6	312.2	208.2	83.5		
1946	746.5	280.0	217.0	81.9	70.3		
1947	771.2	452.3	291.5	279.0	175.8		
1948	692.5	622.8	438.6	311.0	192.7		
1949	2 614.0	914.0	463.0	379.4	283.5		
1950	2 336.0	438.3	287.2	135.5	110.9		
1951	437.0	369.8	328.2	261.2	31.1		
1952	594.2	304.0	163.0	40.6	26.9		
1953	545.5	346.3	173.4	19.7	12.3		
1954	516.4	327.8	213.1	81.8	58.0		
1955	1 600.0	1 143.0	835.0	310.0	19.0		
1956	639.0	514.0	212.0	25.1	23.0		
1957	362.0	314.0	180.5	42.8	15.3		
1958	2 232.0	594.0	389.0	305.6	230.6		



1959	615.5	586.0	370.4	359.0	176.5
1960	2 003.0	545.6	394.4	316.1	302.0
1961	795.0	719.0	439.0	351.5	307.8
1962	1 137.0	514.8	297.6	295.2	59.7
1963	1 226.0	718.1	506.8	264.9	100.5
1964	453.7	433.2	233.0	129.8	36.7
1965	649.8	325.2	144.5	42.0	35.6
1966	958.0	381.6	274.8	143.6	109.0
1967	900.0	368.8	327.6	201.9	106.0
1968	1 338.0	734.9	522.0	250.6	215.5
1969	340.0	205.0	193.0	67.1	44.3
1970	356.6	287.8	208.0	107.0	19.0
1971	1 109.0	831.9	467.0	282.0	198.0
1972	932.0	551.0	468.2	412.0	403.1
1973	1 349.0	520.0	411.6	395.0	364.5
1974	680.0	675.0	545.8	418.8	220.0
1975	488.0	164.8	164.3	35.7	17.8
1976	900.0	390.2	313.3	290.5	216.5
1977	790.7	229.4	195.2	188.0	74.4
1978	988.0	521.0	315.2	26.9	26.0
1979	1 620.0	309.0	300.5	239.8	115.6
1980	400.3	321.2	132.5	121.2	103.5
1981	2 831.7	452.1	342.0	233.4	316.9
	1		I		



1982	4 440.4	325.0	105.0	66.5	51.6
1983	178.9	152.8	108.5	89.3	80.2
1984	693.7	586.4	451.2	315.6	220.5
1985	493.9	468.9	152.4	127.2	123.0
1986	416.2	276.7	114.4	88.9	78.7
1987	518.2	86.4	64.2	62.5	61.7
1988	105.0	63.7	36.7	35.8	26.7
1989	227.4	140.1	85.9	75.7	68.4
1990	638.2	412.2	286.9	181.8	86.9
1991	308.9	292.0	138.6	129.1	108.6
1992	371.8	143.7	125.3	114.9	92.1
1993	216.2	90.6	80.6	78.6	77.1
1994	199.0	119.0	91.9	85.2	80.5
1995	173.6	117.4	98.8	85.5	75.5
1996	343.6	336.8	89.9	77.1	57.6
1997	169.1	116.2	86.5	74.1	66.4

Registro de crecientes en la hidrométrica Guamúchil

La estación de aforos Guamúchil en el río Mocorito de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México, con clave 10031 y área de cuenca



de 1645 km², comenzó a operar en octubre de 1938 y concluyó en diciembre de 1971 (n=33), cuando inició la construcción de la presa Eustaquio Buelna. Con el proceso descrito se integró su registro de cinco gastos máximos anuales independientes (Tabla 5).

Tabla 5. Cinco gastos máximos anuales independientes (m³/s) en la estación hidrométrica Guamúchil, de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

Año	<i>r</i> valores anuales						
	1	2	3	4	5		
1939	299.0	299.0	164.4	78.0	12.2		
1940	254.5	37.2	34.1	31.9	3.2		
1941	65.3	36.1	13.5	3.0	2.1		
1942	445.0	298.0	161.0	83.0	4.9		
1943	1 550.0	1 236.4	298.0	92.3	71.5		
1944	391.8	71.4	22.1	7.9	2.7		
1945	916.0	336.0	276.0	228.7	1.7		
1946	241.0	48.4	12.7	0.3	0.3		
1947	530.0	133.0	26.0	15.5	0.9		
1948	648.0	548.0	195.9	40.4	2.8		
1949	375.0	145.4	89.2	72.8	34.0		
1950	272.3	74.2	69.3	1.4	0.2		
1951	422.3	409.7	82.8	13.8	2.3		
1952	376.8	26.8	16.7	0.2	0.1		



1953	1 173.0	261.3	213.0	3.0	1.1
1954	219.0	115.4	101.2	24.9	0.4
1955	3 507.0	189.0	11.4	2.3	1.1
1956	165.0	148.2	76.4	0.4	0.2
1957	526.0	342.0	57.4	8.2	0.4
1958	1 014.0	534.0	221.0	168.0	2.3
1959	1610.0	374.0	372.8	22.4	2.7
1960	137.0	130.0	94.5	69.3	49.4
1961	524.5	302.0	134.1	28.5	5.4
1962	985.0	524.0	168.0	112.5	4.9
1963	459.5	311.2	211.5	90.7	22.7
1964	390.0	202.1	123.2	4.4	1.1
1965	449.0	382.5	3.1	1.4	0.1
1966	793.9	687.8	3.4	3.2	0.6
1967	719.5	325.0	105.7	10.6	6.8
1968	200.0	146.2	132.5	24.8	9.3
1969	312.0	126.6	84.7	30.3	5.3
1970	520.0	295.0	256.0	2.7	0.3
1971	1 045.0	790.0	175.0	52.8	25.0

Registro de crecientes en la hidrométrica El Bledal



La estación de aforos El Bledal, en el arroyo del mismo nombre de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México, con clave 10027 y área de cuenca de 371 km², comenzó a operar en septiembre de 1937 y concluyó en diciembre de 1994 (n=57). Con el proceso descrito se integró su registro de cinco gastos máximos anuales independientes, como se expone en la Tabla 6.

Tabla 6. Cinco gastos máximos anuales independientes (m³/s) en la estación hidrométrica El Bledal, de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

Año		r valores anuales					
	1	2	3	4	5		
1938	766.1	120.8	89.8	77.7	2.9		
1939	597.3	204.0	16.5	13.0	11.9		
1940	170.0	28.0	19.0	8.4	1.3		
1941	118.6	17.1	10.1	4.8	3.6		
1942	64.6	33.8	6.4	0.3	0.2		
1943	157.2	150.5	40.9	32.3	12.3		
1944	197.0	46.2	1.0	0.8	0.5		
1945	414.0	253.2	144.0	21.4	0.9		
1946	291.0	95.3	14.0	7.1	0.3		
1947	174.0	8.4	0.9	0.5	0.5		
1948	233.0	141.2	106.0	3.5	0.8		



1949	155.2	25.1	15.8	1.4	1.0
1950	44.1	40.4	22.8	1.8	0.2
1951	227.4	68.0	29.6	26.7	2.5
1952	169.0	15.4	15.4	0.8	0.2
1953	668.9	334.0	155.0	12.5	0.5
1954	30.7	15.4	8.1	1.9	0.5
1955	152.0	79.8	3.9	3.7	0.3
1956	91.4	51.3	48.1	1.0	0.3
1957	283.0	30.5	28.3	0.3	0.2
1958	433.0	121.0	95.4	30.3	3.0
1959	132.4	59.3	2.4	1.1	0.3
1960	529.0	161.6	20.0	18.6	10.3
1961	122.0	92.3	3.8	1.3	0.5
1962	1 000.0	108.5	56.5	34.7	0.6
1963	335.0	123.0	61.3	0.4	0.2
1964	258.0	189.8	59.0	12.8	0.6
1965	91.5	56.8	52.2	1.3	0.4
1966	121.8	98.6	95.9	1.5	0.2
1967	325.6	115.4	92.7	46.5	8.6
1968	1 576.0	190.4	70.6	6.1	2.9
1969	228.0	42.0	24.4	0.7	0.3
1970	82.0	37.0	0.6	0.2	0.1
1971	276.0	260.0	191.0	4.3	3.1
L		l	1	1	



1972	380.0	112.0	68.6	20.6	0.5
1973	296.0	2.2	0.6	0.4	0.2
1974	256.1	98.0	64.2	46.9	25.0
1975	490.0	73.4	30.6	1.1	0.4
1976	59.6	25.0	25.0	18.4	6.1
1977	123.0	61.3	4.0	0.2	0.1
1978	255.0	21.7	5.6	0.1	0.1
1979	283.0	52.3	10.8	0.2	0.1
1980	226.0	211.1	42.6	1.3	0.2
1981	210.0	118.0	79.8	1.4	0.3
1982	67.0	62.5	18.0	11.2	4.5
1983	50.7	47.6	32.5	13.4	10.8
1984	160.0	153.1	105.2	90.5	70.5
1985	278.0	240.0	95.5	86.5	3.2
1986	723.5	25.6	15.1	13.5	1.9
1987	107.2	92.4	11.2	2.4	0.3
1988	234.3	102.5	80.6	2.8	1.6
1989	424.9	197.0	36.0	31.7	1.1
1990	459.3	332.4	86.2	18.1	2.2
1991	73.8	58.2	35.2	10.3	4.6
1992	181.1	161.9	77.6	12.7	0.9
1993	334.0	127.9	70.4	10.2	0.2
1994	278.2	143.3	101.0	3.3	0.9



Registro de niveles con tendencia en Venecia

En la Tabla 7 y Figura 2 se tienen los primeros cinco niveles máximos anuales del mar de los 10 que expuso Smith (1986), para Venecia, Italia.

Tabla 7. Registro de cinco niveles máximos anuales (metros) durante 51 años en Venecia, Italia (Smith, 1986).

Año	r	valo	res ai	nuale	S	Año	1	valo	res a	nuale	S
	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
1931	103	99	98	96	94	1957	119	107	100	98	98
1932	78	78	74	73	73	1958	124	114	113	110	108
1933	121	113	106	105	102	1959	118	117	108	107	105
1934	116	113	91	91	91	1960	145	126	123	116	114
1935	115	107	105	101	93	1961	122	108	104	100	100
1936	147	106	93	90	87	1962	114	110	108	107	106
1937	119	107	107	106	105	1963	118	116	114	112	110
1938	114	97	85	83	82	1964	107	104	104	103	102
1939	89	86	82	81	80	1965	110	108	106	102	101
1940	102	101	98	97	96	1966	194	127	126	104	103
1941	99	98	96	95	94	1967	138	118	118	107	100



1942	91	91	87	83	83	1968	144	132	123	114	112
1943	97	88	82	79	78	1969	138	120	116	114	108
1944	106	96	94	90	89	1970	123	122	119	110	105
1945	105	102	98	88	86	1971	122	116	116	109	104
1946	136	104	103	101	100	1972	120	118	113	111	96
1947	126	108	101	99	98	1973	114	111	99	98	97
1948	132	126	119	107	101	1974	96	95	95	93	92
1949	104	102	102	101	93	1975	125	110	109	103	102
1950	117	96	91	89	88	1976	124	122	114	109	108
1951	151	117	114	109	106	1977	120	102	100	98	96
1952	116	104	103	98	91	1978	132	114	110	107	105
1953	107	102	98	98	92	1979	166	140	131	130	122
1954	112	100	95	94	94	1980	134	114	111	109	107
1955	97	96	96	95	94	1981	138	136	130	128	119
1956	95	91	90	85	85	-	-	-	-	-	-

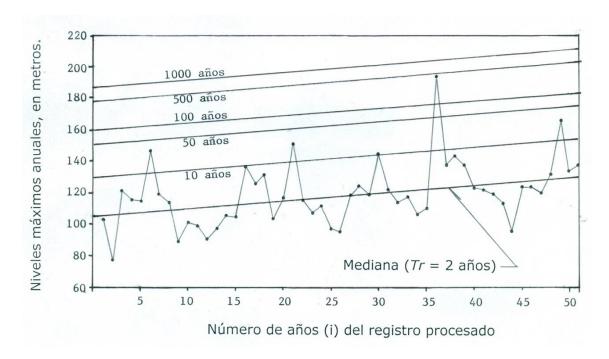


Figura 2. Serie de niveles máximos anuales (r = 1) y rectas de predicciones con tendencia lineal y covariable el tiempo (t), en Venecia, Italia.

Resultados

Prueba de aleatoriedad

Los resultados del test de Wald-Wolfowitz, definido en las ecuaciones (19) a (23), para cada uno de seis registros procesados (Tabla 1, Tabla



2, Tabla 3, Tabla 4, Tabla 5 y Tabla 6, columnas 2), son los siguientes: Mar del Norte U = -0.518; Huites U = -0.113; Santa Cruz U = -0.827; Jaina U = 1.510; Guamúchil U = -1.414; El Bledal U = 0.224, y Venecia U = 2.641. Por lo anterior, los primeros seis registros de valores máximos anuales (r = 1) son aleatorios y el de Venecia no lo es.

Ajustes a las series anuales (r = 1)

En la Tabla 8 se han concentrado los resultados de los ajustes de la distribución GVE a cada una de las series anuales de valores máximos (r=1), por medio de los métodos de sextiles, momentos Ly momentos LH. Tales resultados son los parámetros de ajuste (μ, σ, κ) y el error estándar de ajuste (EEA), cuyo valor mínimo alcanzado en cada serie se indica entre paréntesis.

Tabla 8. Error estándar de ajuste (*EEA*) y parámetros óptimos de las series anuales (r = 1), en los seis registros indicados con los tres métodos citados.

Registro	EEA	Sextiles						
		μ	σ	K				
Mar del Norte	0.189	10.048	1.139	-0.3075				
Huites	991.2	1 724.345	1 099.256	0.4778				
Santa Cruz	305.3	814.822	507.620	0.3495				



laina	200 F	F14 C72	200 172	0.4102
Jaina	208.5	514.672	390.172	0.4192
Guamúchil	177.2	373.026	260.903	0.3363
El Bledal	36.3	169.232	118.795	0.3062
Venecia	3.984	111.438	16.966	-0.1102
Registro	EEA	N	Iomentos L	
		μ	σ	κ
Mar del Norte	(0.184)	10.034	1.187	-0.3040
Huites	930.0	1 755.541	1 178.274	0.4459
Santa Cruz	282.2	826.631	402.385	0.4544
Jaina	(190.8)	516.752	381.623	0.4353
Guamúchil	153.4	362.642	250.526	0.3803
El Bledal	33.4	168.181	123.130	0.2982
Venecia	3.636	110.994	16.854	-0.0764
Registro	EEA	М		
		μ	σ	к
Mar del Norte	0.186	10.038	1.106	-0.2391
(L1)				
Huites (L2)	(830.3)	1 509.511	1 598.497	0.3264
Santa Cruz	(275.3)	743.090	473.732	0.4044
(L3)				
Jaina (L1)	191.6	514.368	387.161	0.4296
Guamúchil (L3)	(152.7)	361.325	249.637	0.3827
El Bledal (L4)	(32.0)	171.392	116.514	0.3222

Venecia (L1)	(3.587)	111.690	14.241	0.0405

Guías para la aplicación del algoritmo Complex

De inicio se buscó definir límites y valores iniciales de las variables de ajuste (μ, σ, κ) , y de las dependientes o restricciones de positividad que funcionaran para las cinco series por procesar (r = 1,...,5) de cada registro.

Durante las primeras aplicaciones del código OPTIM surgieron varias dificultades, una de ellas estuvo asociada con los límites de las variables, que son del tipo \leq . Entonces, para los límites inferiores no se debe poner cero sino 0.10 para los parámetros de ubicación (μ) y escala (σ), y 0.01 para las variables dependientes.

Respecto a los límites superiores, se encontró conveniente usar como mínimo el doble de los valores calculados para los parámetros μ y σ de la GVE de las series de gastos máximos anuales (r=1) por medio del método que condujo al *EEA* mínimo (Tabla 8). Nunca fue necesario cambiar los límites superiores para que el código OPTIM funcionara. Para las variables dependientes se adoptó un valor superior de 100.

En relación con los límites del parámetro de forma (κ), por lo general se usaron como inferior -0.50 y como superior 0.50, o bien -1 y 1. En pocas ocasiones se tuvo que restringir su límite para obtener



resultados en el orden de magnitud del *EEA* del primer registro procesado (r=1).

Finalmente, respecto a los valores iniciales de los parámetros de ajuste (μ, σ, κ) , en general funcionaron bien los valores cercanos al mejor ajuste de la GVE (Tabla 8) entre sextiles, momentos L y momentos LH con la serie de gastos máximos anuales (r=1). En la Tabla 9 se exponen los límites y valores iniciales utilizados para procesar las 30 series de valores máximos anuales.

Tabla 9. Límites y valores iniciales adoptados para los parámetros de ajuste (μ, σ, κ) en la aplicación del algoritmo Complex.

Registro	μ				σ		κ		
	inf	sup	inic	inf	sup	inic	inf	Sup	inic
Mar del	0.10	100	15	0.10	100	5	-0.50	0.50	-
Norte									0.25
Huites	0.10	4 000	1 500	0.10	3 000	1 000	-1.00	1.00	0.45
Santa Cruz	0.10	2 000	900	0.10	1 000	500	-0.50	0.50	0.35
Jaina	0.10	1 000	500	0.10	800	400	-0.50	0.50	0.45
Guamúchil	0.10	800	300	0.10	500	200	-0.50	0.50	0.30
El Bledal	0.10	300	150	0.10	200	100	-0.40	0.40	0.35

El registro de Venecia se procesó sustituyendo a la Ecuación (16) en la Ecuación (15), ahora con cuatro parámetros de ajuste. Los límites inferior y superior, y el valor inicial fueron los siguientes: $\beta_0(0.10,200,100), \ \beta_1(0.10,2,0.75), \ \sigma(0.10,30,15)$ y $\kappa(-0.50,0.50,-0.05)$.



Al procesar algunas series de ciertos registros se tuvo que cambiar un dato inicial para que el algoritmo Complex llegara a una solución cercana a la óptima y no a un mínimo local. Por ejemplo, en el registro de Mar del Norte, para la serie de r=3 se usó -0.05 para el κ inicial. Para el registro de El Bledal se limitó a 0.40 el valor de parámetro de forma κ .

Resultados del algoritmo Complex

En la Tabla 10 se muestran los principales indicadores de la aplicación del algoritmo Complex (aC), como son: la función logarítmica de máxima verosimilitud (FLMV), calculada con la Ecuación (15); el error estándar de ajuste (*EEA*), evaluado con la Ecuación (23), y los valores óptimos de los parámetros de ajuste (μ , σ , κ).

Tabla 10. Resultados del algoritmo Complex con cada serie anual de r gastos máximos en los registros indicados.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Registro:	r	FLMV	FLMV	No. EEA		Parámetros de ajuste		
		Inicial	final	Eval.	aC	μ	σ	к
Mar del	1	79.2	36.9	307	0.184	10.037	1.124	-0.2712
Norte	2	108.8	50.7	176	0.225	10.024	0.995	-0.2001
EEA _{mín} = 0.184	3	123.4	60.5	154	0.211	10.007	1.029	-0.2164
	4	158.4	66.7	164	0.196	9.993	1.071	-0.2300



	5	181.3	75.2	198	0.190	10.000	1.118	-0.2753
Huites	1	455.1	453.3	96	1363.0	1690.25	1081.08	0.5713
EEA _{mín} =	2	829.5	825.9	96	1186.1	1666.73	1054.85	0.5490
830.3	3	1185.8	1182.5	98	971.5	1759.61	1193.36	0.3971
	4	1515.7	1508.9	93	1040.4	1781.62	1196.44	0.3687
	5	1839.9	1825.6	94	900.3	1746.67	1267.03	0.4372
Santa Cruz	1	300.9	300.6	111	349.5	856.806	457.724	0.3632
<i>EEA</i> _{mín} =	2	552.8	552.1	132	267.3	819.749	463.835	0.4040
275.3	3	793.5	787.3	122	408.0	830.896	496.459	0.3006
	4	1033.3	1009.9	116	364.9	815.842	518.103	0.3090
	5	1295.4	1226.4	128	470.6	860.041	539.006	0.2255
Jaina	1	436.1	435.6	127	100.4	505.486	372.456	0.4894
<i>EEA</i> _{mín} =	2	788.2	784.3	85	230.9	550.876	377.100	0.4194
190.8	3	1106.2	1098.4	120	216.9	550.285	376.230	0.4266
	4	1403.2	1394.7	115	238.3	547.134	380.289	0.4131
	5	1676.0	1663.4	117	134.9	527.104	381.679	0.4593
Guamúchil	1	243.6	241.9	118	153.7	370.294	254.203	0.3724
EEA _{mín} =	2	448.2	444.9	145	138.0	375.509	281.706	0.3518
152.7	3	630.5	625.2	103	152.6	338.938	267.647	0.3607
	4	802.1	787.2	213	119.3	292.374	259.547	0.4991
	5	935.1	917.7	158	181.7	240.682	211.943	0.4994
El Bledal	1	374.3	373.5	99	16.6	163.134	118.291	0.3673
<i>EEA</i> _{mín} =	2	684.1	676.5	110	33.8	144.617	116.827	0.3473
32.0	3	951.4	931.5	167	42.0	131.231	108.428	0.3998
	4	1202.2	1159.1	167	71.2	115.991	99.014	0.4000
	5	1367.1	1326.9	144	140.1	93.270	76.361	0.3999



También se cita en la columna 1 de la Tabla 10 el EEA mínimo obtenido (Tabla 8) con la serie anual de máximos anuales (r=1), con alguno de los tres métodos aplicados: sextiles, momentos L y momentos LH. Contra tal valor habrá que comparar los alcanzados por el algoritmo Complex, mostrados en la columna 6 (solución robusta). Los valores del EEA adoptados se muestran sombreados en la Tabla 10: son los mínimos alcanzados por el algoritmo Complex.

Los resultados relativos a las cinco series del registro de Venecia, Italia, se han concentrado en la Tabla 11, en la cual se observa que el mejor ajuste se logró con r=2 y un valor de *EEA* cercano al mínimo del método de los momentos LH de 3.587 metros (Tabla 8).

Tabla 11. Resultados del algoritmo Complex con cada serie anual de *r* niveles máximos en el registro de Venecia, Italia, considerando tendencia lineal.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	FLMV	FLMV	No.	EEA	Parámetros de ajuste			
	inicial	final	eval.	aC	β_0	$oldsymbol{eta}_1$	σ	К
1	224.6	216.1	205	7.444	96.902	0.562	14.490	-0.0276
2	376.0	367.3	188	5.381	101.175	0.476	12.960	-0.0117
3	501.1	494.5	164	6.207	101.419	0.535	12.758	-0.0467
4	616.3	605.6	261	5.983	103.712	0.478	12.539	-0.0459
5	722.2	705.6	244	5.761	104.281	0.456	12.327	-0.0337

Discusión



Contrastes del EEA

Con base en los resultados de la Tabla 10 se deduce: (1) para el registro de Mar del Norte, que el método de máxima verosimilitud con r=1 iguala al EEA mínimo, alcanzado con el método de momentos L; (2) en los registros de las estaciones Huites y Santa Cruz se obtiene la mejor opción con r=5 en la primera y con r=2 en la segunda; en Santa Cruz se obtiene un EEA menor que el mínimo (L3) del método de momentos LH; (3) en los registros de las estaciones Jaina, Guamúchil y El Bledal se definen como mejores opciones las siguientes: r=1, r=4 y r=1, que conducen a un EEA menor que el mínimo obtenido con los métodos de momentos L en Jaina y de momentos LH en las otras dos estaciones.

Predicciones del algoritmo Complex

Seleccionadas, en cada uno de los seis registros procesados, las series de r que condujeron a los EEA menores, se contrastan las predicciones obtenidas y expuestas en la Tabla 12 contra las del método que condujo al menor EEA en la Tabla 8, para establecer las que serán



adoptadas, por ser más severas o críticas, las cuales se muestran sombreadas.

Tabla 12. Predicciones para los periodos de retorno indicados, con cada serie anual de r gastos máximos independientes en los registros indicados.

Registro	Met.		Pe	eriodos d	le retorno	(<i>Tr</i>) en	años	
	R	5	10	25	50	100	500	1 000
Mar del	ml	11.46	11.97	12.46	12.75	12.97	13.35	13.46
Norte	1	11.42	11.93	12.44	12.74	12.99	13.41	13.54
(metros)	2	11.31	11.83	12.38	12.72	13.02	13.56	13.75
	3	11.33	11.84	12.38	12.72	13.01	13.52	13.70
	4	11.35	11.87	12.42	12.75	13.03	13.53	13.70
	5	11.37	11.88	12.35	12.67	12.92	13.33	13.46
Huites	L2	4 603	6 821	10 523	14 113	18 593	33 829	43 286
(m³/s)	1	4 256	6 642	11 562	17 380	25 997	65 651	97 674
	2	4 123	6 355	10 869	16 112	23 758	57 976	84 967
	3	4 206	6 099	9 457	12 906	17 428	34 194	45 434
	4	4 178	5 976	9 089	12 213	16 228	30 607	39 953
	5	4 432	6 600	10 581	14 805	20 501	42 685	58 214
Santa	L3	1 720	2 482	3 842	5 247	7 098	14 024	18 704
Cruz	1	1 770	2 450	3 624	4 796	6 297	11 637	15 087
(m³/s)	2	1 776	2 521	3 851	5 225	7 035	13 801	18 370
	3	1 772	2 428	3 499	4 516	5 762	9 870	12 349
	4	1 804	2 500	3 644	4 738	6 086	10 575	13 308



	5	1 822	2 440	3 387	4 232	5 214	8 174	9 817
Jaina	ml	1 324	1 975	3 168	4 431	6 133	12 745	17 364
(m³/s)	1	1 330	2 034	3 386	4 882	6 975	15 670	22 108
	2	1 338	1 962	3 091	4 271	5 843	11 832	15 945
	3	1 341	1 972	3 120	4 328	5 945	12 162	16 465
	4	1 337	1 959	3 077	4 240	5 783	11 615	15 593
	5	1 351	2 032	3 307	4 684	6 569	14 116	19 526
Guamúch	L3	867	1 252	1 928	2 613	3 503	6 744	8 883
il	1	881	1 266	1 934	2 607	3 474	6 592	8 628
(m³/s)	2	932	1 342	2 042	2 735	3 615	6 702	8 672
	3	872	1 268	1 949	2 628	3 497	6 576	8560
	4	872	1 371	2 339	3 418	4 938	11 329	16 109
	5	714	1 122	1 913	2 795	4 037	9 264	13 175
El Bledal	L4	396	557	823	1 081	1 402	2 487	3 158
(m³/s)	1	400	577	884	1 191	1 586	2 997	3 912
	2	375	543	830	1 112	1 470	2 719	3 512
	3	354	527	834	1 151	1 566	3 112	4 151
	4	320	477	758	1 047	1 427	2 840	3 790
	5	250	372	589	811	1 104	2 194	2 927
Venecia	L1	133.7	145.2	160.3	171.9	183.7	212.3	225.2
(metros)	1	146.9	157.2	169.9	179.2	188.2	208.3	216.7
	2	144.7	154.2	166.1	174.9	183.5	203.1	211.5
	3	147.2	156.0	166.6	174.2	181.5	197.5	204.0
	4	146.2	154.9	165.4	172.9	180.1	195.9	202.3
	5	145.5	154.2	164.9	172.6	180.0	196.6	203.5
		1]				



Se aclara que las predicciones mostradas para las cinco series de Venecia, Italia, corresponden al final del periodo histórico, es decir, utilizando la covariable t con un valor de 51, en la Ecuación (16), al aplicarla en la Ecuación (7).

Asimismo, debido a la amplitud que muestran (33 $\leq n \leq$ 57) los cinco registros de crecientes procesados de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México, sus predicciones confiables pueden abarcar hasta el periodo de retorno (Tr) de 100 años; sin embargo, se presentan las de Tr = 500 y 1 000 años para observar el grado de dispersión que tales predicciones robustas muestran en ambos intervalos de recurrencia extremos.

Para el registro de Santa Cruz, en los periodos de retorno (Tr) mayores de 50 años se observan en la Tabla 12 predicciones ligeramente más grandes con el método de los momentos LH, que con las soluciones robustas del método de los r eventos máximos anuales. Lo mismo ocurre en el registro de Venecia, pero exclusivamente en los periodos de retorno (Tr) de 500 y 1 000 años.

Por otra parte, para los registros de Huites (r=5), Santa Cruz (r=2) y Guamúchil (r=4) se obtuvieron predicciones más severas o críticas con el ajuste de la GVE y el método de r eventos anuales, que las alcanzadas con los métodos clásicos, que utilizan un valor máximo anual. Lo anterior es notable en el registro de Guamúchil.

Finalmente, en los registros restantes (Mar del Norte, Jaina y El Bledal) con r=1, el método de máxima verosimilitud iguala o reduce el *EEA* alcanzado por los métodos clásicos de momentos L y LH. En la estación Jaina es factible adoptar los resultados de la serie con r=5 si se desea una solución robusta con un *EEA* ligeramente mayor.



Conclusiones

El ajuste de la distribución GVE, con el método de máxima verosimilitud y utilizando r eventos máximos anuales, es un procedimiento que permite utilizar más información de los valores extremos observados y, por lo tanto, realiza *predicciones* más confiables, ya que se están estimando sus parámetros de ajuste con más precisión. En resumen, conduce a una solución robusta desde un punto de vista estadístico.

Las siete aplicaciones numéricas descritas mostraron que la maximización de la función logarítmica de verosimilitud mediante el algoritmo Complex no presentó dificultades computacionales. Además, encuentra soluciones óptimas que mejoran el ajuste logrado con los métodos clásicos de momentos L y LH, que utilizan únicamente el valor máximo anual. Este fue el caso en cuatro de los cinco registros de crecientes procesados (Tabla 10).

Con base en la última aplicación numérica, relativa a los cinco niveles máximos del mar en Venecia, Italia, se observa la simplicidad para procesar registros no estacionarios que presentan tendencia lineal. Lo anterior, debido a la facilidad para incrementar variables de decisión, cambiar sus límites y/o valores iniciales, y modificar la función objetivo en el algoritmo Complex.

Con respecto a las predicciones, las cuales variaron de un periodo de retorno de 5 a 1 000 años, las soluciones alcanzadas con el



algoritmo Complex reportaron en general valores más grandes o críticos. Lo anterior fue notable en los registros de Guamúchil, Jaina y El Bledal. La excepción fue el registro de la estación Santa Cruz en los altos periodos de retorno, donde se obtuvieron predicciones ligeramente menores (Tabla 12).

Tomando en cuenta que no implica gran dificultad integrar registros de crecientes independientes con cinco valores máximos por año y que la implementación del algoritmo Complex es simple, se recomienda aplicar sistemáticamente el ajuste de la distribución GVE con r eventos anuales en el análisis de frecuencias de crecientes.

Agradecimientos

Se agradecen los comentarios constructivos de los árbitros anónimos A y B, los cuales permitieron corregir varios errores ortográficos e incluir dos explicaciones relativas a los datos procesados y predicciones realizadas.

Referencias

- An, Y., & Pandey, M. D. (2007). The *r* largest order statistics model for extreme wind speed estimation. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 95(3), 165-182.
- Benson, M. A. (1962). Plotting positions and economics of engineering planning. *Journal of Hydraulics Division*, 88(6), 57-71.
- Bobée, B., & Ashkar, F. (1991). Chapter 1: Data requirements for hydrologic frequency analysis. In: *The Gamma Family and derived distributions applied in Hydrology* (pp. 1-12). Littleton, USA: Water Resources Publications.



- Box, M. J. (1965). A new method of constrained optimization and a comparison with other methods. *Computer Journal*, 8(1), 42-52.
- Bunday, B. D. (1985). Theme 6.2: The Complex method. In: *Basic Optimisation Methods* (pp. 98-106). London, UK: Edward Arnold publishers, Ltd.
- Campos-Aranda, D. F. (2000). Descripción y aplicación del modelo Poisson-Pareto para el análisis de frecuencia de crecientes con series de duración parcial. *Ingeniería*. *Investigación y Tecnología*, 1(5), 199-207.
- Campos-Aranda, D. F. (2001). Contraste de cinco métodos de ajuste de la distribución GVE en 31 registros históricos de eventos máximos anuales. *Ingeniería Hidráulica en México*, 16(2), 77-92.
- Campos-Aranda, D. F. (2003). Capítulo 9: Optimización Numérica. En:

 Introducción a los métodos numéricos: software en Basic y
 aplicaciones en hidrología superficial (pp. 172-211). San Luis
 Potosí, México: Editorial Universitaria Potosina.
- Campos-Aranda (2014). Análisis regional de frecuencia de crecientes en la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México. 1: índices de estacionalidad y regiones de influencia. *Agrociencia*, 48(2), 147-158.
- Campos-Aranda, D. F. (2016). Ajuste de las distribuciones GVE, LOG y PAG con momentos L de orden mayor. *Ingeniería. Investigación y Tecnología*, 17(1), 131-142.
- Chai, T., & Draxler, R. R. (2014). Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)? Arguments against avoiding RMSE in the literature. *Geoscientific Model Development*, 7, 1247-1250.



- Clarke, R. T. (1973). Chapter 5: The estimation of floods with given return period. In: *Mathematical Models in Hydrology* (pp. 130-146) (Irrigation and Drainage Paper 19). Rome, Italy: Food and Agriculture Organization.
- Coles, S. (2001). Chapter 2: Basics of Statistical Modeling, chapter 3: Classical Extreme Value Theory and Models, and chapter 6: Extremes of Non-stationary Sequences In: *An introduction to Statistical Modeling of Extreme Values* (pp. 18-44, 45-73, 105-123). London, UK: Springer-Verlag.
- Dupuis, D. J. (1997). Extreme value theory based on the r largest annual events: a robust approach. *Journal of Hydrology*, 200(1-4), 295-306.
- Guedes-Soares, C., & Scotto, M. G. (2004). Application of the *r* largest-order statistics for long-term predictions of significant wave height. *Coastal Engineering*, 51(5-6), 387-394.
- Hosking, J. R., & Wallis, J. R. (1997). Appendix: *L*-moments for some specific distributions. In: *Regional Frequency Analysis. An approach based on L-moments* (pp. 191-209). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- IMTA, Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. (2002). Banco Nacional de Datos de Aguas Superficiales (BANDAS). 8 CD's. Jiutepec, México: Comisión Nacional del Agua-Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales-Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.
- Katz, R. W., Parlange, M. B., & Naveau, P. (2002). Statistics of extremes in hydrology. *Advances in Water Resources*, 25(8-12), 1287-1304.



- Khaliq, M. N., Ouarda, T. B. M. J., Ondo, J. C., Gachon, P., & Bobée, B. (2006). Frequency analysis of a sequence of dependent and/or non-stationary hydro-meteorological observations: A review. *Journal of Hydrology*, 329(3-4), 534-552.
- Kite, G. W. (1977). Chapter 3: Frequency distributions and chapter 12: Comparison of frequency distributions. In: *Frequency and Risk Analyses in Hydrology* (pp. 27-39, 156-168). Fort Collins, USA: Water Resources Publications.
- Kottegoda, N. T., & Rosso, R. (2008). Chapter 3: Random variables and their properties. In: *Applied Statistics for Civil and Environmental Engineers* (pp. 83-164). Oxford, UK: Blackwell Publishing Ltd.
- Meylan, P., Favre, A. C., & Musy, A. (2012). Chapter 3: Selecting and checking data series and chapter 5: Estimation of model parameters. In: *Predictive Hydrology. A Frequency Analysis Approach* (pp. 29-70, 91-102). Boca Raton, USA: CRC Press.
- Ramesh, N. I., & Davison, A. C. (2002). Local models for exploratory analysis of hydrological extremes. *Journal of Hydrology*, 256(1-2), 106-119.
- Rao, A. R., & Hamed, K. H. (2000). Theme 1.8: Tests on hydrologic data and chapter 4: Parameter and quantile estimation. In: *Flood Frequency Analysis*. (pp. 12-21, 73-82). Boca Raton, USA: CRC Press.
- Schulz, E. F. (1976). Section 9: Probability Analysis. In: *Problems in Applied Hydrology* (pp. 411-457). Fort Collins, USA: Water Resources Publications.
- Smith, R. L. (1986). Extreme value theory based on the r largest annual events. *Journal of Hydrology*, 86(1-2), 27-43.



- Stedinger, J. R. (2017). Flood frequency analysis. In: Singh, V. P. (ed.). Handbook of Applied Hydrology, 2nd ed. (pp. 76.1-76.8). New York, USA: McGraw-Hill Education.
- Tawn, J. A. (1988). An extreme-value theory model for dependent observations. *Journal of Hydrology*, 101(1-4), 227-250.
- Wang, Q. J. (1997a). Using higher probability weighted moments for flood frequency analysis. *Journal of Hydrology*, 194(1-4), 95-106.
- Wang, Q. J. (1997b). LH moments for statistical analysis of extreme events. *Water Resources Research*, 33(12), 2841-2848.