

DOI: 10.24850/j-tyca-2022-04-04

Artículos

Sinuosidad y dimensión fractal de cauces chilenos

Sinuosity and fractal dimension of Chilean rivers

Francisco Martínez¹, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0353-4609>

Hernán Madrid², ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6235-3165>

¹Escuela de Ingeniería Civil, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile, francisco.martinez@pucv.cl

²Escuela de Ingeniería Civil, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile, hernan.madrid.o@mail.pucv.cl

Autor para correspondencia: Francisco Martinez,
francisco.martinez@pucv.cl

Resumen

La sinuosidad de cauces fluviales es un patrón característico de los ríos en el mundo y se puede interpretar como un signo de la inestabilidad



hidrosedimentológica de estos sistemas. Dicha inestabilidad conduce a la formación de meandros, cuya distribución dista de ser un proceso arbitrario, pues reproduce una dinámica organizada que puede describirse por medio de fractales, estableciendo una conexión pobremente explorada hasta ahora. El presente estudio pretende contribuir en este tópico midiendo por primera vez la dimensión fractal (D) asociada con los meandros en siete ríos chilenos distribuidos de norte a sur de Chile. Esta dimensión toma valores muy cercanos a la unidad, en concordancia con los patrones observados cualitativamente en los cauces, lo cual sugiere que este parámetro puede ser un indicador útil para caracterizar la geometría de sistemas hídricos complejos.

Palabras clave: índice de sinuosidad, meandros, dimensión fractal, autoorganización, control tectónico.

Abstract

River's sinuosity is a characteristic pattern of rivers around the world that can be interpreted as a sign of the hydro-sedimentological instability of these systems. Such instability leads to the formation of meanders whose distribution is far from being an aleatory process reproducing a self-organized dynamic that can be described using fractals, settling a connection poorly explored up to date. The present study aims to contribute to this topic by measuring for the first time the meandering



fractal dimension (D) of seven Chilean rivers distributed from north to south of Chile. This dimension takes values close to unity in agreement with the morphological patterns observed in the rivers, suggesting that this parameter can be a helpful indicator to characterize the geometry of complex hydrographic systems.

Keywords: Sinuosity index, meanders, fractal dimension, self-organization, tectonic control.

Recibido: 19/11/2020

Aceptado: 12/05/2021

Introducción

La sinuosidad de un río se puede interpretar como una medida de la inestabilidad morfológica del cauce en el tiempo tanto desde el punto de vista hidrodinámico como sedimentológico. Una forma común de medir

tal característica es a través del índice de sinuosidad (S), que se define formalmente del modo siguiente (Leopold y Wolman, 1957):

$$S = \frac{\ell}{L} \quad (1)$$

Donde ℓ es la longitud total medida entre los puntos extremos del cauce o tramo de interés siguiendo su eje central, y L es la línea recta que une dichos extremos (ver esquema de la Figura 1a). El valor mínimo de este coeficiente es 1 y su definición cobra sentido siempre y cuando no se presenten secciones de estrangulamiento en el cauce. Con base en la observación de un gran número de cauces, Leopold y Wolman (1957) propusieron un rango de clasificación en función de este parámetro: cauces *rectos* cuando $S \leq 1.05$, cauces *sinuosos* cuando $1.05 < S < 1.50$ y cauces *meandrosos* cuando $S \geq 1.5$. Un ejemplo típico de estos últimos, como de las espectaculares formas que adoptan estas macroformas fluviales, se puede observar en la Figura 1b.

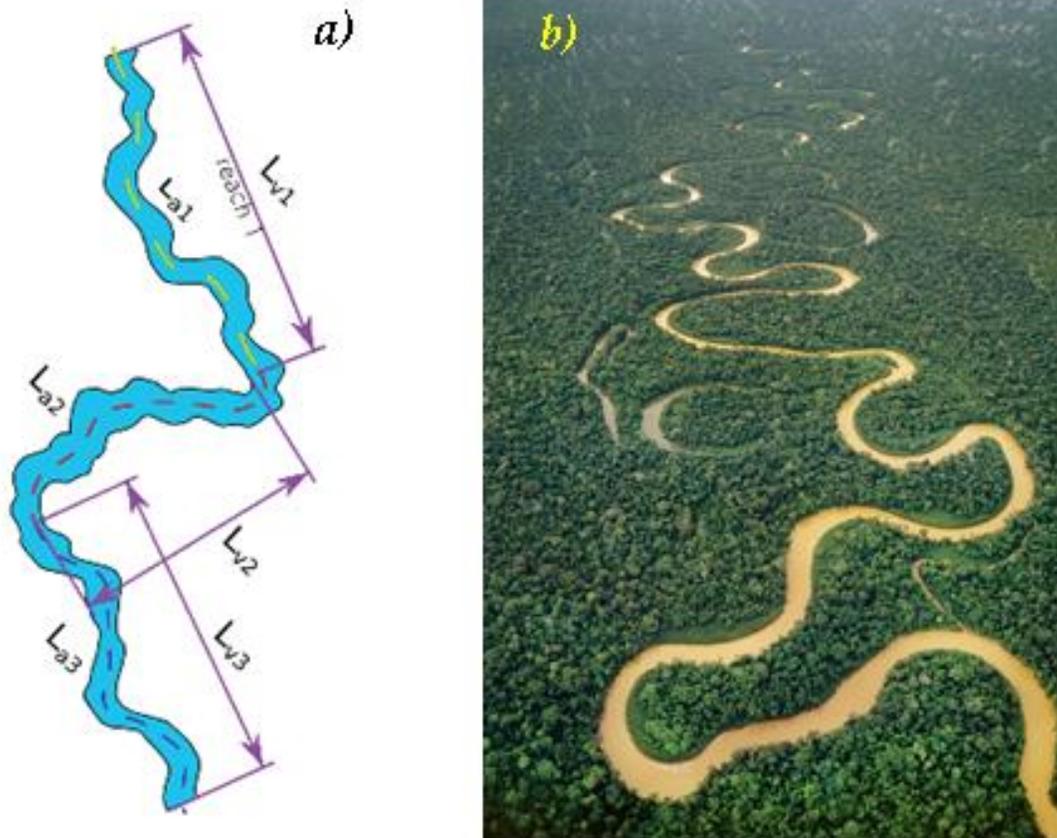


Figura 1. a) Típico esquema usado para la determinación del índice de sinuosidad en el sentido de Leopold y Wolman (1957) Fuente: De-Rosa, Cencetti y Fredduzzi (2017). En el esquema se definen las cantidades $L_v = L$ y $L_a = \ell$. En b) se observa una imagen extraordinaria del río Amazonas y los sucesivos meandros ordenados que aparecen a lo largo de su cauce enfatizando el orden de carácter recursivo en su distribución (Fuente: <https://www.pinterest.cl/pin/454793262367665241/>).

Schumm (1960) se apoyó en este coeficiente para extender la clasificación anterior incorporando relaciones entre la morfología del río y sus características sedimentológicas, relevando la importancia del caudal y de la pendiente media del cauce como variables de control del río. Schumm (Schumm, 1960; Schumm y Khan, 1972) argumenta además que dicho criterio de clasificación cobra relevancia particularmente a escala local en el cauce debido a que estas variables pueden alterarse de forma significativa si el río se vuelve inestable o si reciben sedimentos de un tributario. Mueller (1968) profundiza también sobre el concepto de sinuosidad, detallando tres formas de medirla. Dichas formulaciones se relacionan de modo estrecho con los ciclos de erosión de la corriente. Además, el autor sitúa a los ríos meandrosos como aquellos cuyos índices de sinuosidad se encuentran sobre 1.3.

Cuando se observa un río a distintas escalas pareciera que la forma y tamaño de estos patrones sinuosos tiende a replicarse a lo largo del río. Esta característica despertó el interés de Mandelbrot (1983), quien propuso que tal característica pudiera tener un asidero en la teoría de los objetos fractales. En términos simples, los fractales pueden definirse como aquellas estructuras, de tipo natural o artificial, cuya geometría tiende a replicarse a distintas escalas de observación. Esta propiedad se encuentra íntimamente ligada con el concepto de autosimilitud y se

presenta en un sinnúmero de situaciones, tan diversas como la geometría de los copos de nieve, algunas especies de helechos, las ramificaciones de los árboles o las redes de vasos en las hojas de una planta, solo por nombrar algunos. Tales patrones también se hacen patentes en casos de mayor complejidad, como ocurre con las redes de drenaje fluvial (Dodds y Rothman, 2000), las redes urbanas y otros casos menos convencionales provenientes del área de la medicina, la economía y otros campos disciplinares, enfatizando el carácter multidisciplinarios que rodea a los fractales (Gouyet y Bug, 1997; Amiot, 2008; Reljin y Reljin, 2002; Werner y Ganguly, 2003; Falconer, 1991).

El concepto de *fractal* fue acuñado por el propio Mandelbrot (1983), quien tuvo una prolífica contribución científica en esta área, conectando los fractales con aplicaciones a sistemas complejos como el de los propios ríos. En tal sentido, los meandros en un cauce tienden a formar un sistema cuya capacidad de autoorganización es tal que el proceso de formación de meandros dista de ser considerado aleatorio (Vermeulen, Hoitink, Zolezzi, Abad y Aalto, 2016). Dicha conexión fue explorada de forma pionera por Snow (1989), quien midió patrones fractales en distintos ríos de EUA usando la metodología del *paso-divisor* propuesta por Lewis-Richardson (Richardson, 1961). Tal metodología se inspiró en la necesidad de determinar la longitud total de las líneas de costas y de los bordes del relieve, como muestra la Figura 2.

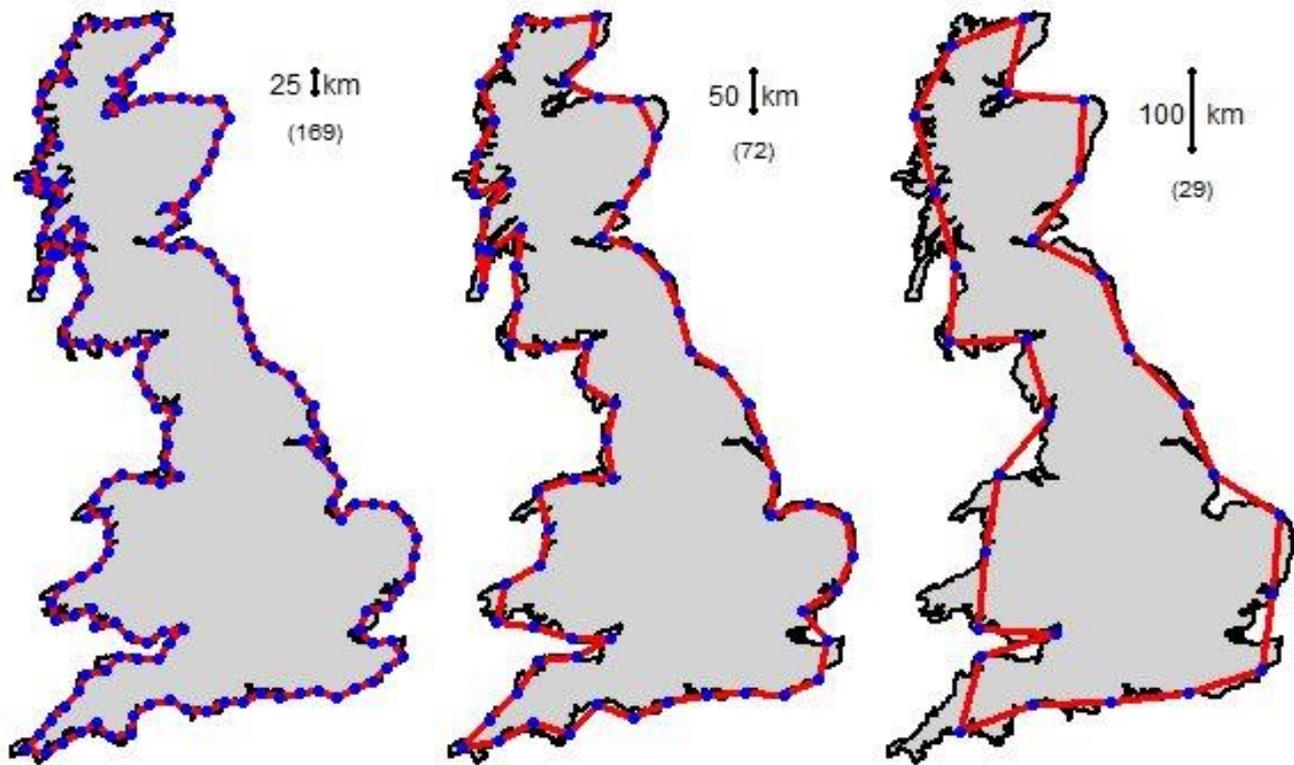


Figura 2. Una aplicación del método paso divisor usado por Lewis-Richardson (Richardson, 1961) para medir la longitud total de curvas en el plano. En este caso, aplicado de forma pedagógica para medir la longitud de la costa de Gran Bretaña. Nótese que a medida que se reduce la longitud de la regla de medición (es decir, el “paso”), es posible aproximarse cada vez más a la longitud real de la línea de costa.

Fuente: Gurung (2017).

Si se considera que tal borde puede ser modelado como una curva continua por tramos en \mathbb{R}^2 , es posible seleccionar un cierto paso o “regla” ϵ de medición de longitud finita. La longitud L medida con esta regla depende del tamaño del paso escogido, es decir $L(\epsilon)$, y con ello, también el número máximo de segmentos que contiene dicha longitud $N(\epsilon)$. Es fácil ver que a medida que disminuye el tamaño de este paso, aumenta N y con ello la precisión en la longitud total de la curva. Lewis-Richardson propuso entonces que la longitud exacta de la curva quedara dada por la relación recursiva siguiente:

$$L(\epsilon) = N(\epsilon)\epsilon^\tau \quad (2)$$

Donde ϵ es el tamaño del paso escogido, y $N(\epsilon)$ es el número de segmentos o veces que dicho paso queda contenido en la curva. El parámetro τ es un coeficiente de valor negativo que se encuentra contenido en el intervalo $(-1, 0]$. Según Mandelbrot (Mandelbrot, 1967; Mandelbrot, 1983), este coeficiente se relaciona con la dimensión fractal siguiendo una relación funcional $\tau = f(D)$. El autor determinó que la función más sencilla que liga ambas variables es una relación lineal $f(D) = 1 - D$, de manera que cuando $\tau = -1$, se tiene $D = 2$ y el valor $\tau = 0$ conduce a la dimensión $D = 1$. El valor $D = 2$ da cuenta de un objeto cuya

dimensión topológica se corresponde con la de una superficie en el plano; mientras que el valor $D = 1$ se corresponde con un objeto de geometría asimilable a una línea recta (*i.e.*, de curvatura infinita). Métodos alternativos al propuesto por Lewis-Richardson también se emplean en la práctica y con objetos de mayor complejidad, uno de ellos es el método de *box-counting* ampliamente conocido en el tópico (Pilgrim y Taylor, 2018).

En consecuencia, cuando $L(\epsilon), N(\epsilon)$ son contrastadas en un gráfico logarítmico, ambas variables definen un tramo lineal que puede ser ajustado por la Ecuación (2), de cuya pendiente se extrae el valor de τ (ver Figura 3). Basándose en este método, Snow (1989) midió la dimensión fractal asociada con la sinuosidad de cauces, determinando que ésta se encontraba estrictamente en el rango 1 y 2, con valores más cercanos a 1 para ríos dominados por tramos rectos, y valores cercanos a 2 para ríos dominados por la presencia de meandros.

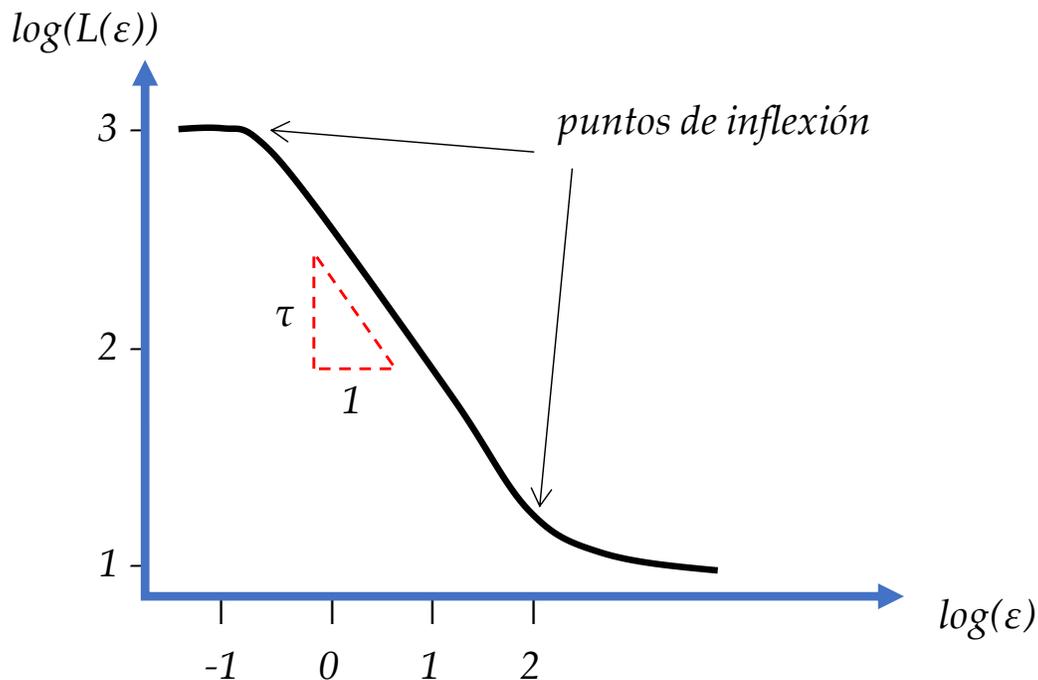


Figura 3. El esquema muestra una curva típica resultante del método de medición *paso-divisor* propuesto por Lewis-Richardson (Richardson, 1961) para medir la longitud de curvas naturales. La pendiente de la curva (τ) se determina en el tramo central de la misma entre los puntos de inflexión indicados sobre la misma curva. Fuente: elaboración propia.

Montgomery (1996), también estudiando ríos de cuencas de EUA, encontró una alta correlación entre la dimensión fractal global del cauce, y la sinuosidad con valores estrictamente contenidos entre 1 y 2. Sin

embargo, el autor precisa que canales incididos presentan una cuestionable fractalidad, mientras que aquellos de origen glaciar pueden presentar un comportamiento multifractal. Según Snow (1989), este carácter enfatiza que la dimensión fractal puede aportar más información que el índice de sinuosidad debido a que considera cambios en la escala de observación asociada con la distribución de meandros.

Por otro lado, Stolum (1996), realizando simulaciones computacionales de patrones meandrosos en ríos, demostró que la forma a la que tienden a converger estos cauces posee un índice de sinuosidad que tienden a converger a una sinuosidad promedio cercana a π . A juicio de los autores, este valor no es una mera coincidencia, sino que puede ser visto como un signo de que la distribución de meandros en ríos debe corresponderse con la estructura de un sistema autoorganizado.

Los estudios anteriores sugieren entonces la existencia de una estrecha correspondencia entre la sinuosidad de cauces fluviales y el comportamiento de objetos fractales. Sin embargo, la literatura en este tópico sigue siendo extremadamente escasa, y revela la necesidad de contar con más estudios que reafirmen o refuten tal correspondencia. En este contexto se inserta el presente estudio, cuyo objetivo es medir por primera vez la dimensión fractal de algunos cauces chilenos distribuidos a lo largo del país y situados en distintos ambientes geográficos. En lo

que sigue se analizarán los valores de esta dimensión y la información que de ellos es posible extraer desde el punto de vista morfométrico.

Para ello, el presente artículo se organiza de la siguiente forma: se entrega información sobre el contexto geográfico en el que se encuentran los cauces estudiados, luego se introducen la metodología usada para obtener la morfología superficial de los cauces y las técnicas introducidas para la medición de la dimensión fractal de meandros. En la última parte del texto se realizan algunas correlaciones sencillas entre la dimensión fractal y parámetros morfológicos básicos de cada cauce, aportando algunas conclusiones y perspectivas al cierre.

Contexto geográfico

Chile cuenta con una rica variedad geomorfológica y climática, fácilmente diferenciable a lo largo de sus casi 4 000 km de longitud (Luebert y Plissock, 2006). Esta variedad se trasunta en la existencia de distintos regímenes hidrológicos y condiciones litológicas que enfrenta un río en su

desarrollo. La evolución del relieve del margen occidental de América del Sur, desde el Jurásico temprano al presente, es conocida como el ciclo tectónico andino, en cuya última etapa, correspondiente a alrededor de los últimos 40 millones de años (desde el Paleógeno tardío), se reconoce la importancia del control tectónico. Dicho control ha provocado el alzamiento andino y el desarrollo de las unidades morfoestructurales del país: la cordillera de Los Andes (CA), la Depresión Central o Intermedia (DI), y la Cordillera de la Costa (CC) como unidades principales (Charrier, Pinto y Rodríguez, 2007).

En efecto, la actividad geodinámica y estructural del borde pacífico de América del Sur se debe a las interacciones de subducción de las placas de Nazca y Antártica con la placa Sudamericana, que se expresan en diferencias morfoestructurales. Al norte de la península de Taitao (46° S), la placa de Nazca tiene una velocidad subducción del orden de 6 cm por año, alrededor de tres veces más rápida que la velocidad de subducción de la placa Antártica, área en que la cordillera de Los Andes tiene las máximas altitudes. La placa de Nazca subducta la placa Sudamericana con ángulos diferenciados, siendo especialmente interesante la zona comprendida entre los 27 y 33° S, conocida como la zona de subducción plana (*flat slab zone*), y que se corresponde con el área en que la Depresión Central desaparece. Al sur de los 46° S, las interacciones tectónicas de las placas Antártica y Sudamericana sólo definen a la cordillera de Los Andes como unidad de relieve principal, que se pone en

contacto directo con el océano. La Cordillera de la Costa y la Depresión Central son inexistentes.

Si las características litológicas y estructurales condicionan en gran medida los patrones de drenaje, la evolución y el desarrollo en términos de las relaciones de erosión y sedimentación se ven influenciadas en gran medida por factores climáticos. De hecho, actúan conjuntamente, pero con intensidades y velocidades diferentes, contribuyendo a perfeccionar el modelado del paisaje. En Chile se desarrollan seis macrobioclimas principales de acuerdo con la clasificación de Luebert y Pliscoff (2006). En términos generales existe un *continuum* en que los climas varían desde situaciones cálidas y secas en la zona norte hacia condiciones frías y húmedas en la zona sur. Los regímenes hidrológicos de las cuencas se encuentran esencialmente controlados por las características de la precipitación y orográficas del relieve. En este sentido, son importantes las altitudes, que determinan umbrales variables en que la precipitación es sólida o líquida, y por lo tanto se mantiene como almacenamiento estacional, o bien se incorpora directamente a la esorrentía de la cuenca, y la disposición con la cual los relieves montañosos reciben los frentes meteorológicos, encargados de llevar las precipitaciones y que, en la mayor parte del país, provienen desde el suroeste.

La altitud es una variable complicada de consignar, dado que las características morfoestructurales definen encadenamientos montañosos

que se organizan en función de los esfuerzos tectónicos regionales, es decir, en una disposición paralela unos con otros, y con un desarrollo longitudinal norte-sur. A partir de esta disposición se presenta una organización en la cual las altitudes aumentan de oeste a este. La pendiente topográfica se asocia con las características del relieve. En este sentido, los espacios planos (o de bajas pendientes) se encuentran en la Depresión Central y en el fondo de los valles, especialmente notorios en los cursos principales. La mayor variedad de pendientes, con valores que pueden muy bien aproximarse a la vertical, están en los sectores montañosos de ambas cordilleras.

Cauces estudiados

En el presente estudio se han atendido las características descritas en el párrafo anterior, seleccionando siete ríos ubicados a lo largo del país. La Tabla 1 muestra la distribución de estos ríos según influencia tectónica y macrobioclima característico del país. El río Loa es el cauce más extenso de todo el país. Se encuentra entre $21^{\circ} 00' S$ y $22^{\circ} 33' S$, flanqueado por la cordillera de Los Andes en su origen y desembocando en el océano

Pacífico. En el sector de la cordillera andina, el río está marcado por un clima de tundra, junto con sectores volcánicos activos a unos 4 000 msnm para cruzar la precordillera de Domeyko, el desierto de Atacama y la pampa del Tamarugal, hallando climas desérticos. El río encuentra la desembocadura por la Cordillera de la Costa creando un cañón de 500 metros de altura aproximadamente.

Tabla 1. Distribución de las cuencas de acuerdo con zonas de influencia tectónica y macrobioclimas. La información hidrológica se obtuvo de la Dirección General de Aguas (DGA), junto con mediciones realizadas en el software QGIS.

| Zona macrobioclima | Placa Nazca Norte (al norte 27° S) | Placa Nazca Sur (33-46° S) | Placa Antártica (al sur 46° S) | Área (km ²) | Caudal (m ³ /s) | Régimen hidrológico |
|------------------------------|------------------------------------|----------------------------|--------------------------------|-------------------------|----------------------------|---------------------|
| Tropical (al norte de 27° S) | Loa | | | 33 570 | 243.0 | Pluvial |
| Mediterráneo (27-39° S) | | Maipo | | 15 381 | 92.3 | Nival |
| | | Toltén | | 7 886 | 572.0 | Pluvial |

| | | | | |
|----------------------------------|----------|--------|-------|--------------|
| Templado (al sur de 39° S) | Valdivia | 11 320 | 687.0 | Pluvial |
| | Bueno | 17 210 | 760.0 | Pluvial |
| | Rahue | 6 510 | 117.0 | Pluvial |
| | Baker | 26 726 | 870.0 | Nivo-Pluvial |

El río Maipo se ubica entre 33° 32' S y 34° 11' S, corriendo desde la 69° 58' W hasta los 71° 37' W. Es uno de los cauces más importantes del país debido a la población y actividades productivas generadas a su alrededor. Debido a ello, su estado natural está muy alterado por acciones antrópicas, dando a lugar a varios patrones trenzados especialmente en las cercanías de la ciudad de Santiago. Comienza en la cordillera de Los Andes, para luego avanzar por la precordillera encontrando un clima templado frío. El río atraviesa la gran cuenca de Santiago y los llanos de sedimentación, para finalmente desembocar en las planicies marinas, donde domina un clima templado cálido con influencia mediterránea.

En el sur del país se han tomado como elementos de estudio los ríos Toltén, Valdivia y Bueno. El río Toltén (38° 57' S - 39° 17' S) nace en el lago Villarrica (39° 17' S). El río Valdivia nace de la confluencia de los ríos Calle-Calle y Cruces, y se ubica entre los 39° 44' S - 39° 53' S. Este río corre desde los 72° 26' W hasta los 73° 16' W. El río Rahue se ubica entre los 40° 19' S y 40° 50' S, naciendo en el lago Rupanco; es un afluente del río Bueno. El río Bueno, a su vez, posee como punto de nacimiento un

lago (lago Ranco). Tanto el Rahue como el Ranco son ríos navegables en sus tramos inferiores y próximos a la desembocadura. Estos últimos cuatro ríos están cruzados por un clima templado cálido con lluvias invernales, y deben atravesar cordones montañosos y la cordillera de la costa antes de alcanzar la desembocadura. Por último, en la zona austral del país se encuentra el río Baker, ubicado entre los $46^{\circ} 58' S$ y $47^{\circ} 48' S$, corriendo desde los $72^{\circ} 49' W$ hasta los $73^{\circ} 35' W$. Este río nace en el lago Bertrand ($72^{\circ} 38' W$); se caracteriza por ser el más caudaloso de Chile y está dominado por un clima templado sin estación seca. La localización referencial de los cauces aquí descritos se puede observar en la Figura 4.

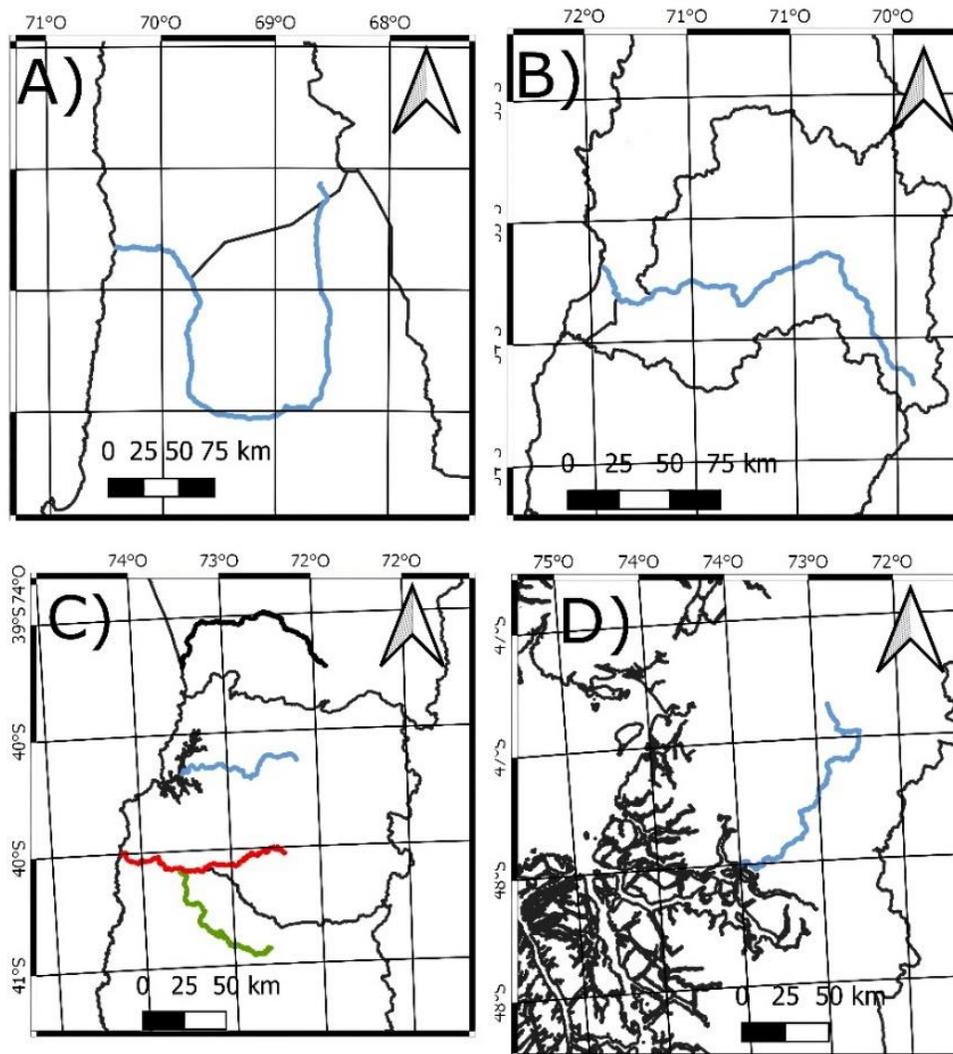


Figura 4. Ubicación de los cauces analizados en el presente estudio: a) río Loa; b) río Maipo; c) ríos Bueno, Valdivia, Toltén, Rahue; y d) río Baker. Fuente: elaboración propia.

Metodología

Para la obtención de la dimensión fractal es imperativo determinar de forma razonable el trazado medio de cada cauce. Para ello, la metodología de obtención de estos trazados se apoya esencialmente en el *software QGIS*, junto con las extensiones de *Google Earth* y los mapas vectoriales de libre acceso proporcionados por la Biblioteca del Congreso Nacional de Chile (BCN, s.f.). Las coordenadas de inicio y término de cada cauce se definieron de modo arbitrario. Escogidos estos puntos, se exportaron imágenes constituidas por la imagen satelital y los mapas vectoriales (*raster*) en una escala única de aproximadamente 1:100 000. Estas imágenes se obtuvieron del periodo 2015-2019, es decir, corresponden a las imágenes más recientes de cada cauce.

Sobre cada una de estas imágenes, se aplicó un proceso de despigmentación con apoyo en un *software* libre para tratamiento de imágenes *ImageJ* (Goto, 2019). En dicho proceso se descartaron —hasta donde fue posible— formas morfológicas y sedimentológicas, como

bifurcaciones externas al cauce principal, la aparición de islotes y otros tipos de afloramientos sedimentológicos que ocurren en la zona central del cauce, y que tienden a generar patrones de trenzamiento que dividen el trazado en varios cauces de manera simultánea. Esto dificulta la definición del eje longitudinal de cada río y de sus riberas, como se puede observar en la Figura 5. En dicha figura se muestra también el criterio usado para definir el cauce principal alrededor de una bifurcación y un islote de sedimentos.

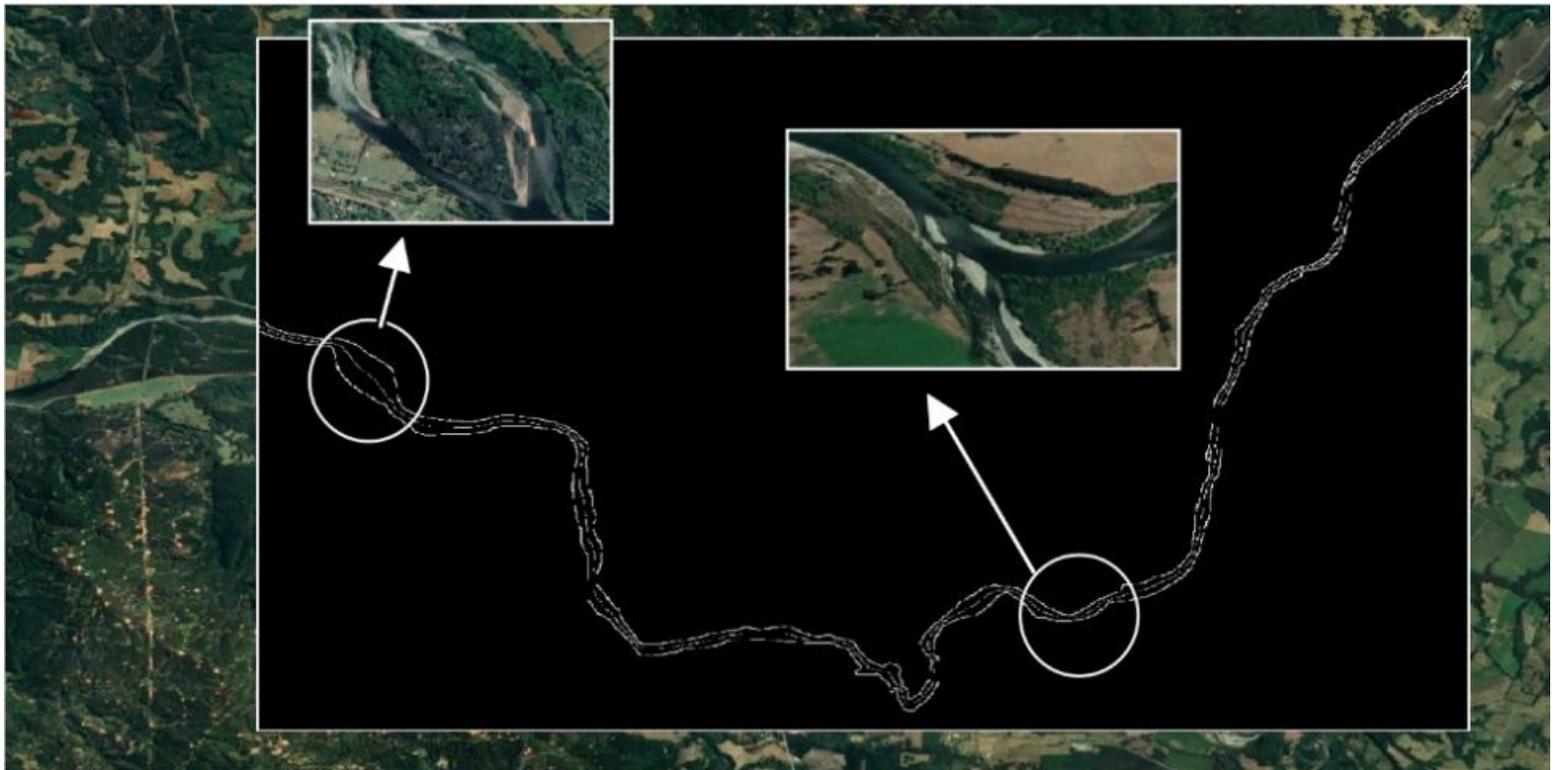


Figura 5. Ejemplo del tratamiento de imágenes para la definición de riberas de segmento del río Valdivia, donde se descartaron islotes, bifurcaciones o florecimientos sedimentológicos superficiales del río.

Fuente: elaboración propia.

Luego del proceso de despigmentación y limpieza de elementos espurios en cada imagen, ésta se convierte a una imagen en escala binaria (*i.e.* escala de blancos y negros), con objeto de facilitar la determinación de ambas riberas de cada cauce. A partir de la identificación de ambas riberas es posible obtener el eje longitudinal central de cada río utilizando un código de Matlab de elaboración propia. Dicho código permite trazar un eje equidistante de ambas riberas que, para todos los efectos, será considerado como el eje central de cada río.

Posteriormente, cada imagen es georreferenciada en el *software QGIS* para proceder a trazar de forma manual el cauce. El paso mínimo para obtener este trazado es bajo un espaciamiento de 50 metros. Este trazado corresponde al finalmente usado para el cálculo de parámetros morfométricos. Los archivos de elevación digital de cada imagen (DEM files) son exportados a través de la extensión *Terrain profile*. Dicha exportación considera las coordenadas del trazado con su respectiva elevación y longitud acumulada desde el punto de origen hasta el término de cada trazado. Una secuencia típica de este procedimiento se observa

en la Figura 6 y un ejemplo de los resultados obtenidos siguiendo secuencialmente este procedimiento se observa en la Figura 7, correspondiente al río Valdivia.

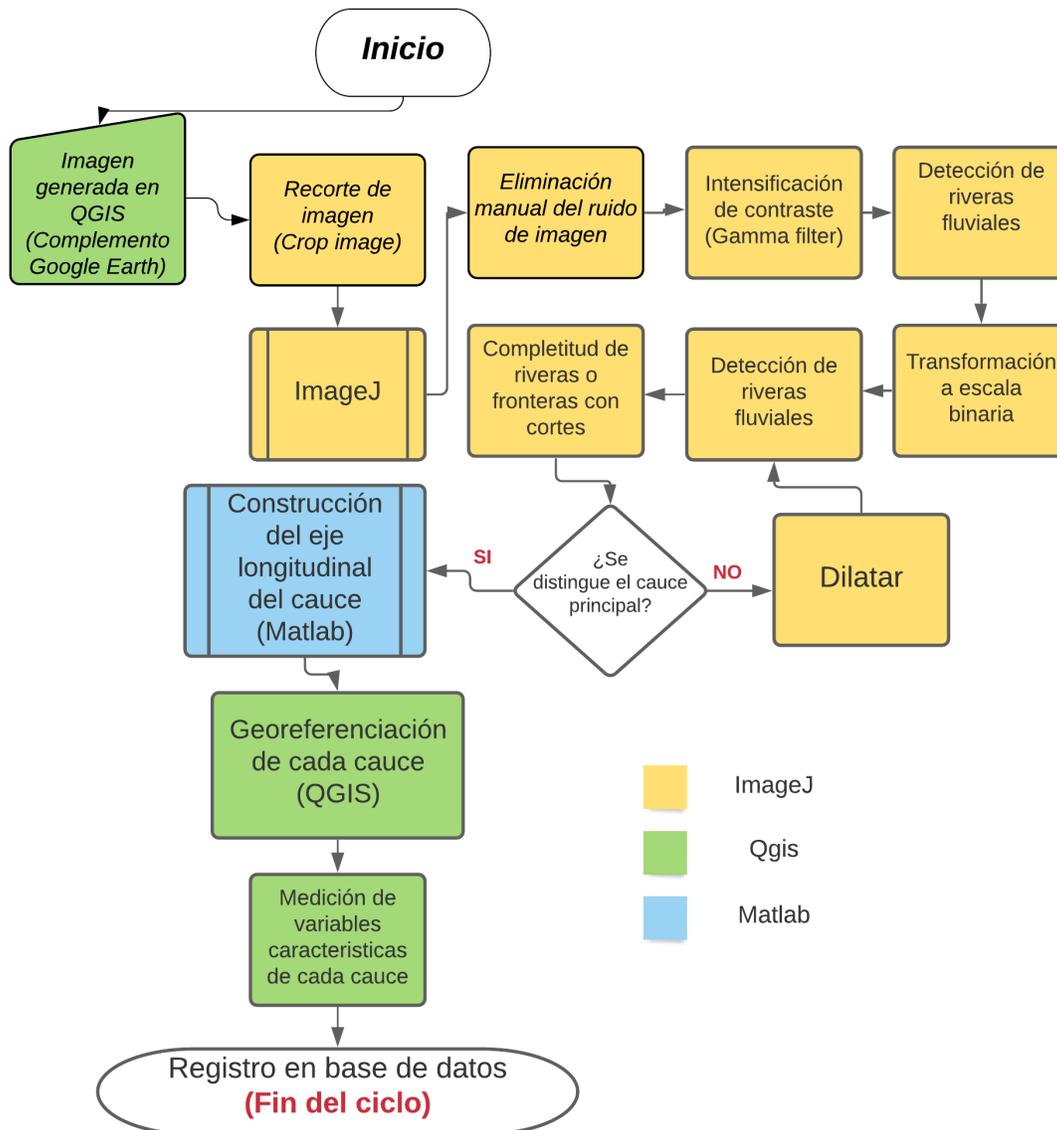


Figura 6. Secuencia de procedimientos usados para el tratamiento de imágenes. Fuente: elaboración propia.

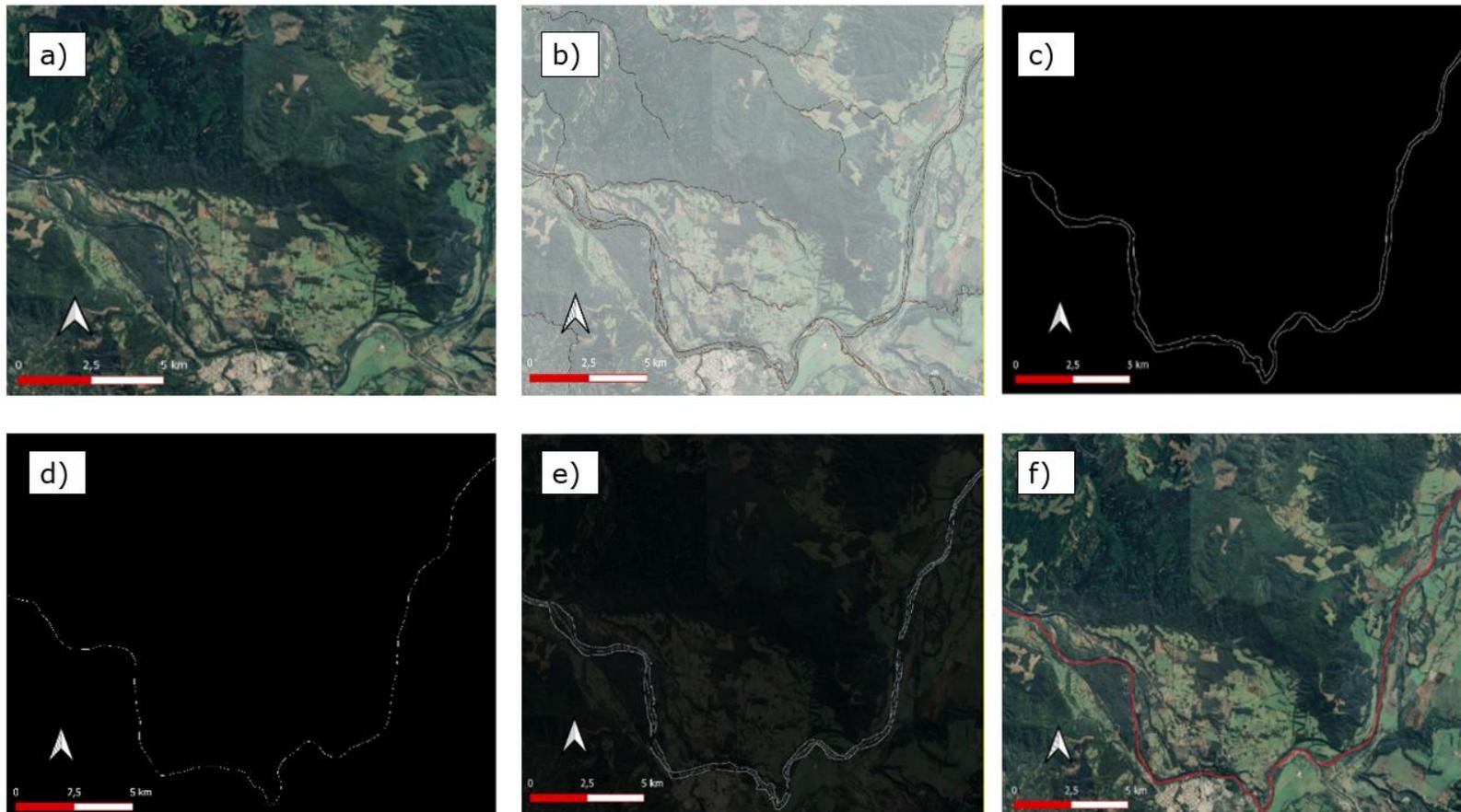


Figura 7. Ejemplo de proceso de obtención de trazado del río Valdivia: a) imagen satelital; b) imagen compuesta por distintas capas vectoriales; c) proceso de despigmentación y binarización; d) obtención del trazado medio del cauce; e) georreferenciación del cauce, y f) creación de la capa vectorial final para comparación del cauce obtenido respecto del real. Fuente: elaboración propia.

La metodología recién descrita se basa en procedimientos estandarizados reportados por varios autores en la literatura (Sghaier, Foucher y Lepage, 2017). Estos pasos permiten, además, reducir errores asociados con el dimensionamiento del cauce y que podrían acentuarse debido a la gran variabilidad que muestran las longitudes características de éste en cada imagen. La automatización del procedimiento anterior nos conduce entonces a los trazados de cada río que se muestran en la Figura 8. De cada uno de estos trazados se pueden obtener al menos los siguientes parámetros básicos: la longitud total del cauce (L_T); el ancho promedio (W); la pendiente media del cauce (i); la diferencia de elevaciones, y la sinuosidad promedio (S). Estos parámetros se muestran en la Tabla 2. Es necesario señalar que el ancho promedio (W) fue calculado considerando 10 secciones distintas equiespaciadas a lo largo de cada cauce. Sin embargo, el desnivel medio de cada río (Δz) y su pendiente media (i) se calcularon cada 1 km de trazado.

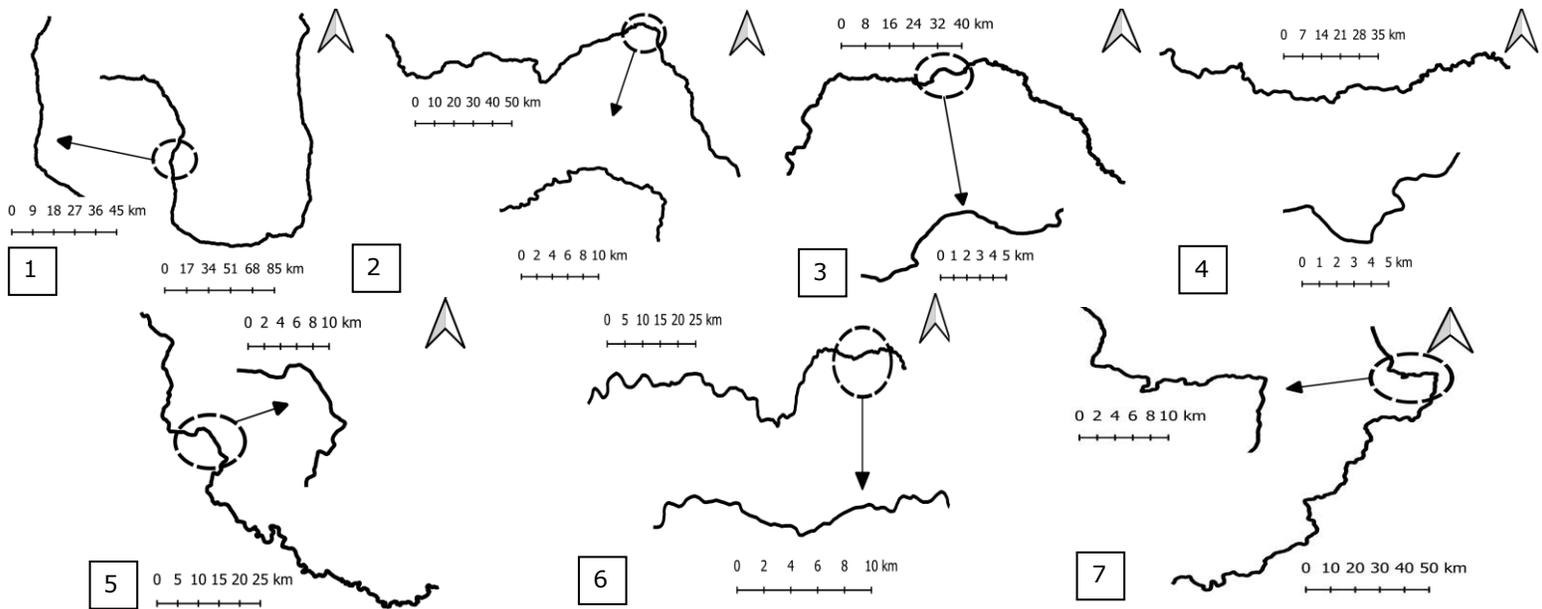


Figura 8. Forma de los cauces obtenidos. Los círculos segmentados muestran una aplicación de los ríos en una posición aleatoria, como una manera de enfatizar la similitud de formas a distintas escalas: (1) río Loa; (2) río Maipo; (3) río Toltén; (4) río Bueno; (5) río Rahue; (6) río Valdivia, y (7) río Baker. Fuente: elaboración propia.

Tabla 2. Dimensiones características de los ríos estudiados.

| Río | L_T | W | Δz | i |
|-----|-------|-----|------------|------|
| | (km) | (m) | (m) | (%) |
| Loa | 516 | 66 | 9.47 | 1.01 |

| | | | | |
|----------|-----|-----|------|------|
| Bueno | 179 | 144 | 0.36 | 0.03 |
| Toltén | 198 | 127 | 1.09 | 0.12 |
| Rahue | 168 | 92 | 0.69 | 0.08 |
| Maipo | 308 | 200 | 11.7 | 1.28 |
| Valdivia | 128 | 160 | 0.83 | 0.08 |
| Baker | 273 | 300 | 0.75 | 0.08 |

Respecto de la determinación del índice de sinuosidad, conviene aquí realizar algunas puntualizaciones importantes. Los criterios usados para el cálculo de este parámetro requieren precisar una escala de longitud para la variable L que interviene en la Ecuación (1) y que sea coherente con las otras escalas características del río (e.g., el ancho del cauce). Al respecto, la mayoría de los estudios proponen $L = \alpha W$, donde W es el ancho promedio del río y $\alpha = 1/2$ un coeficiente de proporcionalidad. Snow (1989) sugiere considerar α variable entre 1 y 2, mientras que Stolum (1996) sugiere α variable entre 7 y 40. Estos diferentes criterios son un reflejo de la variabilidad de patrones meandrosos observados en los ríos alrededor del mundo; la elección adecuada del parámetro α dependerá de las características locales de cada río y su entorno geomorfológico. Para el presente estudio y luego de un análisis cualitativo de las imágenes aéreas de cada cauce, se ha

considerado el valor $\alpha = 20$ como medida universal para el cálculo del índice S definido en la Ecuación (1). Establecido el criterio, el cálculo de S se lleva a cabo usando la extensión *RiverMetrics* del software *QGIS*, documentado e implementado por De-Rosa, Cencetti y Fredduzzi (2017).

Obtención de la dimensión fractal

Siguiendo la metodología del *paso-divisor*, se determinó la dimensión fractal global de cada cauce de acuerdo con los siguientes pasos:

- Se escoge de forma arbitraria un paso de medición de tamaño ϵ (en m o km). Siguiendo la metodología propuesta por Snow (1989), se escoge como paso mínimo la longitud de 100 m, longitud con la cual es posible reducir las limitaciones en la escala de resolución de cada imagen para cada cauce. La elección de dicha escala es por completo arbitraria y no responde necesariamente a un criterio morfológico.
- Con base en dicha elección, se mide manualmente la longitud del trazado $L(\epsilon)$ apoyándonos en los trazados de cada río mostrados en la Figura 8.

Esta longitud es almacenada en un archivo, determinando una relación unívoca entre ϵ y $L(\epsilon)$.

- Este procedimiento se repite tantas veces como sea necesario, como para poder construir una curva que contenga al menos 10 puntos de medición formados, como muestra el esquema de la Figura 3.
- De dicha gráfica, de carácter logarítmico, se extrae la pendiente del tramo recto comprendido entre los puntos de inflexión ajustando una función lineal del tipo $\log(L(\epsilon)) = A + B \log(\epsilon)$, donde $B = \tau$. En caso de que ϵ y $L(\epsilon)$ se comparen en un gráfico lineal, la función de ajuste es típicamente una relación en ley de potencia, cuya pendiente corresponde al coeficiente de potencia de la relación. Sólo en caso de que el comportamiento mostrado en la Figura 3 no sea perfectamente reproducible, dicha pendiente se determina en el tramo más recto posible.
- Del valor de dicha pendiente se obtiene la dimensión fractal como $D = 1 - \tau$.

Resultados

Distribución del índice de sinuosidad

En la Figura 9 se observan los diagramas de distribución de frecuencia en función del índice de sinuosidad, calculadas para una medida de salto del orden de 20 veces el ancho promedio de cada cauce. Se puede notar que los valores del índice S se encuentran preferentemente contenidos en el rango de 1.0 a 1.5, y solo los ríos Toltén, Bueno y Rahue pueden presentar índices mayores a 2, que corresponden a una condición de presencia significativa de meandros en el cauce.

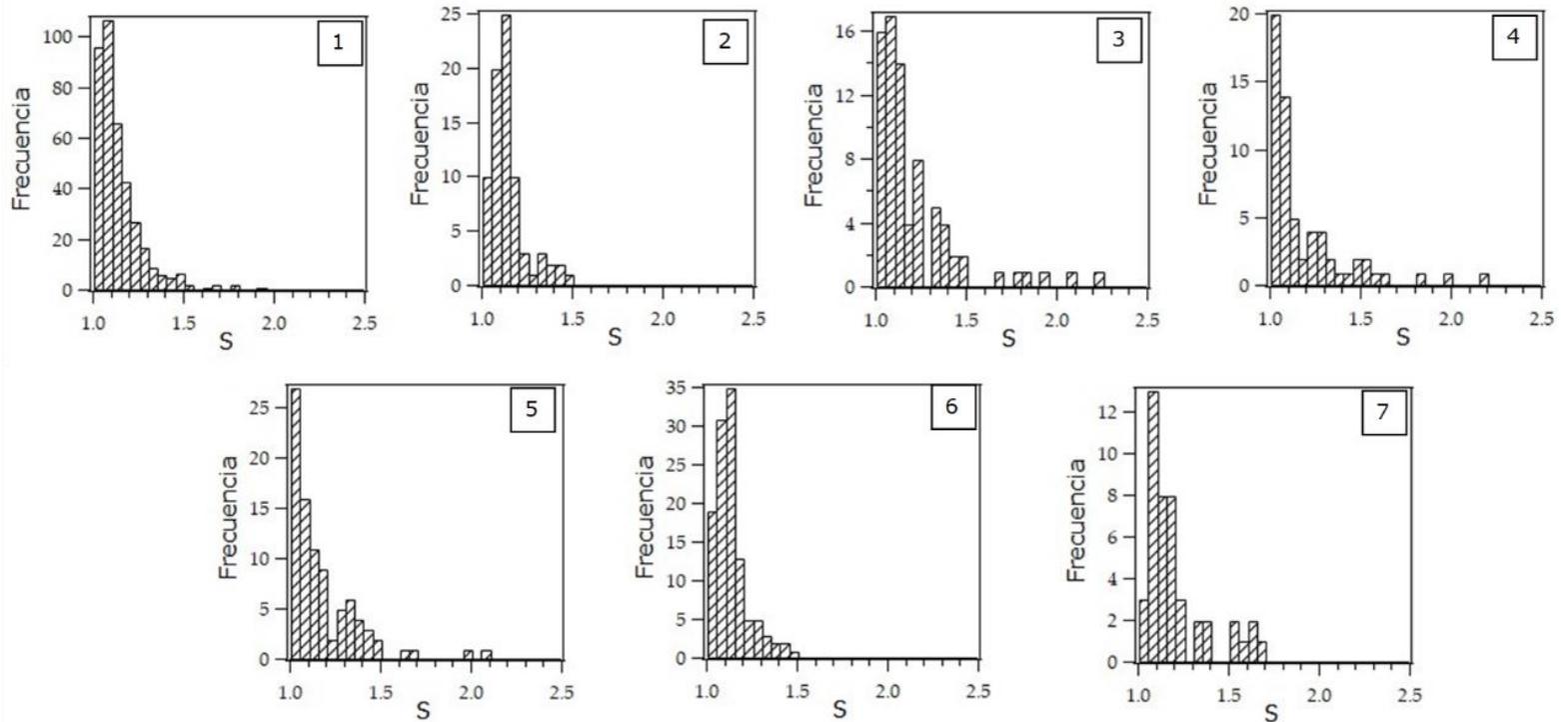


Figura 9. Distribución de frecuencia del índice de sinuosidad (S) de los ríos para un salto de medición igual a $20W$, donde W es el ancho medio de cada cauce: (1) río Loa; (2) río Maipo; (3) río Toltén; (4) río Bueno; (5) río Rahue; (6) río Valdivia, y (7) río Baker. Fuente: elaboración propia.

La Tabla 3 muestra el índice de sinuosidad obtenido de promediar las distribuciones del coeficiente de sinuosidad de cada río. Es llamativo que este promedio no depende significativamente del tamaño del paso

escogido, aunque sí puede presentar variaciones importantes de un río a otro. Los valores más altos de estos promedios se presentan para el río Rahue, acorde con lo observado en la geometría desplegada en la Figura 8.

Tabla 3. Sinuosidades promedio de cada río, calculadas para distintos medidas de salto.

| Paso (m) | Placa tectónica | | | | | | |
|-------------|-----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | Nazca Norte | Nazca Sur | | | | | Antártica |
| | Loa | Bueno | Toltén | Rahue | Maipo | Valdivia | Baker |
| 100 | 1.22± 0.17 | 1.10±0 .07 | 1.09± 0.08 | 1.30± 0.17 | 1.14± 0.02 | 1.13± 0.03 | 1.18± 0.02 |
| 1 000 | 1.15± 0.14 | 1.09±0 .15 | 1.12± 0.23 | 1.17± 0.12 | 1.09± 0.08 | 1.06± 0.07 | 1.06± 0.05 |
| 5 000 | 1.18± 0.13 | 1.24±0 .27 | 1.23± 0.17 | 1.40± 0.31 | 1.14± 0.08 | 1.16± 0.14 | 1.19± 0.22 |
| 10 000 | 1.20± 0.15 | 1.29±0 .17 | 1.26± 0.12 | 1.44± 0.24 | 1.19± 0.13 | 1.23± 0.16 | 1.28± 0.21 |

| | | | | | | | |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 20W | 1.13± 0.12 | 1.19±0 .23 | 1.20± 0.24 | 1.21± 0.31 | 1.13± 0.09 | 1.11± 0.07 | 1.20± 0.17 |
| Prom. | 1.17± 0.14 | 1.18±0 .19 | 1.18± 0.16 | 1.30± 0.23 | 1.13± 0.08 | 1.14± 0.09 | 1.18± 0.13 |

Nota: W corresponde al ancho de cada río (ver Tabla 2).

De los datos de la Tabla 3 es posible realizar una clasificación de la sinuosidad de acuerdo con Leopold y Wolman (1957). Esta clasificación se muestra en la Tabla 4. De esta tabla se desprende que la totalidad de los ríos estudiados se pueden considerar como sinuosos, y sólo en los ríos Rahue, Bueno y Baker se observa una presencia significativa de patrones meandrosos (8, 11 y 13 %, respectivamente).

Tabla 4. Porcentajes de la longitud del río que se encuentran en el rango de sinuosidad de acuerdo con Leopold y Wolman (1957).

| Río | Recto ($S < 1.05$) | Sinuoso ($1.05 < S < 1.50$) | Meandroso ($S > 1.50$) |
|--------|-------------------------|----------------------------------|-----------------------------|
| Loa | 25.0 % | 73.0 % | 2.0 % |
| Bueno | 32.0 % | 56.0 % | 11.0 % |
| Toltén | 21.0 % | 72.0 % | 8.0 % |

| | | | |
|----------|-------|--------|--------|
| Rahue | 30.0% | 64.0% | 7.0% |
| Maipo | 13.0% | 87.0% | 0.0% |
| Valdivia | 28.0% | 73.0% | 0.0% |
| Baker | 7.0% | 80.0 % | 13.0 % |

Variación longitudinal del índice de sinusidad

Para entender la variabilidad del índice de sinusidad a lo largo de cada cauce se ha construido la Figura 10. Dado que los cauces presentan distintas longitudes, resulta complejo hacer una comparación directa entre ellos. Por esta razón, se ha optado por contrastar el parámetro $S(x)$ (que es una variable adimensional en sí misma), con la coordenada natural adimensional del río x/L_T , donde x es la coordenada natural longitudinal del cauce, y los valores de L_T ya se han reportado en la Tabla 2.

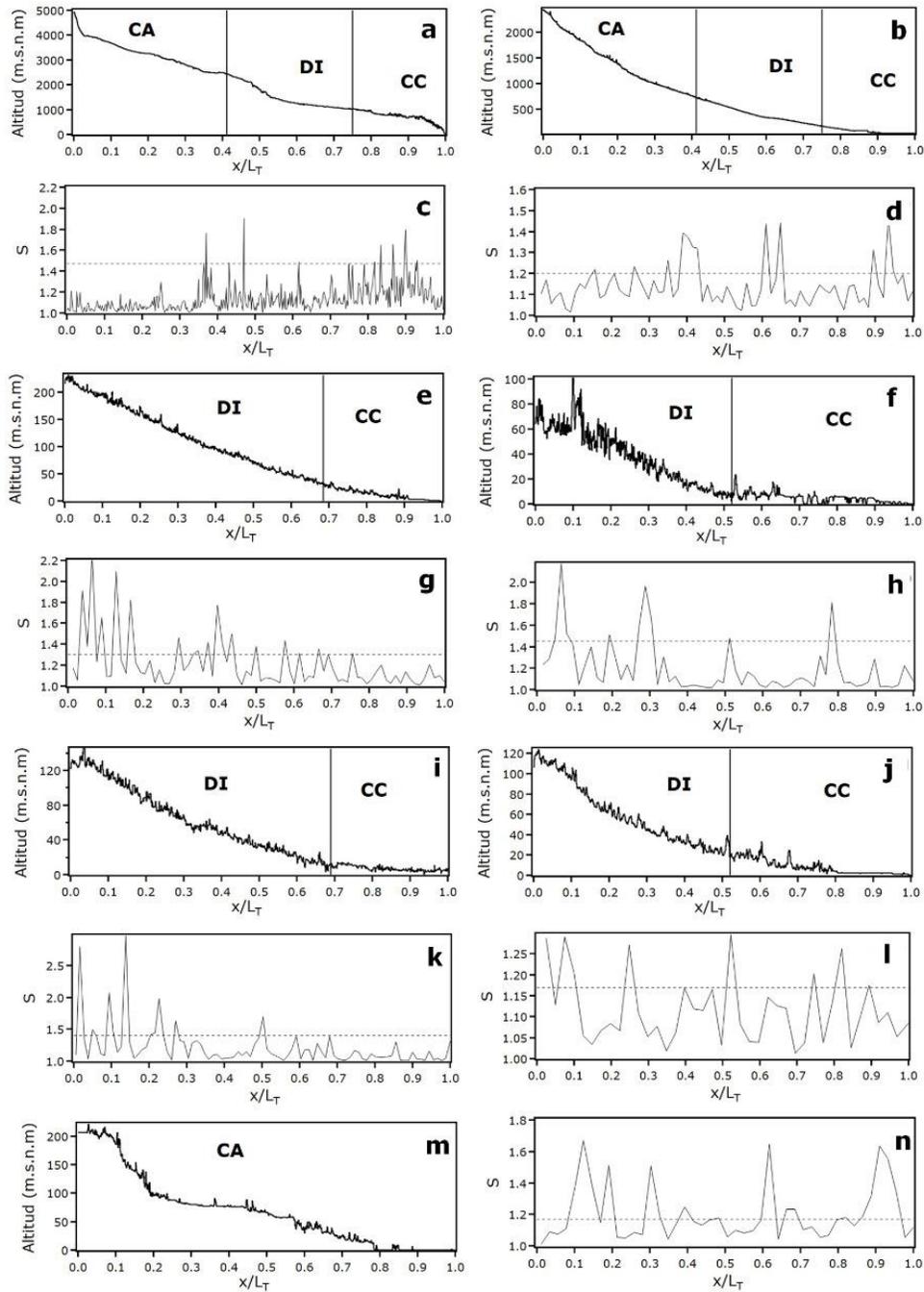


Figura 10. Distribución longitudinal del índice de sinuosidad y de la cota de fondo de cada río: a) y c) río Loa; b) y d) río Maipo; e) y g) río Toltén; f) y h) río Bueno; i) y k) río Rahue; j) y l) río Valdivia; m) y n) río Baker. El parámetro DI representa la unidad morfoestructural Depresión Intermedia; CC, la Cordillera de la Costa; y CA, la cordillera de Los Andes. Las líneas punteadas horizontales representan los valores promedio de sinuosidad de cada cauce. Fuente: elaboración propia.

Sobre la misma Figura 10 se ha trazado la cota del fondo del río $z_f(x)$ versus x/L_T . Este gráfico nos permite observar hasta qué punto la cota del cauce influye sobre el índice de sinuosidad. Las líneas verticales de cada gráfica delimitan, aproximadamente, la unidad morfoestructural que es cruzada por cada río en su paso desde el punto de origen hasta la desembocadura.

Nótese que los perfiles topográficos resultan ser en cada caso, al menos cualitativamente, bastante similares entre sí. Otra característica de interés es que la sinuosidad de cada río tiende a incrementarse a medida que el observador se aproxima hacia la desembocadura. Sin embargo, preferentemente aquellos tramos que cruzan la depresión intermedia (DI) muestran una mayor presencia de valores *peaks* en la distribución del índice $S(x)$. Otro elemento de interés es que la distribución de estos *peaks* de sinuosidad parece seguir también un patrón de

regularidad a lo largo de cada cauce. Este aparente orden podría estar relacionado con la existencia de una jerarquía asociada con la distribución de meandros, como han sugerido Vermeulen, Hoitink, Zolezzi, Abad y Aalto (2016).

Dimensión fractal de cauces

En las gráficas de la Figura 11 se reporta la longitud total $L(\epsilon)$ de cada cauce en función de distintos pasos de medición (ϵ). Como era de esperarse, todas las curvas exhiben un comportamiento decreciente, cuyos tramos de inicio y término muestran tendencias distintas respecto del resto de la curva. Estas condiciones no se consideraron para el cálculo de la pendiente media.

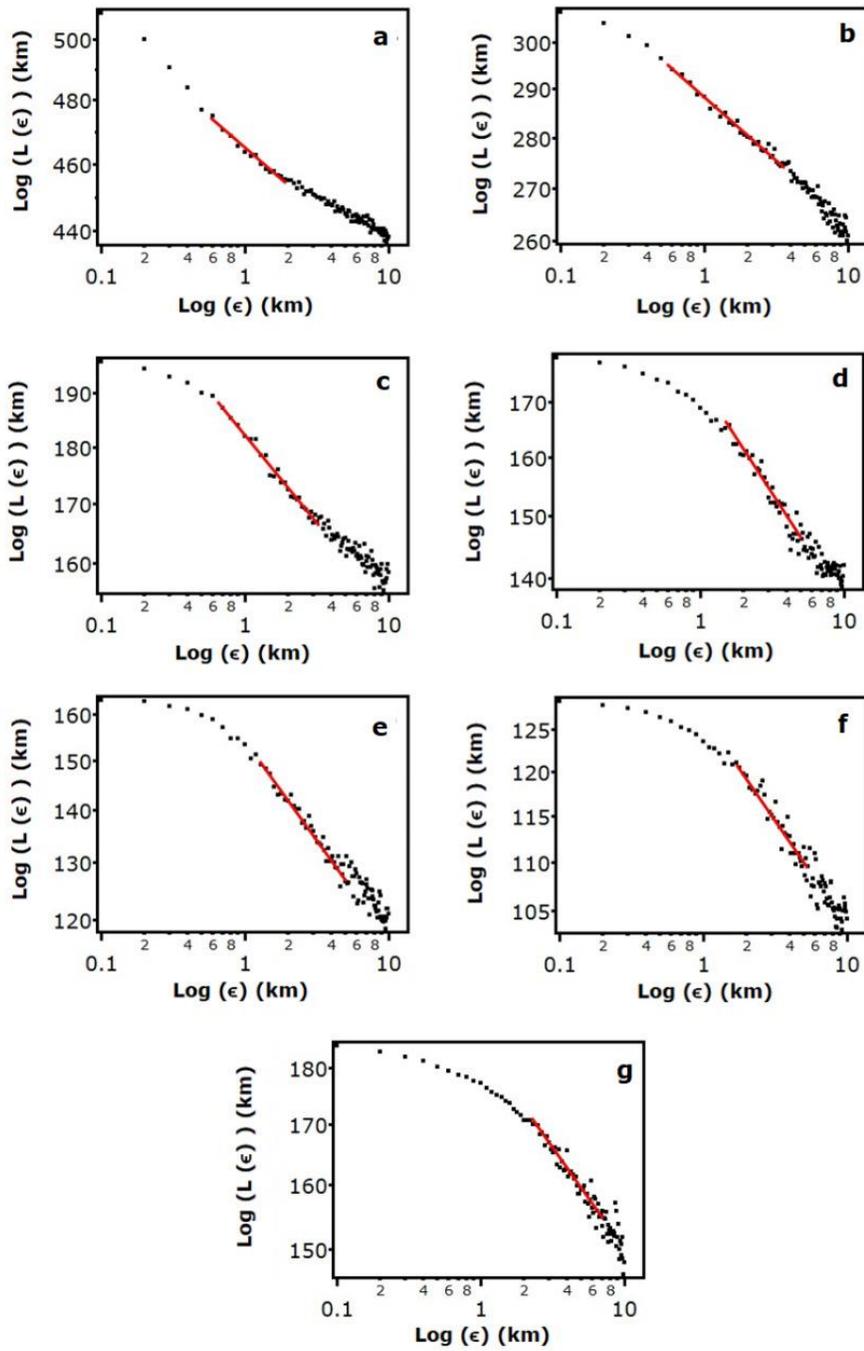


Figura 11. Relación entre longitud total $L(\epsilon)$ versus paso ϵ de medición de acuerdo con la metodología *paso-divisor* para los ríos a) Loa b) Maipo, c) Toltén, d) Bueno, e) Rahue, f) Valdivia y g) Baker. La línea continua corresponde a un ajuste lineal de cada curva, desde donde se obtiene la pendiente media de la curva. Fuente: elaboración propia.

Tomando esto en consideración, cada una de estas curvas puede ser ajustada entonces en su tramo medio por una función en ley de potencia dada por la Ecuación (2). Las líneas continuas en color rojo muestran el tramo considerado para este cálculo. Los valores medios de este cálculo se muestran en la Tabla 5, que resume la dimensión fractal (D) para cada río junto a su respectiva desviación estándar. Se puede notar que la totalidad de los ríos posee valores de dimensión fractal ligeramente superiores a la unidad.

Tabla 5. Resumen de valores de la dimensión fractal de los ríos chilenos analizados.

| Río | D |
|-------|---------------|
| Loa | 1.042 ± 0.001 |
| Bueno | 1.108 ± 0.006 |

| | |
|----------|-------------------|
| Toltén | 1.080 ± 0.003 |
| Rahue | 1.116 ± 0.001 |
| Maipo | 1.038 ± 0.001 |
| Valdivia | 1.098 ± 0.010 |
| Baker | 1.082 ± 0.002 |

En la Figura 12 en cambio, se compara la dimensión fractal en función del valor promedio del índice de sinuosidad (Figura 12a) y la pendiente media (i) (Figura 12b). Se desprende de este gráfico que un incremento del índice de sinuosidad es acompañado por un aumento en la dimensión fractal, sugiriendo una relación entre ambos parámetros, como era de esperarse. De igual manera, los mayores valores de la dimensión fractal se correlacionan con aquellos cauces que muestran una menor magnitud en su pendiente media. Tal relación ocurre típicamente en aquellas partes del cauce desarrolladas en zonas de planicie, como fue observado por Leopold y Wolman (1957).

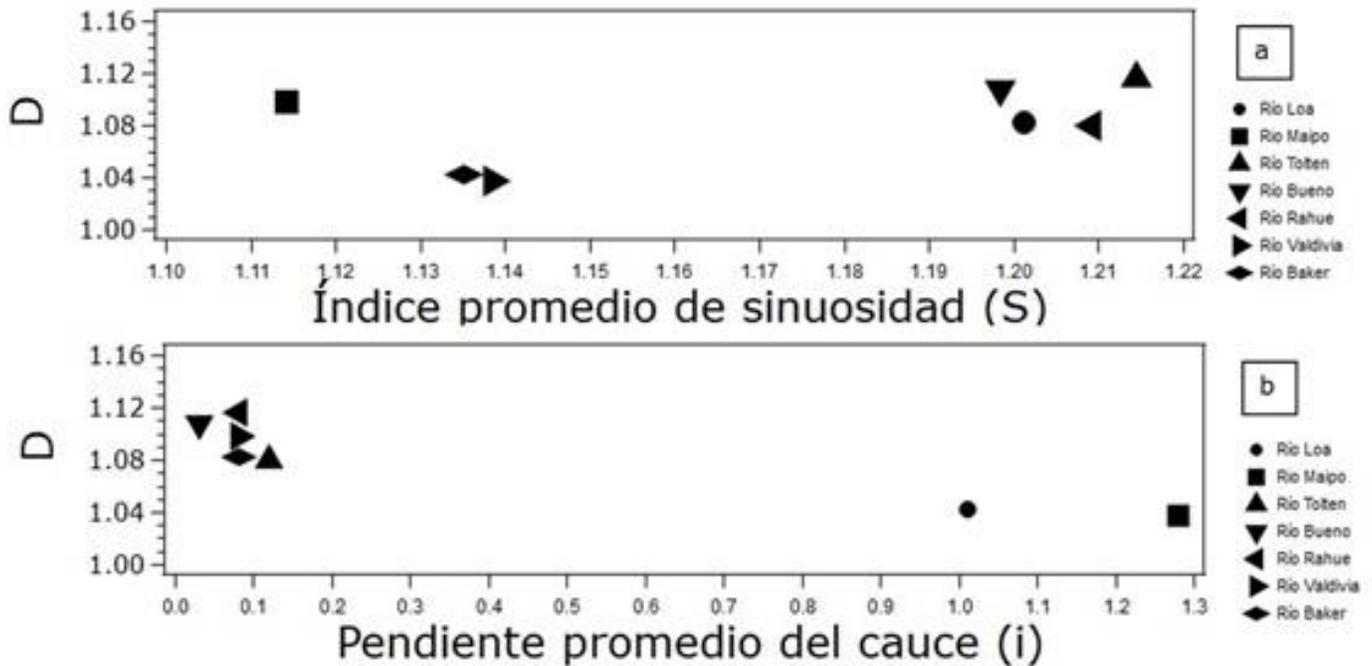


Figura 12. Dimensión fractal (D) global de cada cauce *versus* a) valor medio del índice de sinuosidad S y b) la pendiente media i de cada río, para todas las unidades estudiadas. Fuente: elaboración propia.

Discusión

De los resultados del presente estudio y de acuerdo con la clasificación de Leopold y Wolman (1957), se desprende que los ríos chilenos muestran un patrón morfológico dominante de tipo *sinuoso*. Los histogramas de frecuencia mostrados en la Figura 9 nos indican que la sinuosidad de ríos chilenos se sitúa preferentemente en el rango de 1.0 a 1.5. Estos valores son concordantes con los reportados por De-Rosa, Cencetti y Fredduzzi (2017), que calcularon este índice para distintos cauces, obteniendo valores de sinuosidad máxima de 1.39. Sin embargo, nuestras mediciones se encuentran lejos de los resultados reportados por Montgomery (1996), que calculó la sinuosidad de 38 ríos, obteniendo valores situados en un amplio rango variable entre 1.2 y 2.8, que son valores característicos de patrones meandrosos moderados y pronunciados.

Nuestras mediciones sugieren también que los valores medios del índice de sinuosidad indicados en la Tabla 3 no dependen significativamente del salto de medición escogido (ϵ), sino más bien del entorno geográfico y la unidad morfoestructural que estos ríos cruzan, como se desprende al observar la distribución longitudinal mostrada en la Figura 10. De la misma figura se infiere que los valores picos de sinuosidad ocurren de preferencia en tramos cercanos a la desembocadura. Este es un patrón distintivo de las zonas de deltas, donde las condiciones de planicie y de transporte de sedimentos inducen un

patrón de inestabilidad hidrofluvial (Leuven, Van Maanen, Lexmond, Van der Hoek, Spruijt y Kleinhans, 2018; Marani, Lanzoni, Zandolin, Seminara y Rinaldo, 2002). Sin embargo, estos picos de sinuosidad, particularmente aquellos comprendidos entre 1.0 y 1.2, parecen distribuirse de forma más homogénea a lo largo del cauce. Esta distribución sugiere que tras la organización de meandros puede existir una cierta jerarquía en la distribución de sinuosidades, como fue cuantificado por Vermeulen, Hoitink, Zolezzi, Abad y Aalto (2016).

Esta jerarquía invita a pensar entonces en la existencia de una capacidad de autoorganización de los meandros fluviales y, en consecuencia, la posibilidad de construir un parámetro que profundice el concepto de índice de sinuosidad. Un buen candidato para ello es la dimensión (mono) fractal, cuyo correlato con el índice de sinuosidad medio (S) de cada cauce (ver Figura 12a) hace pensar que tal índice puede ser usado como un descriptor geomórfico alternativo. Esta dimensión muestra estar estrictamente comprendida entre 1.02 y 1.12. Estos valores son sólo ligeramente superiores a la unidad, una consecuencia del carácter recto que predomina en los ríos chilenos. Esta cualidad puede corroborarse fácilmente al observar los trazados mostrados en la Figura 8.

Los ríos analizados se encuentran lejos de los patrones meandrosos intensos observados, por ejemplo, en varios cauces de la región

amazónica (Vermeulen, Hoitink, Zolezzi, Abad y Aalto, 2016). En estos cauces, la dimensión fractal varía típicamente entre 1.18 y 1.47 (Stolum, 1998), mientras que Montgomery (1996) reporta valores en el rango 1.05 a valores ligeramente superiores a 1.5, con un valor promedio del orden de 1.28. Este último valor se encuentra dentro del rango 1.2 a 1.4, posible de predecir según la ley de Hack (1957), lo cual demuestra que las estimaciones mediante el método paso-divisor son consistentes con otras vías de cálculo. A conocimiento de los autores, los estudios de Stolum (1998) y Montgomery (1996) son de los muy escasos reportes existentes a la fecha donde se documentan estimaciones de la dimensión fractal de meandros.

Acciones antrópicas inducidas por la presencia de obras hidráulicas (e.g., puentes, embalses, represas, etc.) sólo tienen un efecto local en la forma de los meandros, lo cual acentúa el control natural que parece gobernar las características de estas macroformas. Esta cualidad es consistente con los estudios de Mandelbrot (1983) y los estudios de Stolum (Stolum, 1996; Stolum, 1998), que enfatizan la capacidad organizativa de sistemas complejos, en particular los sistemas fluviales. La Figura 12b sugiere, sin embargo, que la dimensión fractal pudiese estar siendo controlada por la pendiente media de cada cuenca, un signo de que la fractalidad de los sistemas aquí estudiados poseen limitantes que parecen provenir de la propia topografía ambiente. Estas restricciones

pueden estar, a su vez, controladas por variables de orden tectónico, como sugiere Phillips (2002).

Las mediciones reportadas en este estudio plantean varios desafíos y perspectivas que ameritan ser profundizadas. Tal vez la más importante de ellas tiene relación con la determinación de la dimensión fractal a distintas escalas de observación. Estos estudios son muy escasos en la literatura internacional, en particular en la realidad latinoamericana, donde tales mediciones son prácticamente inexistentes. La observación de estos sistemas a distintas escalas fotogramétricas permitiría precisar la medición de la longitud, ancho y extensión de estos meandros, además de definir el valor de la dimensión fractal. Los autores advierten que éste es un trabajo en extremo laborioso, aunque necesario, y que podría ayudar a entender mejor la estructura jerárquica que parece dominar la distribución de meandros en un cauce como describe Vermeulen, Hoitink, Zolezzi, Abad y Aalto (2016).

Otro elemento de interés es estudiar qué variabilidad posee esta dimensión para distintas escalas de tiempo. Una de las limitantes del presente estudio radica en que las fotografías analizadas corresponden a un intervalo acotado de tiempo, en algunos casos, casi puntual. Tal restricción podría relajarse contando con más información acerca de la evolución espacial de los cauces a lo largo de varias décadas y así entender mejor hasta qué punto las variables hidrológicas pueden influir

en la forma del cauce y con ello en la dimensión fractal global. Por último, estudios posteriores en el tópico se abocarán a determinar la longitud de onda de los meandros observados en ríos chilenos, que es otro parámetro de forma que podría dar luces acerca de la regularidad observada en estos meandros (Ferguson, 1975).

Conclusiones

En el presente estudio se ha determinado de forma pionera el valor medio del índice de sinuosidad global y la dimensión fractal global asociada con los meandros de siete ríos chilenos ubicados en distintas regiones del país. Los valores de esta dimensión resultan en el intervalo de 1.04 a 1.12. Estos resultados son concordantes con la geometría asociada con cada uno de los trazados fluviales, cuyos patrones son predominantemente rectos. Observaciones en esta misma línea han sido realizadas por otros autores, midiendo la dimensión fractal en ríos con diferentes niveles de sinuosidad, encontrando un correlato significativo entre este coeficiente y las características sinuosas. La dimensión fractal y, de modo más general,

la teoría de objetos fractales puede ser entonces una herramienta de interés para contribuir a la descripción de sistemas fluviales, los que parecen revelar una capacidad de autoorganización asociada con los meandros que se generan en el cauce. Este enfoque, sin embargo, esconde algunas limitaciones que ameritan ser profundizadas en estudios posteriores, entre ellas, la relación entre fractalidad y las restricciones impuestas por factores del relieve y de control tectónico siempre presentes en la génesis de una red fluvial. Otro elemento de interés es comprender hasta qué punto la dimensión fractal depende de la hidrología de cada sistema y de las escalas temporales asociadas con eventos hidrológicos de gran magnitud (e.g., crecidas, sequías). Tales variables alteran no sólo el régimen de caudales de cada río, sino además la dinámica de transporte de sedimentos. ¿Son estos factores suficientes capaces de alterar significativamente la dinámica de meandros en un río? Esta es una de las interrogantes que se espera seguir profundizando con el tiempo.

Referencias

Amiot, E. (2008). Autosimilar melodies. *Journal of Mathematics and Music*, 2(3), 157-180.



BCN, Biblioteca del Congreso Nacional de Chile (s.f.). *Mapas vectoriales. Mapoteca*. Recuperado de https://www.bcn.cl/siit/mapas_vectoriales

Charrier, R., Pinto, L. y Rodríguez, M. (2007). Tectonostratigraphic evolution of the Andean orogen in Chile. In: Moreno, T., y Gibbons, W. (eds.). *The geology of Chile* (pp. 21-114). London, UK: The Geological Society.

De-Rosa, P., Cencetti, C. y Fredduzzi, A. (2017). An Automated Method for River Sinuosity Calculation Using QGIS. *GEAM Geoingeniería Ambiental e Mineraria*, 151, 2, 81-84.

Dodds, P.S. y Rothman, D. H. (2000). Scaling, Universality and Geomorphology. *Annual Review of Earth Planetary Sciences*, 28, 571-610.

Falconer, K. J. (1991). Measure, topology and fractal geometry, by Gerald A. Edgar. Pp 230. DM58. 1990. ISBN 3-540-97272-2 (Springer). *The Mathematical Gazette*, 75(472), 237-237. <https://doi.org/10.2307/3620293>

Ferguson, R. I. (1975). Meander irregularity and wavelength estimation. *Journal of Hydrology*, 26, 3-4, 315-333.

Goto, M. (2019). Image processing using Image J. *Japanese Journal of Radiological Technology*, 75, 7, 688-692.

Gouyet, J.-F. y Bug, A. L. R. (1997). Physics and Fractal Structures. *American Journal of Physics*, 65(7), 676–677. <https://doi.org/10.1119/1.18629>

Gurung, K. (2017). *Fractal dimension in architecture an exploration of spatial dimension* (MSc Thesis). Department of Architecture, Facility Management and Geoinformation, Anhalt University of Applied Sciences, Germany.

Hack, J. T. (1957). Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland. *United States Geological Survey Professional Paper*, 294B, 45-94.

Jerry E. Mueller (1968) An introduction to the hydraulic and topographic sinuosity indexes, *Annals of the Association of American Geographers*, 58:2, 371-385, DOI: 10.1111/j.1467-8306.1968.tb00650.x

Leopold, L. B. y Wolman, M. G. (1957). River channel patterns: Braided, meandering, and straight. *USGS Professional Paper*, 282-B:51.

Leuven, J. R. F. W., Van Maanen, B., Lexmond, B., Van der Hoek, B., Spruijt, M. y Kleinhans, M. G. (2018). *Geology*, 46, 10, 923-926.

Luebert, F. y Pliscoff, P. (2006). *Sinopsis bioclimática y vegetacional de Chile*. Santiago de Chile, Chile: Editorial Universitaria.

- Mandelbrot, Benoit B. y Mandelbrot, Benoit B. (1983). *The fractal geometry of nature*. New York: W.H. Freeman
- Mandelbrot, B. (1967). How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 156, 3775, 636-638.
- Marani, M., Lanzoni, S., Zandolin, D., Seminara, G. y Rinaldo, A. (2002). Tidal meanders. *Water Resources Research*, 38, 11, 1225, 1-14.
- Montgomery, K. (1996). Sinuosity and fractal dimension of meandering rivers. *Area*, 28, 491-500.
- Phillips, J. D. (2002). Interpreting the fractal dimension of river networks. In: Lam, N. S. N., De Cola, L. (eds.). *Fractals in Geography* (pp. 142-157). New Jersey, USA: PTR Prentice-Hall, Inc.
- Pilgrim, I. y Taylor, R. P. (2018). Chapter, fractal analysis of time-series data sets: Methods and challenges. In: Sid-Ali Ouadfeul (ed.). *Fractal analysis*. |: 10.5772/intechopen.81958
- Reljin, I. S. y Reljin, B. D. (2002). Fractal geometry and multifractals in analyzing and processing medical data and images. *Archive of Oncology*, 10(4), 283-293. <https://doi.org/10.2298/AOO0204283R>
- Richardson, L. F. (1961). The problem of contiguity: An appendix to statistics of deadly quarrels. *General System Yearbook*, 6, 139-187.
- Schumm, S.A. (1960). The shape of alluvial channels in relation to sediment type: U.S.G.S. *Professional Paper*, 352-B, 17-30.

- Schumm, S.A. y Khan, H. R. (1972). Experimental study of channel patterns. *Nature*, 233, 407-409.
- Sghaier, M.O., Foucher, S. y Lepage, R. (2017). River extraction from high-resolution SAR images combining a structural feature set and mathematical morphology. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 10, 3, 1025-1038.
- Snow, R. S. (1989). Fractal sinuosity of stream channels. *PAGEOPH*, 131, 99-109.
- Stolum, H.-H. (1998). Planform geometry and dynamics of meandering rivers. *GSA Bulletin*, 110, 11, 1485-1498.
- Stolum, H.-H. (1996). River meandering as a self-organization process. *Science*, 271, 5256, 1710-1713.
- Vermeulen, B., Hoitink, A. J. F., Zolezzi, G., Abad, J. D. y Aalto, R. (2016). Multiscale Structure of Meanders. *Geophysical Research Letters*, 43, 3288-3297.
- Werner, D. H. y Ganguly, S. (2003). An overview of fractal antenna engineering research. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 45, 1, 38-57.