

**Evolución del trazador en los flujos naturales descrita por la función de estado  $\phi(U, E, t)$ : análisis de las funciones asociadas y su aplicación a casos prácticos**  
**Evolution of the tracer in natural flows described by the state function  $\phi(U, E, t)$ : Analysis of the associated functions and their application to case studies**

Alfredo Contain<sup>1</sup>, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6442-0715>

Carlos Peña-Guzmán<sup>2</sup>, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0496-9612>

<sup>1</sup>FLUVIA, Bogotá, Colombia, [alfredoconstain@fluvia.co](mailto:alfredoconstain@fluvia.co)

<sup>2</sup>Programa de Ingeniería Ambiental y Sanitaria, Universidad de la Salle, Bogotá, Colombia, [cpena@unisalle.edu.co](mailto:cpena@unisalle.edu.co), [carpeguz@gmail.com](mailto:carpeguz@gmail.com)

Autor para correspondencia: Carlos Andrés Peña-Guzmán, [carpeguz@gmail.com](mailto:carpeguz@gmail.com)

## Resumen

Los trazadores como método de medición y caracterización de la evolución de los flujos naturales, además de ofrecer información de la dinámica (advección) y la dispersión como fenómenos “locales” propiamente dichos, pueden dar información adicional, densa, sobre las condiciones globales (lejanas del punto de medición), en virtud de la conexión termodinámica que se establece entre todos los puntos del sistema cuando existe un estado estable en el cauce. Como ha sido estudiado ampliamente desde la segunda mitad del siglo pasado, esta condición de equilibrio dinámico (estado estable) en los flujos naturales para los fenómenos que no presentan una irreversibilidad pronunciada (región lineal de la termodinámica irreversible) implica una serie de características notables que simplifican la interpretación de los complejos fenómenos de las corrientes turbulentas y, por ende, de los procesos dispersivos que se superponen. Dentro de este enfoque, se define una función de estado,  $\Phi(U, E, t)$ , dependiente de la velocidad media del flujo, el coeficiente longitudinal de dispersión y el tiempo, que describe la evolución de la nube de trazador, de tal forma que en su calidad aproximada de potencial termodinámico permite descubrir y precisar ciertas particularidades del fenómeno. En este artículo se exploran las características y aplicaciones prácticas de estos principios. Se incluye además un análisis heurístico de las llamadas funciones directas  $rq(\Phi)$  e inversas  $rq(\Phi)^{-1}$ , auxiliares a la función de estado  $\Phi(U, E, t)$ , que se utilizan tanto para la interpretación del tiempo del centroide como de los

coeficientes de difusión-dispersión longitudinal y transversal. Estas funciones fueron aplicadas experimentalmente en la quebrada "La Vieja" de la ciudad de Bogotá, presentando buena concordancia con los referentes teóricos. Con este tema se pretende ofrecer una herramienta teórico-práctica para entender cabalmente estos procesos, que tienen tanto interés para la modelación y control de las contaminaciones hídricas.

**Palabras clave:** trazadores, estado estable de los cauces, termodinámica irreversible.

### **Abstract**

The tracers as a method of measuring and characterizing the evolution of natural flows, in addition to providing information on the dynamics (advection) and dispersion as "local" phenomena themselves, can give additional, dense information on the global conditions (far from the point of measurement) under the thermodynamic connection that is established between all the points of the system, when there is a steady-state in the channel. As has been widely studied since the second half of the last century, this condition of dynamic equilibrium (steady-state) in natural flows, for phenomena that do not present pronounced irreversibility (linear region of irreversible thermodynamics), implies a series of remarkable features that simplify the interpretation of the complex phenomena of turbulent currents, and thus of the superimposed

dispersive processes. Within this approach, a state function,  $\Phi(U, E, t)$ , dependent on the mean flow velocity, the longitudinal dispersion coefficient, and time, is defined that describes the evolution of the tracer cloud, such that in its approximate quality of thermodynamic potential, it allows one to discover and pinpoint certain particularities of the phenomenon. In this paper, the characteristics and practical applications of these principles are explored. It also includes a heuristic analysis of the so-called direct functions  $rq(\Phi)$  and inverse  $rq(\Phi)^{-1}$ , auxiliary to the state function  $\Phi(U, E, t)$ , which are used for the interpretation of the centroid time, as well as the longitudinal and transverse diffusion-dispersion coefficients employing these functions were applied experimentally in the old stream of the city of Bogotá, "La Vieja", presenting good agreement with the theoretical references. This topic is intended to provide a theoretical and practical tool to fully understand these processes, which are of great interest for the modeling and control of water pollution.

**Keywords:** Tracers, stable state of channels, irreversible thermodynamics.

Recibido: 30/06/2020

Aceptado: 11/05/2021

## Introducción

Las partículas de los trazadores son de comportamiento muy similar al de las del agua, condición que permite una gran variedad de aplicaciones (calidad, hidrodinámica e hidráulica) (Camacho & González, 2008; Constaín, Villa, & Bastidas, 2013; Constaín *et al.*, 2019a; Engelhardt *et al.*, 2011; Harvey, Wagner, & Bencala, 1996; Jin, White, Ramsey, & Kipphut, 2012; Punt, Millward, & Harris, 2003); asimismo, por sus características, permiten ser detectadas con precisión y facilidad por instrumentos adecuados, ya sea por métodos ópticos o de conductividad; sus impactos ambientales son inexistentes o relativamente pequeños si se usan en cantidades apropiadas.

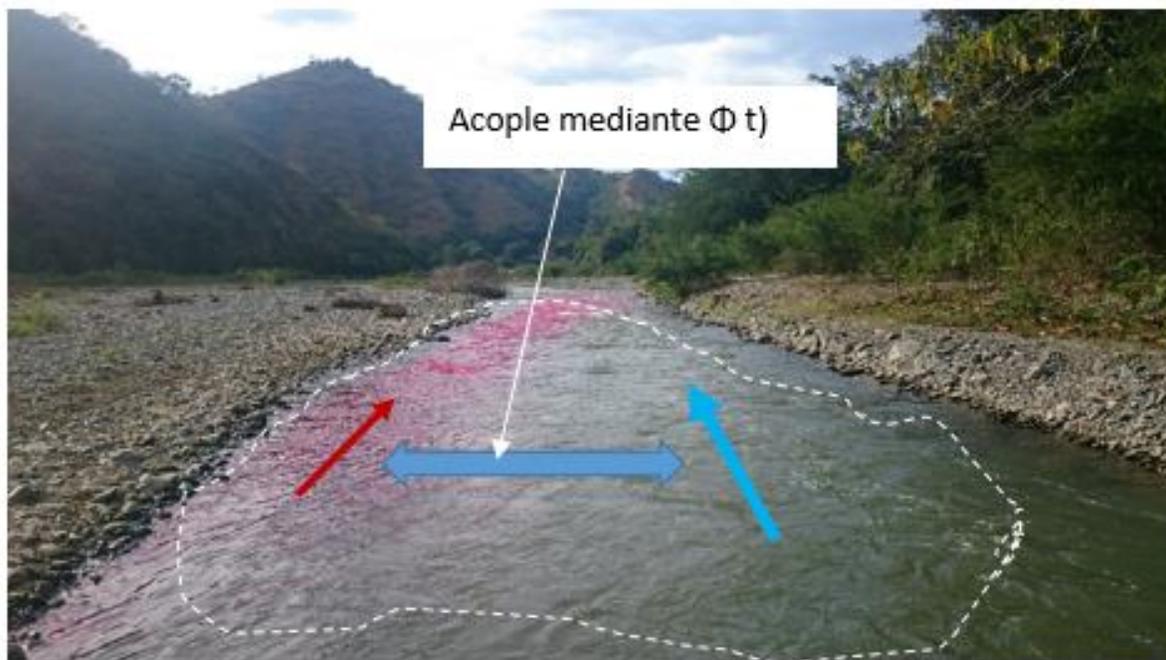
La aplicación de los trazadores ha mostrado a través del tiempo que son una representación fiel de las condiciones dinámicas del flujo (como ocurre en los irregulares cauces de montaña) (Camacho & Cantor, 2006), pero además por tener propiedades de acople termodinámico con el mismo flujo (Constaín, 2013a; Rogowski, Merrifield, Ding, Terrill, & Gesirich, 2019), agrega una cantidad importante de información vital, que los métodos hidrométricos tradicionales (correntómetros mecánicos y perfiladores Doppler de ultrasonido) no alcanzan a entregar (Tazioli, 2011).

Particularmente, se utiliza en los estudios prácticos de trazadores la tinta artificial Rodamina WT, la cual presenta varias características ventajosas (en costo relativo, detectabilidad, impacto ambiental, vida media, etc.) sobre cualquier otro tipo de trazador, como por ejemplo sales iónicas fuertes (p. ej., NaCl o KCl) o isótopos radioactivos de vida media de semidesintegración muy corta (p. ej., el tricloruro de oro).

El estudio de la termodinámica y el transporte de solutos en los flujos naturales ha permitido generar una función de estado ( $\Phi(U, E, t)$ ), la cual presenta una alta importancia en el estudio de trazadores y sus aplicaciones, ya que representa la evolución de la pluma del trazador y permite definir la forma, tamaño y asimetría de su curva (Constaín, 2013b).

Además, esta función describe el acople entre la evolución de los trazadores y el flujo, especialmente cuando el flujo natural está en estado estable (subconjunto del equilibrio dinámico) (Abrahams, 1968; Leopold & Langbein, 1962), es decir, cuando las fluctuaciones mecánicas del flujo turbulento no alcanzan a llevar a esa turbulencia a un estado de desbocamiento para estos sistemas irreversibles abiertos, y se mantiene una conservación del estado (Kondepudi & Prigogine, 2005; Nicolis & Prigogine, 1989). En esta fase —y no menos importante—, la producción de entropía es mínima (y lo más uniforme posible en el volumen considerado) y la entropía como tal es máxima, *generando condiciones de homogeneidad probabilística en todo el volumen de cauce en estudio* de acuerdo con la definición de Boltzmann, condición que precisamente

favorece el acople termodinámico entre la pluma de trazador (y su función de estado característica) y todo el flujo, por extendido que sea. Tal concepto se puede ver en la Figura 1, donde la pluma de trazador que representa el efecto local se muestra por la flecha roja y el flujo, en su efecto global, se muestra por la flecha azul.



**Figura 1.** Acople termodinámico entre lo local (trazador) y lo global (flujo) en un cauce.

Por lo tanto, es importante mencionar que la evolución de un trazador en un flujo natural turbulento está guiada no sólo en la dinámica

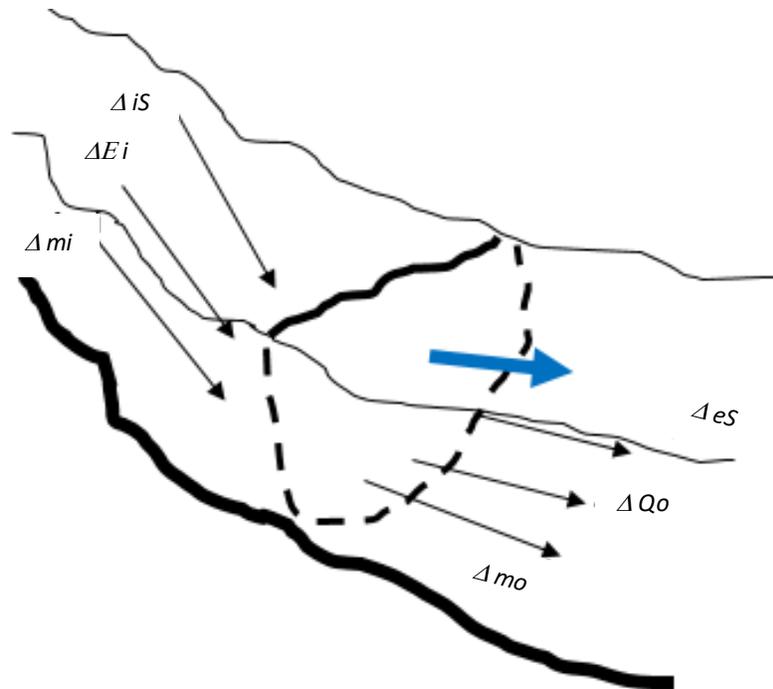
(leyes de conservación), sino también por las leyes de la termodinámica irreversible de los sistemas abiertos cercanos al equilibrio. Dicha evolución se puede calcular y caracterizar con la función  $\Phi(U, E, t)$ , que es un cierto potencial termodinámico, de naturaleza general, ya que disminuye con el tiempo (luego de haber aumentado bruscamente). A diferencia de otros potenciales termodinámicos, esta función de estado especial es *adimensional*, permitiendo asociarle diferentes razones, según conveniencia.

Por lo tanto, el presente artículo analizará en detalle la identidad y aplicación de la función de estado, y presentará el desarrollo de dos formulaciones procedentes de la función de estado para el uso en el análisis de trazadores en cauces.

## **Análisis teórico**

### **Estado estable**

En la práctica, el estado estable en un cauce natural se puede caracterizar por un nivel constante de entropía y energía, y por la conservación estadística temporal de los parámetros geométricos y dinámicos del mismo cauce (Teuling, Andel, Troch, & Hoitink, 2006). En efecto, se va a tener un equilibrio entre masa entrante,  $\Delta m_i$ , de material sedimentario que se fijará en el perímetro del lecho, y masa saliente,  $\Delta m_o$ , de material erosionado de ese mismo lecho; también se tendrá un equilibrio entre la energía potencial gravitatoria entrante,  $\Delta E_i$ , y energía térmica saliente,  $\Delta Q_o$ , expulsada al exterior, producto de los procesos irreversibles dentro de la pluma, y un equilibrio entre entropía producida en el sistema,  $\Delta iS$ , y la entropía intercambiada en la frontera del sistema,  $\Delta eS$ ; esta condición se puede ver en la Figura 2.



**Figura 2.** Equilibrios en un flujo natural en estado estable.

## El acople termodinámico entre el entorno inmediato y el medio exterior para la evolución de una pluma de trazador en un cauce en estado estable

En estado estable en un cauce natural participa de la *región lineal* de la termodinámica irreversible, en la que los flujos termodinámicos son proporcionales a las fuerzas termodinámicas y en la que la producción interna de entropía  $\Delta iS/\Delta t$  es un *mínimo* (Kondepudi & Prigogine, 2005). En estas condiciones, todos los puntos del flujo considerado (de acuerdo con Boltzmann) son *equiprobables*, o sea las distribuciones probabilísticas,  $\rho(X, t)$  son virtualmente iguales en todos los puntos del sistema global, y no sólo en el volumen local de la pluma de trazador (Constaín *et al.*, 2019b). Por lo tanto, una función de estado,  $\Phi(U, E, t)$ , definida para la evolución de la pluma, contendrá también *información sensible de todo el tramo de flujo*, y no tendrá sentido hacer una distinción estricta entre entorno inmediato y medio exterior. Analíticamente esto implica, en primer lugar, que las distribuciones probabilísticas en el flujo irán siendo cada vez más parecidas en los diferentes subvolúmenes del sistema. Esta condición forzará fuertemente a los diferentes fenómenos en el flujo a comportarse de tal forma que las variables de estado tenderán a *conservarse* para que su homogeneización facilite su análisis integral. En segundo lugar, y no menos importante, la función particular  $\Phi(U, E, t)$  permite llevar a la práctica la medición e interpretación de esas propiedades termodinámicas integradoras.

## **La función de estado $\Phi(U, E, t)$ y su papel guía en la dinámica de trazadores**

Para las mediciones de trazador documentadas en este artículo se aplica un sistema de medición FLUVIA F-1, que toma las curvas de trazador en tiempo real, y muestra las principales características numéricas de la pluma y de su acople termodinámico con todo el flujo, considerando que el cauce se encuentra en estado estable. Este equipo consta de una unidad electrónica que conecta con dos sensores (NaCl y Rodamina WT que pueden actuar simultáneamente), y una tableta que muestra en pantalla las curvas y modelos correspondientes, y luego los datos numéricos (entre los que está el valor específico de la función de estado). El *software* es una plataforma digital que consta de un modelo gráfico, un módulo de comunicación, un módulo matemático y un módulo de calibración; este equipo permite aplicar en la práctica los nuevos principios y las nuevas ecuaciones es importante para pasar de lo teórico a lo experimental, verificable, por su capacidad de evaluar los experimentos de manera instantánea. El equipo FLUVIA F-1 se muestra en la Figura 3.



**Figura 3.** Equipo FLUVIA F-1 de medición y modelación de trazadores.

Constaín y Lemos (2011) detallaron la fundamentación básica del método FLUVIA, por lo tanto se desarrolla aquí la aplicación práctica de la función de estado a la descripción de la evolución de las plumas de trazador en los flujos naturales.

## La definición de la función de estado, $\Phi(U, E, t)$

En resumen, esta función responde al concepto de recuperación del equilibrio químico propuesta por Le Chatelier-Braun. Se define específicamente así:

$$\Phi(U, E, t) = \frac{V_{sep}}{U} \quad (1)$$

Donde  $V_{sep}$  es la velocidad de alejamiento mutuo de las partículas de trazador una vez inyectadas al flujo, definida así:

$$V_{sep} = \frac{\Delta}{\tau} = \frac{\sqrt{2E\tau}}{\tau} = \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \quad (2)$$

Nótese que el desplazamiento característico,  $\Delta$ , asociado con la dispersión se define como un desplazamiento Browniano, en correspondencia con el modelo usual de las partículas en un gas ideal clásico, y que el tiempo se mide también como un valor característico ( $\tau$ ) que es diferente al marco temporal general, pues en realidad corresponde a un proceso de conteo Poissoniano de las partículas del trazador.

Con base en este proceso de conteo, y teniendo en cuenta la expansión exponencial correspondiente, se puede hallar la relación entre el tiempo característico y el tiempo general, tal que  $e^{-1.54} \approx \tau/t \approx \beta \approx 0.214\dots$ , donde 1.54 es el valor promedio de la distribución de partículas Brownianas por unidad de grátula, descubierta por Svedberg en sus investigaciones a principios del siglo XX (Mises, 1981). Igualmente, este valor específico (1.54) aparece en hidrodinámica como la razón entre la distancia máxima de los vórtices turbulentos y la distancia estadística en vertical de dicho movimiento, para condición de isotropía de la turbulencia (Simonenko, 2006).

Por lo tanto, a partir de las ecuaciones (1) y (2) se tiene:

$$U \approx \frac{1}{\Phi} \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \quad (3)$$

Ecuación básica de la velocidad media, similar en su estructura cuadrática a la ecuación de Chezy-Manning, y que es la solución de la llamada ecuación diferencial de Taylor:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} \approx E \frac{\partial^2 (\frac{\partial c}{\partial x})}{\partial x^2} \quad (4)$$

Despejando de la Ecuación (3) el coeficiente longitudinal de dispersión, y reemplazándolo en la ecuación clásica de advección-dispersión básica, se tiene una solución modificada de Fick:

$$C(X, t) \approx \frac{M}{A(4\pi E^* t)} e^{-\frac{(X_0 - U^* t)^2}{4E^* t}} + C_0 \quad (5)$$

Aquí  $M$  es la masa del soluto inyectado al flujo y  $X_0$  es la distancia a la cual se mide la nube de trazador desde el punto de inyección. Se tiene que la desviación típica de la curva que es proporcional a  $\sqrt{(2^*E^*t)}$  y  $C_0$  es la concentración propia del flujo.

Para movimientos totalmente aleatorios (Brown-Gauss), y naturalmente cumpliendo con la condición de Pfaff, representa convenientemente la pérdida de grados de libertad (Pogliani & Berberan-Santos, 2000):

$$\oint d\Phi(U, E, t) = 0 \quad (6)$$

El tiempo característico de la dispersión-difusión es proporcional al tiempo  $t$  como variable independiente:

$$\Phi(U, E, t) \approx 2.16 * \left(\frac{\sigma t}{t}\right) \approx 2.16 * \left(\frac{1}{k}\right) \quad (7)$$

Donde  $k$  es una variable que indica las veces que la desviación típica,  $\sigma t$ , está en el tiempo transcurrido por el pico de la curva Fickiana.

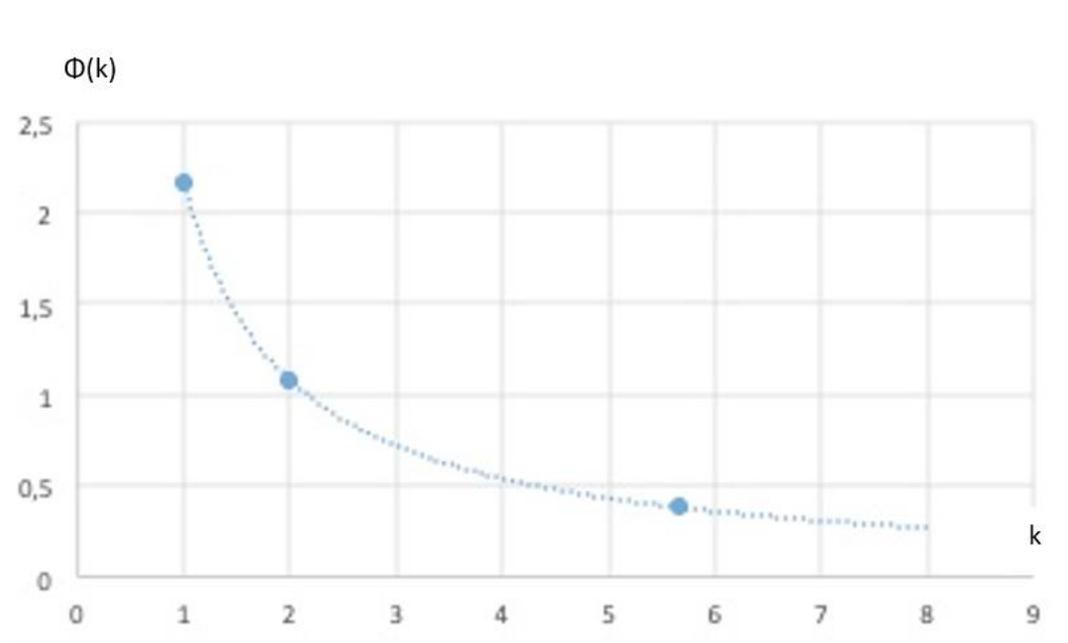
Como ya se dijo, una característica importante de la función de estado  $\Phi(U, E, t)$  es que, a diferencia de los potenciales termodinámicos usuales, es una magnitud *adimensional*, lo que permite asociarla con diversidad de razones según conveniencia.

### **Definición numérica de $\Phi(U, E, t)$**

Dado que  $\Phi(U, E, t)$  tiene diferentes curvas para diferentes casos dependiendo de las características del flujo y de la inyección del trazador, es importante poner su curva en un concepto universal, en función de la razón  $k = t / \sigma t$ . Para construir una curva aproximada se parte de puntos notables que son  $\Phi \approx 2.16$  para  $k = 1.0$ ,  $\Phi \approx 1.08$  para  $k = 2.0$ ,  $\Phi \approx 0.38$  para  $k \approx 4\sqrt{2}$  (Constaín, 2012).

Por lo tanto, se puede establecer que la curva potencial de forma aproximada es (Figura 4):

$$\Phi \approx 2.162 * \left(\frac{1}{k}\right) \quad (8)$$



**Figura 4.** Definición general de la función de estado.

El desarrollo numérico de esta función muestra claramente que es un potencial termodinámico, en tanto la curva empieza en el equilibrio, sube hasta un máximo y desciende paulatinamente en el tiempo, asintóticamente hacia el equilibrio.

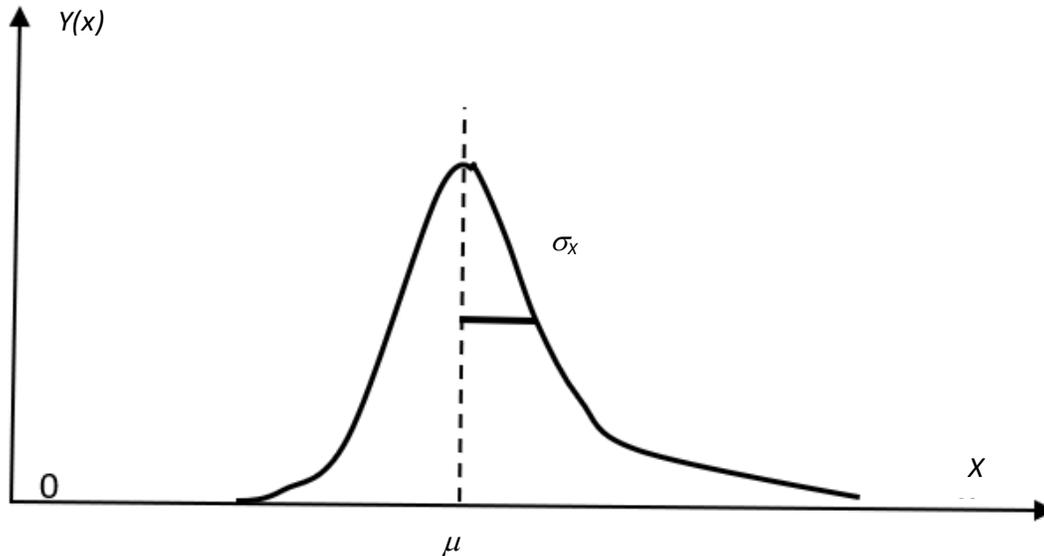
## **Naturaleza Fickiana de la dispersión: un asunto zanjado mediante la interpretación que aporta la función de estado**

Desde la época de los primeros investigadores de la dispersión en flujos turbulentos, la duda de si el transporte dispersivo mono dimensional es o no un mecanismo Fickiano ha estado presente. Esta naturaleza se cumple si la desviación típica cuadrática en la distancia es proporcional al tiempo:

$$\sigma_x^2 = 2Et \quad (9)$$

Lo cual está de acuerdo con la definición general de función de Gauss, con  $\mu$  como valor promedio de la distribución, tal como se muestra en la Figura 5:

$$y(X) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (10)$$



**Figura 5.** Curva Gaussiana en función de la distancia.

La discrepancia nacía del hecho experimental incuestionable de que la anchura de la mancha del trazador,  $\sigma_x$ , crecía no como proporcional a la raíz del tiempo ( $\sim\sqrt{t}$ ), sino más bien como proporcional a dicho tiempo ( $\sim t$ ) (Cushman-Roisin, 2008). Esta observación inquietante se verificaba incluso a diferentes escalas, muy diferentes entre sí, tal como muestra la gráfica de la Figura 6, en la que el coeficiente de difusión longitudinal,  $E$ , es dimensionalmente proporcional con el tamaño de la pluma (es decir, con  $\sigma_x$ ), en contradicción con la Ecuación (9).

Esta aparente grave contradicción se puede sortear si se reinterpretan de forma adecuada las magnitudes involucradas y se acepta

que el coeficiente longitudinal de difusión,  $E$ , es una función del tiempo y por tanto *no es una constante*, como corrientemente se asume.

A partir de la Ecuación (9), que está en función de  $t$ , se tiene:

$$\sigma_x \approx \sqrt{2 * E * t} \quad (11)$$

Ahora, la Ecuación (2) está en función de  $\tau$ :

$$\Delta \approx \sqrt{2 * E * \tau} \approx \sqrt{2 * E * \beta * t} \quad (12)$$

Por lo tanto:

$$\Delta \approx \sigma_x * \sqrt{\beta} \quad (13)$$

Con base en las ecuaciones (1) y (2) se tiene:

$$\tau \approx \frac{\sigma_x * \sqrt{\beta}}{\Phi * U} \quad (14)$$

Si se tiene en cuenta que:

$$U \approx \frac{\sigma_x}{\sigma_t} \quad (15)$$

Entonces:

$$\tau \approx \frac{\sigma_t \cdot \sqrt{\beta}}{\phi} \quad (16)$$

Ahora, utilizando las ecuaciones anteriores, se tiene:

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left( \frac{\sigma_t}{t} \right) \quad (17)$$

Se puede escribir la siguiente expresión, como consecuencia de lo anterior:

$$\sigma_t \approx \left( \frac{2.16}{\phi} \right) * t \quad (18)$$

Y entonces:

$$\sigma_x \approx \left( \frac{2.16}{U \cdot \phi} \right) * t \quad (19)$$

Es evidente entonces, que para valores aproximadamente constantes de  $U$  y  $\Phi$ , tal como es válido en tramos usualmente

encontrados en el trabajo de campo, de acuerdo con la ecuación anterior, la anchura de la pluma ( $\sigma_x$ ) es *proporcional al tiempo,  $t$ , no a su raíz*. Por lo tanto, la naturaleza Fickiana se mantiene sólo a costa de aceptar que la relación entre  $\sigma_x$  y los otros parámetros está en función de  $\Phi(U, E, t)$ .

## **Una nueva versión de la ecuación de Fick para la evolución de los trazadores**

A partir de las ecuaciones (1) y (2) se puede hallar una nueva definición para la velocidad media del flujo, tal como:

$$U \approx \frac{1}{\Phi} \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \quad (20)$$

Esta expresión unidimensional, que describe la difusión por efecto cortante como un mecanismo Browniano, tiene la misma forma matemática (cuadrática) que la ecuación de Chezy-Manning, sólo que mientras ésta se define para fuerzas mecánicas, la Ecuación (8) responde a la acción de las fuerzas eléctricas dispersivas de Van der Waals, que son

las que actúan en la dispersión de las partículas de trazadores en el flujo (Constaín & Lemos, 2011).

Ahora, de esta misma ecuación se puede despejar el coeficiente longitudinal de dispersión,  $E$ , tal como se muestra a continuación, donde  $\delta \approx 1 / \beta \approx 4.669$ , que es la constante de Feienbaum (Stewart, 1997):

$$E \approx \frac{\Phi^2 * U^2 * \left(\frac{1}{\delta}\right) * t}{2} \approx \frac{\Phi^2 * U^2 * 0.214 * t}{2} \quad (21)$$

Esta función se puede ahora reemplazar en la ecuación clásica unidimensional dispersión-advención de Fick, con el caudal  $Q \approx A_{yz} * U$ , quedando la llamada curva modificada de Fick:

$$C(x, t) \approx \frac{M}{Q * \Phi * t * 1.16} * e^{-\frac{(tp-t)^2}{2 * 0.214 * (\Phi * t)^2}} + C_0 \quad (22)$$

Aquí la constante  $1.16 \approx \sqrt{2\pi * 0.214}$  y  $A_{yz}$  es el área de la sección transversal por la que pasa el flujo del trazador;  $tp$ , el tiempo específico del pico, que se toma a partir del tiempo de inyección del trazador  $tg$ ; mientras  $t$  es la variable tiempo en segundos;  $M$ , la masa del trazador en miligramos, y  $Q$  es el caudal en litros por segundo. La concentración de trazador está en miligramos por litro (Ppm) para sal común, y en microgramos por litro (ppb) para rodamina WT.

## Funciones asociadas

### **Naturaleza de la ecuación de estado aplicada al trazador evolucionando en un flujo en condición de "estado estable"**

Se ha explicado que un trazador evolucionando en un flujo natural en condición de estado estable se conecta no sólo con su entorno inmediato, sino también con todo el volumen del tramo de flujo considerado; por lo tanto, la función  $\Phi(U, E, t)$  es en realidad una ecuación de estado del sistema global trazador + flujo, y entonces describirá también lo que ocurra en sentido longitudinal (a lo largo) y en sentido transversal (a lo ancho). De hecho, se ha verificado en diversos experimentos que la función de estado señala apropiadamente cuando la nube de trazador pierde el grado de libertad transversal (a lo ancho) cuando  $\Phi(t_0) \approx 0.38$ , indicando cuando se tiene mezcla completa en el tubo de corriente por el

que va el trazador. Por lo tanto, se reconoce positivamente que  $\Phi(U, E, t)$  está en capacidad de dar información tanto de los desfases temporales como de asimetrías espaciales.

## **La cobertura temporal de la curva de trazador convergente con el tiempo del pico: fenómeno de disponibilidad de la masa**

Se verifica que la cobertura temporal de la curva de trazador en tiempo converge con el valor del tiempo del pico cuando iguala a  $4\sqrt{2}\sigma$ , que corresponde al 99.7 % de la masa del trazador (teoría básica de la distribución normal), cuando se pierde el grado de libertad transversal al cesar la difusión transversal y considerar que ya toda la masa del trazador es disponible para tomar parte en el proceso de dispersión. Para tiempos anteriores a esta condición, se considera que hay un porcentaje de la masa que no puede dispersarse.

## **Definición aproximada de las funciones asociadas**

La función de estado  $\Phi(t)$  describe cómo evolucionan las partículas de trazador como un todo. Comienza desde su valor máximo a  $\Phi \approx 2.16$  (máximo desequilibrio) y va descendiendo hacia su valor de mínimo desequilibrio,  $\Phi \approx 0$ . Hay sin embargo eventos asociados que dependen de ella, pero que **no** están definidas directamente por  $\Phi$ , o sea que su rango de variación no está entre 0 y 2.16.

Para describir estos aspectos asociados concretos se deben usar las llamadas funciones asociadas:  $r_q(\Phi)$  y  $r_q(\Phi)^{-1}$ , las cuales, a pesar de ser diferentes la una de la otra, están muy relacionadas sin embargo con la Ecuación (17), pues involucran los rangos tanto de  $\Phi(t)$  (de 0 a 2.16) como de la razón  $\sigma t/t$  (Fischer, 1967; French, 2007). El comportamiento aproximado de estas funciones se establece heurística, de tal manera que su forma sea suave, cubriendo ciertos puntos notables, modelada mediante polinomios. Al nivel actual del desarrollo científico, en el que hay muchas lagunas en el método deductivo para establecer fórmulas totalmente racionales, este tipo de aproximación es totalmente válido, y por lo general se valida por la coincidencia con los resultados experimentales.

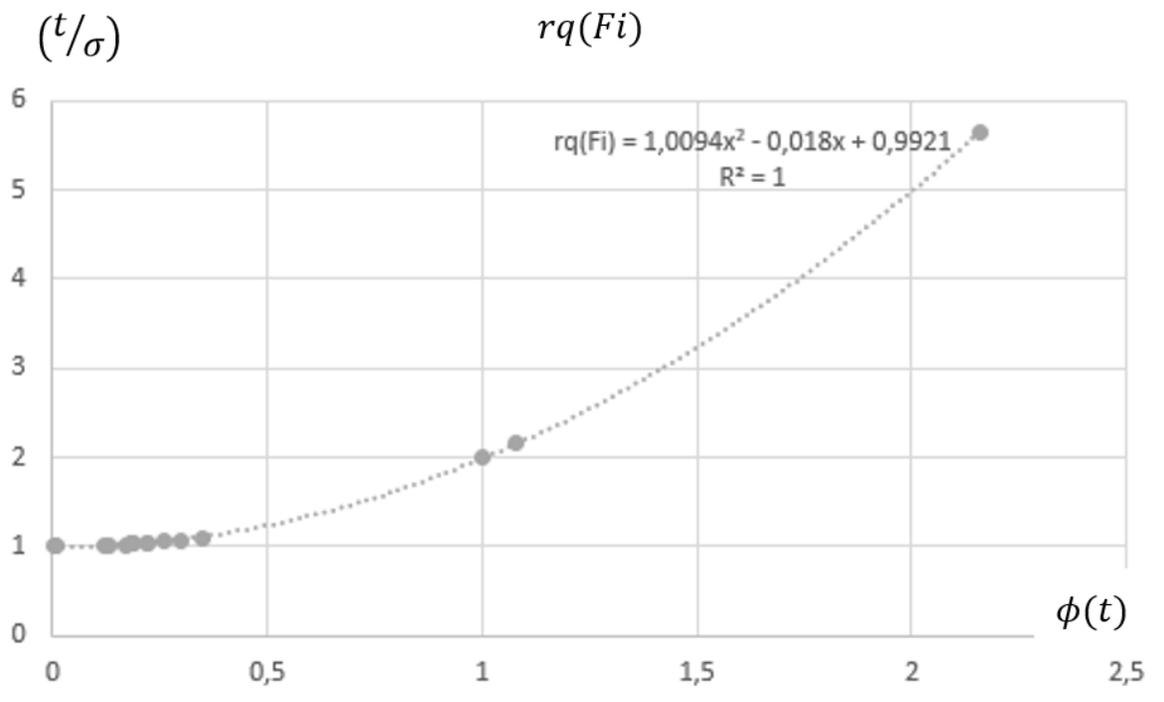
## Primera función auxiliar, $r_q(\Phi)$

La primera función aproximada se define polinómicamente de la siguiente manera, teniendo como rango de la abscisa a  $0 < \Phi < 2.16$ , y el rango de la ordenada  $1.0 < (t/\sigma_x) < 4\sqrt{2\pi}$ :

$$r_q(\Phi) \approx 1.0094\Phi^2 - 0.018\Phi + 0.9921 \quad (23)$$

Esta función representa convenientemente aquellos eventos físicos que son *significativamente diferentes* al inicio del proceso (ingreso súbito del soluto al flujo), pero que se van igualando a medida que avanza el tiempo (y la distancia) en la dinámica de los trazadores, como por ejemplo la asimetría inicial de la curva del trazador, la cual va disminuyendo a medida que aumenta el tiempo.

El ajuste de esta curva se hace utilizando la Ecuación (17) para valores notables de  $\Phi$ , hallados experimentalmente, por decir  $r_q(\Phi \approx 1.0) \approx 2.0$ ,  $r_q(\Phi \approx 2.0) \approx 5.0$  y  $r_q(\Phi \approx 2.16) \approx 5.66$ , como se ve en la Figura 6.



**Figura 6.** Definición aproximada de la función auxiliar  $r_q(\Phi)$ .

### **Cálculo de la razón del tiempo del centroide al tiempo del pico del trazador por $r_q(\Phi)$**

Una aplicación directa de esta primera función auxiliar es la razón de los tiempos del centroide y del pico, los cuales son muy asimétricos al principio de la dinámica del trazador:

$$r_{q(\Phi)} \approx \frac{t_s}{t_p} \quad (24)$$

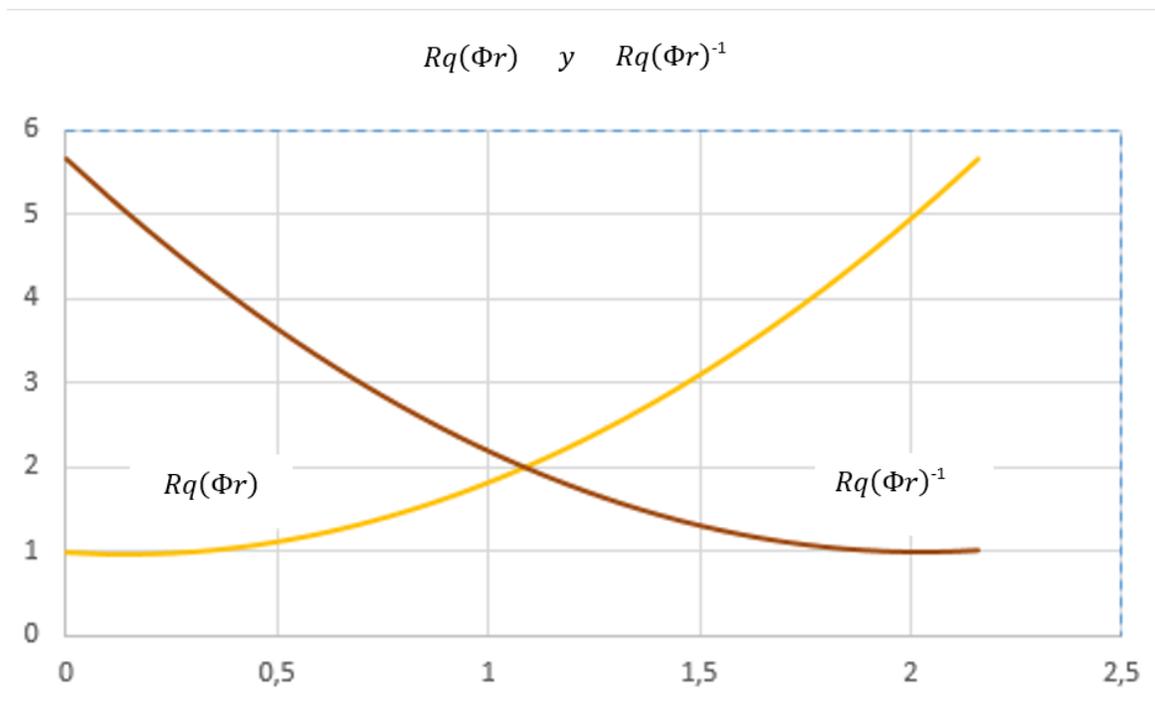
### **Segunda función auxiliar, $r_q(\Phi)^{-1}$**

Existe también una función inversa,  $r_q(\Phi)^{-1}$ , que representa, por el contrario, los fenómenos que son significativamente similares al principio, pero diferentes al final, como las varianzas espaciales en  $X$  y en  $Y$ , las cuales son prácticamente iguales al principio,  $\sigma_x \approx \sigma_y$ , pero van siendo desiguales a medida que aumenta el tiempo,  $\sigma_x > \sigma_y$ . Este cálculo es muy importante, pues describe la evolución transversal de la pluma de trazador.

La definición polinómica aproximada de esta segunda función es:

$$r_q(\Phi)^{-1} \approx 1.1403\Phi^2 - 4.6203\Phi + 5.66 \quad (25)$$

El comportamiento de estas dos funciones tienen como dominio de la variable independiente ( $\Phi$ ) un dominio que va desde 0 hasta 2.16, que son sus valores extremos, mientras la ordenada cubre un rango desde 0 hasta 5.66  $\approx 4\sqrt{2}$ , donde se considera una cobertura total del área de la curva Gaussiana como multiplicador de  $\sigma_t$ . Esto se ve en la Figura 7.



**Figura 7.** Curvas de  $rq(\Phi)$  y  $rq(\Phi)^{-1}$ .

## Cálculo de la razón, las varianzas espaciales del trazador por $r_q(\Phi)^{-1}$

Como ya se dijo, la razón de las *desviaciones típicas* en  $X$  e  $Y$  se puede calcular también por la segunda fórmula en función de  $\Phi(t)$ :

$$r_q(\Phi)^{-1} \approx \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad (26)$$

Si se piensa que si  $\Phi(t)$  rige la evolución del trazador a lo largo (es decir, lo que pasa en el eje  $X$  con respecto a las concentraciones de partículas), pues *también debe guiar lo que ocurra en el eje transversal*, ya que su variación corresponde a un único fenómeno termodinámico (que describe la variación de todos los grados de libertad del proceso).

Por lo tanto,  $r_q(\Phi)^{-1}$  relaciona el "alargamiento de la pluma de trazador" a lo largo del flujo, pero también su "ensanchamiento" en el eje  $Y$ .

## Relación entre la razón de varianzas y la razón de coeficientes de transporte

De acuerdo con la relación cuadrática entre varianzas y coeficientes de transporte, Ecuación (26), se puede escribir que:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \sqrt{\frac{E}{\varepsilon_y}} \quad (27)$$

Aquí  $E$  es el coeficiente longitudinal de dispersión y  $\varepsilon_y$  es el *coeficiente transversal de difusión*. Por lo tanto, se puede escribir finalmente:

$$rq(\Phi)^{-1} \approx \sqrt{\frac{E}{\varepsilon_y}} \quad (28)$$

Así:

$$\varepsilon_y \approx \frac{E}{(rq(\Phi)^{-1})^2} \quad (29)$$

## Verificación del rango de aplicación

Es interesante referir la fórmula anterior a los posibles resultados equivalentes dados por fórmulas semiempíricas clásicas aproximadas, en particular las de Elder y Fischer (Elder, 1959; Fischer, 1967; Fisher, 1968):

En cuanto a la ecuación de Elder, este investigador propuso dos fórmulas (muy conocidas) para  $E$  y  $\varepsilon y$ :

$$E \approx 5.93h\sqrt{hgS} \quad (30)$$

Y:

$$\varepsilon y \approx 0.23h\sqrt{hgS} \quad (31)$$

Aquí  $h$  es la profundidad media;  $g$ , la aceleración de la gravedad, y  $S$  es la pendiente de la línea de energía (suponiendo flujo uniforme). Ahora, si se divide la Ecuación (30) por la Ecuación (31) y simplificando, se tiene:

$$\frac{E}{\varepsilon y} \approx 25.8 \quad (32)$$

Por su parte, Fischer acotó que un valor más realista para la definición de  $\varepsilon y$ , Ecuación (31), sería cambiando el factor  $0.23$  por  $0.6$ , por lo que se puede escribir finalmente:

$$\frac{E}{\varepsilon y} \approx 9.9 \quad (33)$$

## **Cálculo del coeficiente longitudinal de dispersión $E$**

Por otro lado, hay que saber cuál es el valor para el coeficiente longitudinal,  $E$ , con base en la función de estado  $\Phi(t)$ ; se calcula mediante la Ecuación (21):

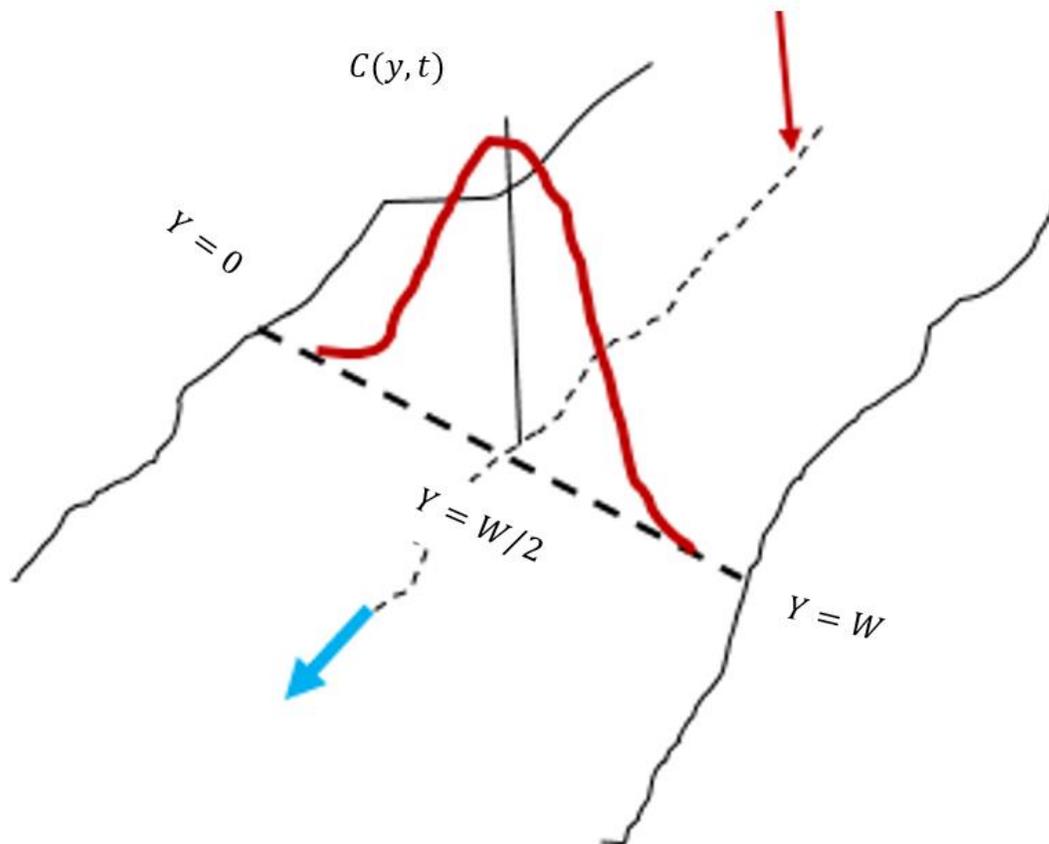
$$E = \frac{\Phi^2 * U^2 * 0.214 * t p}{2} \quad (34)$$

## Cálculo del coeficiente transversal de difusión $\varepsilon y$

Para estimar este coeficiente de transporte se parte de la definición de la distribución lateral del trazador (a lo ancho), en la que aparece dicho parámetro, considerando una inyección súbita del trazador en el centro del flujo. La forma analítica de dicha distribución es como sigue:

$$C_y(t) = C_p * e^{-\frac{(y-\frac{W}{2})^2}{4*\varepsilon y*t}} \quad (35)$$

Si en esta descarga  $Y = 0$ , entonces el pico de la distribución aparece en el centro, o sea en  $Y = W / 2$ , y que, por el principio de continuidad, la concentración pico,  $C_p$  es también la que vale para la distribución longitudinal. Este comportamiento se ve en la Figura 8.



**Figura 8.** Distribución lateral (a lo ancho) del trazador.

$$\varepsilon y \approx \frac{(Y - \frac{W}{2})^2}{4 * t * Ln \left\| \frac{C_y}{C_p} \right\|} \quad (36)$$

Entonces, para  $y = 0$ , y para  $t = t_p$  se tiene:

$$\varepsilon y = Cte * \frac{W^2}{tp} \quad (37)$$

Si la inyección se hace en el centro,  $Cte \sim 0.1$  y si se hace en la orilla, entonces  $Cte \sim 0.4$  (Yotsukura & Cobb, 1972). Ahora, este valor de la literatura técnica entonces se puede comparar con lo que se calcule de las ecuaciones nuevas (36) y (37).

## Casos prácticos de aplicación de $r_q(\Phi)$ y $r_q(\Phi)^{-1}$

Un primer ejemplo de aplicación de esta primera función es la descripción de la evolución del tiempo del centroide sobre el tiempo del pico. La definición para  $t_s$ , el tiempo del centroide, se hace a partir de rutinas estadísticas aplicadas a la curva Fickiana del trazador (Chapra, 2008):

$$t_s \approx \frac{\sum_1^j t_j * C_j * (\Delta t_j)}{\sum_1^j C_j * \Delta t_j} \quad (38)$$

La interpretación intuitiva del tiempo del centroide tiene que ver con la asimetría de la curva de trazador, vista por un observador en la orilla, y corresponde matemáticamente al centro de masa desviado (del tiempo del pico) por el sesgo.

Por lo tanto, usando la definición de  $r_q(\Phi)$  en esta primera razón sería entonces:

$$r_q(\Phi) \approx \frac{t_s}{t_p} \quad (39)$$

Nótese que  $t_s > t_p$  en los primeros instantes, cuando la curva es muy asimétrica, característica que se va atenuando en la medida en que pasa el tiempo, llega a ser casi simétrica en las etapas posteriores de la dinámica de la pluma.

Para verificar su funcionamiento se evaluó en la quebrada “La Vieja” en la ciudad de Bogotá, Colombia, utilizando tanto un trazador fluorimétrico (RWT), como un trazador iónico (NaCl).

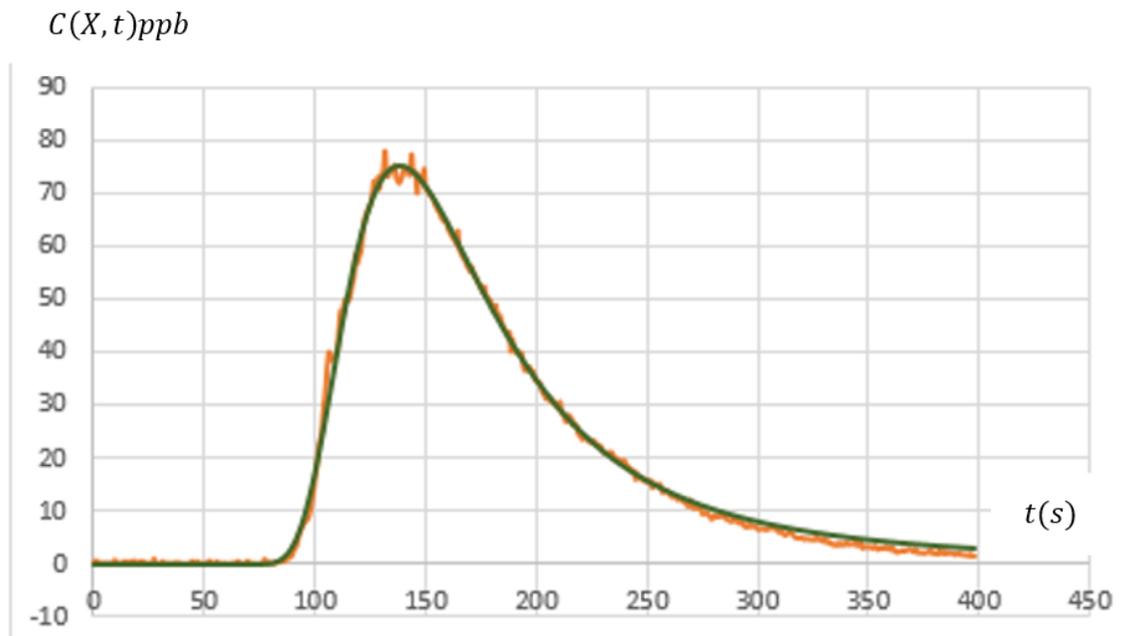
Esta quebrada es un curso de agua de montaña en los cerros orientales de la capital colombiana. Para la evaluación de la función se realizaron mediciones con trazadores iónico y fluorescente a una distancia de  $X = 23.5$  m; el ancho medio para el punto de medición fue de 1.4 m. En la Figura 9 se muestra el uso del equipo de medición de trazador FLUVIA F1 operando en tiempo real sobre la quebrada “La Vieja”.



**Figura 9.** Medición de trazador en la quebrada “La Vieja”.

Para el experimento con rodamina WT, la Figura 10 muestra la curva experimental (naranja) con el modelo teórico sobrepuesto (verde). Los datos apropiados son  $M = 0.1$  g;  $Q \approx 13.5$  l/s, tiempo de inyección;  $t_g \approx 22.0$  s, tiempo del pico (desde la inyección);  $t_p \approx 127.0$  s, concentración de base del flujo;  $C_0 \approx 0$  (no hay concentración de fondo),

$\Phi \approx 0.70$ . El modelo se construye con la Ecuación (22), verificándose que hay una buena convergencia con el dato experimental.



**Figura 10.** Curva experimental y modelo de la medición de trazador fluorescente en la quebrada “La Vieja”.

Para el  $t_s$  (teórico) mediante la Ecuación (23), da de la siguiente manera, teniendo en cuenta que  $\Phi \approx 0.70$ :

$$rq(\Phi \approx 0.70) \approx 1.0094 * 0.70^2 - 0.018 * 0.7 + 0.9921 \approx 1.474 \quad (40)$$

Por lo tanto, si  $t_p \approx 127.0$  s, usando la Ecuación (39), se calcula  $t_s$  (teórico):

$$t_s \text{ (teorico)} \approx r_q(0.70) * t_p \approx 1.474 * 127.0 \approx 187.2 \text{ s} \quad (41)$$

El cálculo del  $t_s$  (experimental) se hace mediante la ecuación estadística (38) obteniendo:

$$t_s \approx \frac{\sum_1^j t_j * C_j * (\Delta t_j)}{\sum_1^j C_j * \Delta t_j} \approx 176.0 \text{ s.} \quad (42)$$

Este resultado implica un error relativo entre los dos valores del 6 %, error aceptable, debido básicamente al truncamiento de la curva al extremo derecho.

En cuanto al coeficiente  $E$  con los datos específicos, usando la Ecuación (34) se calcula:

$$E \approx \frac{U^2 * \Phi^2 * 0.215 * t_p}{2} \approx \frac{0.185^2 * 0.70^2 * 0.215 * 127}{2} \approx 0.229 \text{ m}^2/\text{s} \quad (43)$$

Para la función de estado  $\Phi \approx 0.70$  se tiene que la relación inversa vale:

$$rq (\Phi \approx 0.70)^{-1} \approx 2.99 \quad (44)$$

Por lo tanto:

$$2.99 \approx \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \approx \sqrt{\frac{E}{\varepsilon_y}} \quad (45)$$

Entonces:

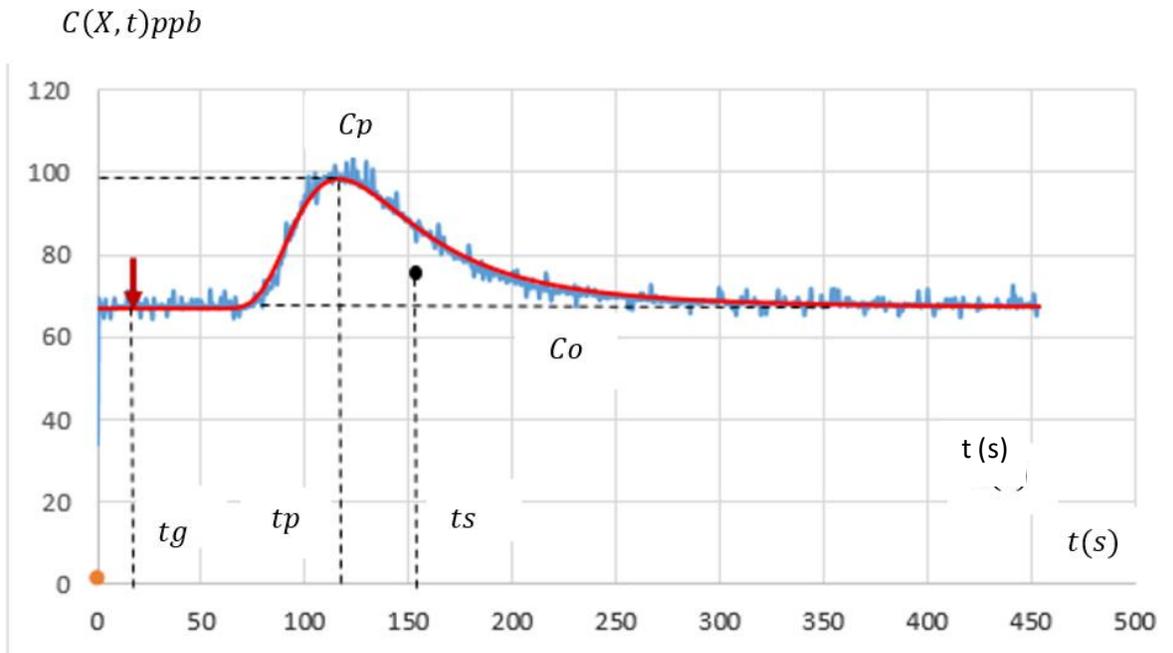
$$\frac{E}{\varepsilon_y} = 2.99^2 \approx 8.94 \quad (46)$$

De acuerdo con lo anterior:

$$\varepsilon_y = \frac{0.229}{8.94} \approx 0.0256 \text{ m}^2/\text{s} \quad (47)$$

Entonces, este valor de  $\varepsilon y$  y el valor de  $E$ , que cumplen aproximadamente (al 10 %) con la relación de Fischer modificada, Ecuación (33), se pueden considerar validados.

Ahora se desarrollará el ensayo con NaCl (sal), el cual en la Figura 11 se muestra la curva experimental de trazador (curva azul) con el modelo teórico sobrepuesto (curva roja). El modelo se construye con la Ecuación (10), teniendo en cuenta los siguientes datos:  $\phi \approx 0.67$ ,  $Q \approx 24.0$  l/s  $t_p \approx 110$  s (tomada desde el momento de la inyección,  $t_g \approx 10.0$  s). La concentración salina base del cauce  $C_o \approx 67.0$  mg/l.



**Figura 11.** Curva experimental y modelo de la medición de trazador en la quebrada "La Vieja".

Al emplear la Ecuación (42) de la siguiente manera, teniendo en cuenta tanto la concentración base  $C_0 \approx 67.0$  mg/l como el tiempo de inyección, se obtiene:

$$ts \approx \frac{\sum_1^j t_j * C_j * (\Delta t_j)}{\sum_1^j C_j * \Delta t_j} \approx \frac{444421.7}{2867.5} \approx 155.0 \text{ seg.} \quad (48)$$

Ahora, el cálculo teórico con  $\Phi \approx 0.67$  resulta:

$$rq(\Phi \approx 0.67) \approx 1.0094 * 0.67^2 - 0.018 * 0.67 + 0.9921 \approx 1.394 \quad (49)$$

Por lo tanto, si el tiempo del pico es  $tp \approx 110.0$  s, el tiempo del centroide será:

$$ts \approx rq(\Phi \approx 0.67) * tp \approx 1.394 * 110 \approx 153.3 \text{ s} \quad (50)$$

En relación con el tiempo del centroide,  $ts$ , medido, el calculado tiene un error de sólo el 1 %.

El cálculo del coeficiente  $E$  con los datos con NaCl fueron:

$$E \approx \frac{U^2 * \Phi^2 * 0.215 * tp}{2} \approx \frac{0.2^2 * 0.67^2 * 0.215 * 110}{2} \approx 0.232 \text{ m}^2/\text{s} \quad (51)$$

Con la función de estado  $\Phi \approx 0.67$  se tiene una relación inversa de:

$$rq (\Phi \approx 0.70)^{-1} \approx 3.07 \quad (52)$$

Entonces:

$$\frac{E}{\varepsilon y} = 3.07^2 \approx 9.46 \quad (53)$$

Por lo tanto:

$$\varepsilon y = \frac{0.232}{9.46} \approx 0.0245 \text{ m}^2/\text{s} \quad (54)$$

Nuevamente estos dos coeficientes ( $\varepsilon y$  y  $E$ ) cumplen muy bien con la relación de Fischer, Ecuación (33).

## Análisis de resultados

Del conjunto de datos calculados en los ejercicios anteriores, se puede comprobar que los valores de la nueva metodología corresponden bien con los obtenidos de las ecuaciones clásicas (Fischer), con porcentajes de error relativo que van desde el 1.0 % hasta el 10.0 %, rango aceptable en la hidrometría; por lo tanto, se puede considerar que los desarrollos presentados se adecuan bien al examen crítico del experimento.

El método presentado en este artículo se fundamenta en argumentaciones termodinámicas, las que, a diferencia de los procedimientos clásicos, que son o empíricos o estadísticos en su mayor parte, permiten proponer a los especialistas unas versiones diferentes de los estudios de calidad de agua, facilitando análisis comparados, que tanta falta hacen en ciertas disciplinas de la hidrodinámica.

Las ventajas de tal situación son innegables, pues de esta forma se soslaya el uso de datos tomados de tablas en la literatura técnica, que muchas veces son informaciones con validez limitada, pues por lo general corresponden a ecuaciones clásicas que, aplicadas a condiciones muy específicas, pierden una generalidad siempre deseable en los cálculos de ingeniería. Por el contrario, el desarrollo y uso de una función de estado (potencial termodinámico), como es  $\Phi(U, E, t)$ , aporta una universalidad que llena este vacío.

## Conclusiones

Es notoria la importancia que presenta la función de estado para el análisis de trazadores y su aplicación en los análisis de calidad del agua y la hidrodinámica del flujo, ya que el “estado del arte” ha avanzado más bien poco a nivel del entendimiento de los fenómenos básicos que explican los procesos dispersivos. Esto se puede entender si se observa que la investigación básica en el tema se ha limitado a modelar los aspectos exclusivamente dinámicos de los mismos, dejando a un lado los aspectos termodinámicos, los cuales aportan una serie de informaciones muy importantes, que ayudan a esclarecer la complejidad de este fenómeno.

Lo primero que dilucida este artículo es la existencia objetiva de una “función de estado” que describe la evolución de la nube de trazador, pudiendo verse que es también un potencial termodinámico en la región lineal de la termodinámica irreversible. Por lo tanto, esta función permite dilucidar cómo se pierden los grados de libertad de interés para el estudio de los procesos de contaminación fluvial.

Por otro lado, la formulación y el desarrollo de dos funciones complementarias aportan al entendimiento y desarrollo del análisis de trazadores en cuerpos de agua. Estas dos nuevas funciones son útiles para calcular analíticamente razones de parámetros asociados con la dinámica del trazador. La primera  $rq(\Phi)$  es útil para describir la evolución de parámetros que son muy desiguales al comienzo de la evolución y que luego se van igualando, por ejemplo, el tiempo del centroide al tiempo del pico; la segunda  $rq(\Phi)^{-1}$  es útil para describir la evolución de parámetros que son muy similares al comienzo, y luego van divergiendo, por ejemplo, las varianzas longitudinal y transversal.

Los resultados obtenidos con estas nuevas fórmulas aplicadas de forma experimental (realizados con equipos de trazadores FLUVIA en tiempo real) sobre la quebrada "La Vieja" muestran que sus resultados son bastante similares a las fórmulas del estado del arte, evidenciando que la fundamentación de estas relaciones es correcta.

Estas fórmulas analíticas nuevas pueden ser aplicadas con gran ventaja en numerosos casos en los que se requiere tener datos adicionales a los puramente experimentales facilitando su cálculo.

## Referencias

Abrahams, A. D. (1968). Distinguishing between the concepts of steady state and dynamic equilibrium in geomorphology. *Earth Science Journal*, 2(2), 160-166.

- Camacho, L. A., & Cantor, M. M. (2006). Calibración y análisis de la capacidad predictiva de modelos de transporte de solutos en un río de montaña Colombiano. *Avances en Recursos Hidráulicos*, 0(14).
- Camacho, L. A., & González, R. A. (2008). Calibration and predictive ability analysis of longitudinal solute transport models in mountain streams. *Environmental Fluid Mechanics*, 8(5), 597.
- Chapra, S. C. (2008). *Surface Water-Quality Modeling*. Long Grove, USA: Waveland Press Inc.
- Constaín, A. J. (2013a). A thermodynamic view of tracer plume evolution: Complete mixing condition evaluation. *EPJ Web of Conferences*, 50, 03001.
- Constaín, A. J. (2013b). Interpretación de los parámetros de la metodología "ADZ" por un procedimiento de advección-dispersión con el coeficiente de transporte función del tiempo. *Revista Digital del Cedex*, 172, 3-14.
- Constaín, A. J. (2012). Definición y análisis de una función de evolución de solutos dispersivos en flujos naturales. *Dyna*, 175, 173-181.
- Constaín, A. J., Peña-Olarte, G. A., & Peña-Guzmán, C. (2019a). Determination of the factors of variation of mean velocity in natural channels at steady state. *Dyna*, 86(210), 240-246.
- Constaín, A. J., Peña-Guzmán, C., & Mesa, D. (2019b). Determination of hydraulic features in Colombian rivers by tracer analysis.

- International Journal of Hydrology Science and Technology*, 9(5), 457-473.
- Constaín, A. J., Villa, P., & Bastidas, G. A. (2013). Nuevo método para determinar la longitud de mezcla en flujos turbulentos. *Tecnología y ciencias del agua*, 4(4), 63-76.
- Constaín, A. J., & Lemos, R. (2011). Una ecuación de la velocidad media del flujo en régimen no uniforme, su relación con el fenómeno de dispersión como función del tiempo y su aplicación a los estudios de calidad de agua. *Ingeniería Civil*, 164, 114-135.
- Cushman-Roisin, B. (2008). Beyond eddy diffusivity: An alternative model for turbulent dispersion. *Environmental Fluid Mechanics*, 8(5-6), 543-549.
- Elder, J. W. (1959). The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 5(04), 544-560.
- Engelhardt, I., Piepenbrink, M., Trauth, N., Stadler, S., Kludt, C., Schulz, M., Schüth, C., & Ternes, T. A. (2011). Comparison of tracer methods to quantify hydrodynamic exchange within the hyporheic zone. *Journal of Hydrology*, 400(1), 255-266.
- Fischer, H. B. (1967). The mechanics of dispersion in natural streams. *Journal of the Hydraulics Division*, 93(6), 187-216.
- Fisher, H. B. (1968). Dispersion predictions in natural streams. *Journal of the Sanitary Engineering Division*, 94(5), 927-944.

- French, R. H. (2007). *Open channel hydraulics*. Colorado, USA: Water Resources Publications, LLC.
- Harvey, J. W., Wagner, B. J., & Bencala, K. E. (1996). Evaluating the reliability of the stream tracer approach to characterize stream-subsurface water exchange. *Water Resources Research*, 32(8), 2441-2451.
- Jin, H.-S., White, D. S., Ramsey, J. B., & Kipphut, G. W. (2012). Mixed tracer injection method to measure reaeration coefficients in small streams. *Water, Air, & Soil Pollution*, 223(8), 5297-5306.
- Kondepudi, D. K., & Prigogine, I. (2005). *Modern thermodynamics*. Hoboken, USA: Wiley.
- Leopold, L. B., & Langbein, W. B. (1962). *The concept of entropy in landscape evolution*. Washington, DC, USA: US Government Printing Office.
- Mises, R. (1981). *Probability, statistics, and truth*. Chelmsford, USA: Courier Corporation.
- Nicolis, G., & Prigogine, I. (1989). *Exploring complexity: An introduction*. New York, USA: W. H. Freeman.
- Pogliani, L., & Berberan-Santos, M. N. (2000). Constantin Carathéodory and the axiomatic thermodynamics. *Journal of Mathematical Chemistry*, 28(1), 313-324.

- Punt, A. G., Millward, G. E., & Harris, J. R. W. (2003). Modelling solute transport in the Tweed Estuary, UK using ECoS. *Science of the Total Environment*, 314-316, 715-725.
- Rogowski, P., Merrifield, S., Ding, L., Terrill, E., & Gesirich, G. (2019). Robotic mapping of mixing and dispersion of augmented surface water in a drought frequent reservoir. *Limnology and Oceanography: Methods*, 17(9), 475-489.
- Simonenko, S. (2006). *Non-equilibrium statistical thermodynamics of turbulence*. London, UK: Nauka.
- Stewart, I. (1997). *Does God play Dice?: The new mathematics of chaos*. London, UK: Penguin UK.
- Tazioli, A. (2011). Experimental methods for river discharge measurements: Comparison among tracers and current meter. *Hydrological Sciences Journal*, 56(7), 1314-1324.
- Teuling, A. J., Andel, S. J. V., Troch, P. A., & Hoitink, A. J. F. (2006). Entropy and river meander planform. *Proceedings of the International Conference on Fluvial Hydraulics - River Flow 2006*, 1137-1146.
- Yotsukura, N., & Cobb, E. D. (1972). *Transverse diffusion of solutes in natural streams*. Washington, DC, USA: U.S. Government Printing Office.