

DOI: 10.24850/j-tyca-14-02-06

Artículos

Caracterización probabilística de las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales mediante la distribución de von Mises

Probabilistic characterization of the dates of occurrence of annual floods using the von Mises distribution

Daniel Francisco Campos-Aranda¹, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9876-3967>

¹Profesor jubilado de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí, México, campos_aranda@hotmail.com

Autor para correspondencia: Daniel Francisco Campos-Aranda, campos_aranda@hotmail.com

Resumen

La planeación y manejo de los recursos hidráulicos de un río y la elaboración de los planes —de tipo no estructural— de mitigación de daños causados por sus inundaciones dependen de la relación que guarda el gasto máximo anual con su fecha de ocurrencia. Tales fechas, al acontecer durante el año, pueden ser tratadas como *datos circulares*,



cuyos estadísticos de dirección media y dispersión, o índice de estacionalidad, definen los dos parámetros de ajuste de la *distribución de von Mises* (dvM), la cual permite la caracterización probabilística de las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales; es decir, define su función de distribución de probabilidades. En este estudio se describe la dvM y su método de ajuste por máxima verosimilitud cuando los datos o fechas anuales son unimodales y abarcan todo el año. Cuando las fechas anuales se concentran en una porción del año, la dvM se ajusta con optimización numérica, vía el algoritmo de Rosenbrock. Por último, se describe cómo se representan, con una mezcla de tres dvM, las fechas de ocurrencia que son bimodales, cuyo ajuste, vía optimización numérica restringida, se realizó con el algoritmo Complex. Como un caso de aplicación, se procesaron las fechas de ocurrencia de 777 crecientes anuales registradas en 21 estaciones hidrométricas de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México; se exponen con detalle siete aplicaciones típicas de los tres tipos de ajuste de la dvM. Las conclusiones ratifican a la dvM como modelo probabilístico de las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales, sean unimodales o bimodales.

Palabras clave: índices de estacionalidad, distribución de von Mises, integración numérica, algoritmo de Rosenbrock, algoritmo Complex, funciones objetivo, mezcla de distribuciones de von Mises.

Abstract

The planning and management of a river's water resources, and the preparation of non-structural plans for flood damage mitigation, depend



on the relationship between the annual maximum flows and their date of occurrence. Such dates, as they occur all year long, can be treated as *circular data*, whose statistics of mean direction and dispersion or seasonality index define the two parameters of a *von Mises distribution* (dvM). Such distribution allows the probabilistic characterization of the dates of occurrence of annual floods; that is, it defines their probability distribution function. This study describes the dvM and its maximum likelihood parameter estimation method when the annual data or dates are unimodal and cover the entire year. When the annual dates are concentrated in a period of the year, the dvM is fitted with numerical optimization, via the Rosenbrock algorithm. Finally, when dates of occurrence are bimodal, they are represented by a mixture of three dvMs, which are fitted by means of restricted numerical optimization, using the complex algorithm. As a case study, the dates of occurrence of 777 annual floods registered in 21 hydrometric stations of Hydrological Region No. 10 (Sinaloa), Mexico were processed; detailing seven typical applications of the three types of dvM fittings. The conclusions ratify the dvM, as a probabilistic model of the dates of occurrence of annual floods, either unimodal or bimodal.

Keywords: Seasonality indices, von Mises distribution, numerical integration, Rosenbrock algorithm, Complex algorithm, objective functions, mixture of von Mises distributions.

Recibido: 02/08/2021

Aceptado: 07/10/2021



Introducción

Generalidades

El *análisis de frecuencias de crecientes* (AFC) es quizás la estimación hidrológica más importante, al permitir definir las llamadas *crecientes de diseño*, las cuales son *predicciones* de gastos máximos anuales asociados con bajas probabilidades de ser excedidos. Con base en las crecientes de diseño se dimensionan hidrológicamente los puentes, diques o muros de contención, las rectificaciones o canalizaciones y todas las obras del drenaje urbano; además, permiten formular los planes de mitigación del riesgo y daños de las inundaciones (Chen, Guo, Yan, Lui, & Fang, 2010; Khedun, Singh, & Byrd, 2019).

El AFC *univariado* por lo común procesa el registro de gastos máximos anuales, adoptando un modelo probabilístico o *función de distribución de probabilidades* (FDP) para realizar las inferencias o *predicciones* buscadas (crecientes de diseño). Para que los resultados del AFC sean confiables, los datos procesados deben ser aleatorios, se deben



probar varias FDP y seleccionar la que mejor represente al registro disponible (Kite, 1977; Stedinger, Vogel, & Foufoula-Georgiou, 1993; Rao & Hamed, 2000; Meylan, Favre, & Musy, 2012; Stedinger, 2017; Teegavarapu, Salas, & Stedinger, 2019).

Por otra parte, el riesgo de las inundaciones y sus daños están función directa del volumen de agua que escurre por el cauce y que excede su límite, desbordándose y cubriendo las planicies de inundación. Sin embargo, la *fecha de ocurrencia* del evento es tan importante como su magnitud y en algunos casos mayor, cuando se presentan fuera de la temporada húmeda, debido a que toma a la población desprevenida y causa daños mayores (Khedun *et al.*, 2019).

Entonces, el conocimiento sobre la probabilidad de ocurrencia de las crecientes a lo largo del año es vital para la elaboración de los planes no estructurales de mitigación de daños, que incluyen la preparación para el evento, con el propósito de reducir la exposición y vulnerabilidad de la población, así como optimizar los recursos económicos disponibles para la emergencia y acelerar la recuperación posterior al evento (Durrans, Eiffe, Thomas, & Goranflo, 2003; Khedun *et al.*, 2019).

Entender el comportamiento estacional de las crecientes es vital en la planeación y el manejo de los recursos hidráulicos del río tanto para los usos agrícolas e hidroeléctricos como para la navegación, usos recreativos y otras actividades asociadas con los cuerpos de agua. Por lo anterior, conocer la relación que guardan el gasto máximo con su fecha de ocurrencia es de suma importancia, al grado de requerir su estudio conjunto bivariado (Chen *et al.*, 2010).

El AFC *bivariado* comenzó formalmente a principios del siglo XXI (Yue & Rasmussen, 2002), y por lo general se basó en el gasto máximo y el volumen de las crecientes anuales, utilizando la distribución Normal bivariada y el llamado modelo Logístico, que acepta como FDP *marginales iguales* a las distribuciones de valores extremos, las más comunes la Gumbel y la GVE (Escalante-Sandoval & Reyes-Chávez, 2002; Aldama, Ramírez, Aparicio, Mejía-Zermeño & Ortega-Gil, 2006).

En la actualidad, mediante el uso de la herramienta matemática conocida como “Cópulas”, se pueden construir FDP bivariadas con marginales de tipos diferentes debido a que las *funciones cópula* permiten representar distribuciones multivariadas a partir de las FDP univariadas o *marginales*, sin importar su forma o tipo (Kottegoda & Rosso, 2008; Genest & Chebana, 2017; Zhang & Singh, 2006; Zhang & Singh, 2019).

Objetivo

Los *objetivos* de este estudio se pueden englobar en los cuatro siguientes: (1) se expone con detalle la *distribución de von Mises* (dvM) y su método de ajuste por máxima verosimilitud, para datos que abarcan todo el año; (2) se detalla su técnica de ajuste por optimización numérica, vía algoritmo de Rosenbrock, para datos que se concentran en un periodo o

lapso del año; (3) se describe cómo se representan, con una mezcla de tres *dvM*, las fechas de ocurrencia que son bimodales, cuyo ajuste, vía optimización numérica restringida, se realizó con el algoritmo Complex, y (4) se procesan las fechas de ocurrencia de 777 crecientes anuales registradas en 21 estaciones hidrométricas de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México, y se exponen con detalle siete aplicaciones típicas de los tres tipos de ajuste de la *dvM*.

Teoría operativa

Estadísticos direccionales

Cuando un dato no es escalar sino angular o direccional, tal valor puede ser representado como un *dato circular* y teniendo varios de ellos se pueden obtener sus *estadísticos direccionales* que los describen. La teoría que respalda tales estimaciones data de principios de los años de 1970 y constituye una herramienta simple para obtener medidas de similitud procedentes de las fechas de ocurrencia de los eventos extremos

hidrológicos, como por ejemplo, las crecientes o gastos máximos de un río.

Existen diversas convenciones o formas de usar el círculo para estimar los estadísticos direccionales (Ramírez-Orozco, Gutiérrez-López, & Ruiz-Silva, 2009); en adelante se usará la convención de Burn (1997), por su semejanza con los cuadrantes cartesianos. En tal esquema, el avance es contrario a las manecillas del reloj, iniciando en el eje de las abscisas; por ello, el día 1 de enero y el día 31 de diciembre coinciden en tal inicio (Campos-Aranda, 2017).

Las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales son datos que pueden ser tratados (dibujados y analizados) como *datos circulares* debido a que se presentan dentro de los 365 días de cada año. Por ello, primero se transforma cada fecha a día juliano (de 1 a 365) y después a radianes (0 a 2π). La FDP que se emplea para representar tales datos circulares cuando se distribuyen a lo largo del año mostrando una moda se conoce como *distribución de von Mises* (dVM), la cual es considerada el equivalente de la distribución Normal para los datos escalares.

Índices de estacionalidad

Para establecer sus tres valores: $\bar{\alpha}$, DMC y \bar{r} , se comienza por transformar cada fecha de ocurrencia de las crecientes anuales a día juliano (D_i), es decir, de 0 a 365; lo anterior implica no considerar los años bisiestos. Si una creciente ocurre el 29 de febrero, se le asigna el día 28. Las fechas de enero quedan igual, pero a las de febrero se les suma 31, a las de marzo 59, a las de abril 90 y así sucesivamente hasta las de diciembre, que se les agrega 334, para obtener el día juliano. Enseguida se obtiene el ángulo α_i en radianes correspondientes a la fecha i de cada creciente (D_i), con la expresión siguiente (Burn, 1997; Cunderlik, Ouarda, & Bobée, 2004; Chen, Singh, Guo, Fang, & Liu, 2013; Campos-Aranda, 2017):

$$\alpha_i = 2\pi \frac{D_i}{365} = X_i \text{ con } 0 \leq \alpha_i \leq 2\pi \quad (1)$$

en la cual π es número pi con 3.14159265 como valor aproximado y X_i es la variable aleatoria de las fechas de ocurrencia. Enseguida, las coordenadas x y y de las fechas de ocurrencia de las crecientes descritas por los ángulos α_i se estiman con base en los cosenos y senos, y se obtienen sus valores medios, según las ecuaciones siguientes:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\alpha_i) \quad (2)$$



$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{sen}(\alpha_i) \quad (3)$$

siendo n el número de fechas de ocurrencia de las crecientes anuales analizadas. Ahora la dirección media ($\bar{\alpha}$) de la fecha promedio de las crecientes será:

$$\bar{\alpha} = \text{arc tan} \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right) \quad (4)$$

La aplicación de la ecuación anterior se realiza obteniendo primero el arco tangente de \bar{y} entre \bar{x} , ambas con signo positivo denominado α , en radianes; entonces, si \bar{x} y \bar{y} son positivas $\bar{\alpha} = \alpha$; si $\bar{x} < 0$ y $\bar{y} > 0$ $\bar{\alpha} = \pi - \alpha$; si ambas son negativas $\bar{\alpha} = \pi + \alpha$, y por último, si $\bar{x} > 0$ y $\bar{y} < 0$ $\bar{\alpha} = 2\pi - \alpha$. Los ángulos α_i y $\bar{\alpha}$ se transforman a grados (de 0 a 360°) al multiplicarlos por 57.295755.

El valor de $\bar{\alpha}$ en día juliano se denomina *día medio de las crecientes* (*DMC*) y se obtiene dividiendo entre 2π y multiplicando por 365. El índice *DMC* indica la fecha promedio de ocurrencia de los gastos máximos anuales en una cuenca dada. Se puede esperar que cuencas con valores similares del *DMC* presenten semejanzas en otras características hidrológicas importantes. Lógicamente, el *DMC* estará relacionado con el tamaño de la cuenca y con su localización geográfica dentro de la región hidrológica estudiada (Burn, 1997; Cunderlik *et al.*, 2004).

Una medida de la variabilidad de las n fechas de ocurrencia de las crecientes en relación con el DMC se puede estimar calculando la resultante media, cuya expresión es:

$$\bar{r} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \quad (5)$$

El *índice de estacionalidad* \bar{r} es una medida adimensional de la dispersión de los datos, toma valores entre 0 y 1. Un valor unitario indica que todas las crecientes ocurren en la misma fecha; en cambio un valor cercano a cero implica gran variabilidad de ocurrencias a lo largo de todo el año.

Ramírez-Orozco *et al.* (2009) establecen los siguientes cinco grados de estacionalidad: (1) muy fuerte, cuando $\bar{r} > 0.90$; (2) fuerte, cuando \bar{r} fluctúa entre 0.70 y 0.90; (3) media, cuando \bar{r} varía de 0.50 a 0.70; (4) baja, cuando \bar{r} cambia de 0.10 a 0.50; y (5) muy baja o débil, cuando $\bar{r} < 0.10$. Chen *et al.* (2013) indican que si \bar{r} es cercano a la unidad, se puede esperar que una sola temporada o época de crecientes sea dominante.

La distribución de von Mises

Este modelo probabilístico es de uso común para representar variables aleatorias que tienen dirección en dos dimensiones y una moda única. Por ello, la *distribución de von Mises* (dvM) se considera la analogía natural del modelo Normal para datos estacionales. Su función de densidad de probabilidad es la ecuación siguiente (Metcalf, 1997; Carta, Bueno, & Ramírez, 2008; Chen *et al.*, 2010):

$$f(x) = \frac{\exp[\kappa \cdot \cos(x - \mu)]}{2\pi I_0(\kappa)} \text{ con } 0 \leq x \leq 2\pi, 0 < \mu \leq 2\pi, \kappa > 0 \quad (6)$$

La dvM es simétrica con su moda en $x = \mu$, que también es su *dirección media* ($\bar{\alpha}$) y la dispersión está dada por el *parámetro de concentración* κ (kappa). El denominador de la Ecuación (6) hace que el área bajo la curva sea unitaria y por ello se le llama *factor de normalización* (FN); incluye la función modificada de Bessel de primer tipo de orden cero [$I_0(\kappa)$]. Metcalfe (1997) expone los resultados del método de máxima verosimilitud para estimar los dos parámetros de ajuste de la dvM mediante las expresiones:

$$\mu = \bar{\alpha} \quad (7)$$

$$\bar{r} = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \quad (8)$$

La Ecuación (7) indica que μ se calcula con la Ecuación (4). En la Ecuación (8), el numerador es la función modificada de Bessel de primer tipo de orden uno. Las funciones de Bessel citadas de orden ν se pueden estimar con la siguiente serie ascendente (Olver, 1972):

$$I_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \quad (9)$$

Metcalf (1997) además presenta las siguientes tres aproximaciones para estimar el parámetro de concentración κ , según el valor del recíproco de \bar{r} (Ecuación (8)), las cuales son:

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{I_0(\kappa)}{I_1(\kappa)} = 2\kappa + \kappa^3 + 5\kappa^5/6 \text{ para } \kappa < 0.53 \quad (10)$$

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{I_0(\kappa)}{I_1(\kappa)} = -0.4 + 1.39\kappa + 0.43/(1 - \kappa) \text{ para } 0.53 \leq \kappa < 0.85 \quad (11)$$

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{I_0(\kappa)}{I_1(\kappa)} = 1/(\kappa^3 - 4\kappa^2 + 3\kappa) \text{ para } \kappa \geq 0.85 \quad (12)$$

Cuando el índice de estacionalidad \bar{r} (Ecuación (5)) es mayor de 0.804 e indica una concentración fuerte, se emplea la Ecuación (10) y cuando es menor de 0.274 e indica una concentración baja se aplica la

Ecuación (12). Para los casos intermedios, se utiliza la Ecuación (11). Para estimar la probabilidad de no excedencia de un valor x se integra numéricamente la Ecuación (6), esto es:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \int_0^x \exp[\kappa \cdot \cos(x - \mu)] \quad (13)$$

La expresión anterior define la FDP de la dvM . $I_0(\kappa)$ se estima con la siguiente serie ascendente, que proviene de la Ecuación (9) (Olver, 1972):

$$I_0(\kappa) = 1 + \frac{(\kappa^2/4)}{1} + \frac{(\kappa^2/4)^2}{4} + \frac{(\kappa^2/4)^3}{36} + \frac{(\kappa^2/4)^4}{576} + \frac{(\kappa^2/4)^5}{14400} + \quad (14)$$

Integración numérica de la dvM

Para llevar a cabo tal integración numérica se adoptó el método de la cuadratura Gauss-Legendre, cuya ecuación operativa univariada es (Nieves & Domínguez, 1998; Campos-Aranda, 2003):

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{np} w_i \cdot f \left[\frac{(b-a)h_i + b + a}{2} \right] \quad (15)$$

en la cual w_i son los coeficientes del método cuyas abscisas son h_i y np el número de parejas en donde se evalúa la función $f(x)$, con el argumento indicado en $f(\cdot)$ de la Ecuación (15). Nieves y Domínguez (1998) exponen los coeficientes w_i y las abscisas h_i de $np = 2$ a 6 con 10 dígitos y Campos-Aranda (2003) las de $np = 8$ con 9 dígitos. En Davis y Polonsky (1972) se obtuvieron las 12 parejas utilizadas de w_i y h_i con 15 dígitos debido a que el lenguaje *Basic* acepta 16 dígitos como variables de doble precisión.

Ajuste tipo 1 (estándar) de la *dvM*

Cuando las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales abarcan desde enero a diciembre, con un histograma mensual que define un predominio escaso durante los meses de julio a octubre, la aplicación de la Ecuación (13) permite estimar las probabilidades teóricas $[F_T(x)]$ para contrastarlas contra las empíricas definidas con la fórmula de Gringorten (Chen *et al.*, 2010), que es la siguiente:

$$F_E(x) = \frac{m-0.44}{n+0.12} \quad (16)$$



en la cual m es el número de orden del dato o fecha de ocurrencia en radianes ($x = \alpha_i$) cuando se ubican en magnitud progresiva y n es el número total de datos. Los parámetros de ajuste de la dvM, μ y κ se estiman con las ecuaciones (7) y (8).

Ajuste tipo 2 (local) de la dvM

Cuando las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales abarcan en su mayoría un lapso en meses bastante definido, por ejemplo, de junio a octubre, entonces la aplicación de la Ecuación (13) se realiza vía optimización numérica para buscar los valores de μ y κ que reduzcan la suma de las diferencias entre probabilidades teóricas y empíricas al cuadrado (SDPC), esto es:

$$\text{Minimizar FO} = \sum_{i=1}^n [F_T(x) - F_E(x)]^2 \quad (17)$$

La minimización de la función objetivo anterior se realizará por medio del algoritmo de Rosenbrock; esto, lógicamente, eliminando de manera previa las fechas de ocurrencia acontecidas fuera del lapso principal o *local* de las ocurrencias para mejorar el ajuste y, por lo tanto, la definición de la dvM.

Ajuste tipo 3 (mixto) de la dvM

Cuando las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales definen claramente dos periodos con abundancia o predominio de ocurrencias —el de finales del otoño e invierno (noviembre a marzo) y el de verano a inicio del otoño (julio a octubre)— existen dos modas y por ello la dvM (Ecuación (13)) no es aplicable. No obstante, se puede buscar representar a las probabilidades empíricas con una mezcla de dvM, cada una con un factor de ponderación w_j , buscando minimizar la suma de las diferencias entre las probabilidades observadas (P_k) y las estimadas con la mezcla de j dvM (Chen *et al.*, 2010; Carta *et al.*, 2008), esto es:

$$\text{Min FO} = \sum_{k=1}^{12} \left\{ P_k - \sum_{j=1}^3 \frac{w_j}{2\pi I_0(\kappa_j)} \int_0^{x_k} \exp[\kappa_j \cos(x_k - \mu_j)] dx \right\}^2 \quad (18)$$

sujeta a la restricción siguiente:

$$\sum_{j=1}^3 w_j = 1.0 \quad (19)$$



y cumpliendo que $0 \leq \mu_j \leq 2\pi$, $\kappa_j \geq 0$ y $0 \leq w_j \leq 1$. La Ecuación (18) está escrita con el planteamiento sugerido en este estudio para el ajuste del tipo 3 (mixto), con $k = 12$ intervalos para estimar las probabilidades observadas, es decir, por meses y una mezcla de tres dvM, por lo cual $j = 3$, como lo han sugerido Chen *et al.* (2010).

En relación con esto último, Carta *et al.* (2008) llevan el valor de j hasta nueve, pero indican que la calidad del ajuste no mejora más allá de seis. El planteamiento para encontrar una solución a la Ecuación (18) y estimar los nueve parámetros de ajuste ($w_1, \mu_1, \kappa_1, w_2, \mu_2, \kappa_2, w_3, \mu_3, \kappa_3$), se estableció por medio del algoritmo Complex. En este ajuste, al igual que en el tipo 1, no se eliminan datos.

Algoritmo de Rosenbrock

Es un procedimiento numérico de búsqueda directa que intenta definir el *mínimo* de una función no lineal de múltiples variables aleatorias no acotadas o restringidas. Su planteamiento matemático es el siguiente:

$$\text{Minimizar } F(z_1, z_2, \dots, z_s) \quad (20)$$



El *algoritmo de Rosenbrock* asume que la función es unimodal y comienza definiendo una línea recta o dirección de búsqueda a partir de un punto dado inicial. Enseguida evalúa la *función objetivo* (FO) en varios puntos de la línea y determina el óptimo; cuando esto ha sucedido, una nueva dirección de búsqueda es seleccionada y el proceso se repite de manera recursiva por etapas. En este algoritmo es conveniente dar diferentes puntos iniciales para buscar el mínimo global a partir de los mínimos locales estimados. Una descripción más detallada del proceso se tiene en Rosenbrock (1960), Kuester y Mize (1973), y Campos-Aranda (2003).

El programa de cómputo original en *Fortran*, procedente de la segunda referencia citada, se transformó a lenguaje *Basic* y se llama *ROSEN*, cuyas variables y parámetros principales (Campos-Aranda, 2003) son los siguientes: (1) número de variables aleatorias (NVA) por optimizar; (2) valores iniciales; (3) FO designada FX; (4) números máximos de evaluaciones de la función objetivo (MF), de etapas (ME) y de fallas sucesivas encontradas en todas las direcciones (MC); y (5) error aceptable (EY) en la FO, o diferencia entre el valor actual y el de la etapa previa.

Algoritmo Complex

Es una técnica numérica de exploración local que se guía por lo que va encontrando a su paso; permite minimizar una función de múltiples variables aleatorias continuas (z) acotadas o restringidas. Su planteamiento matemático es el siguiente (Box, 1965):

$$\text{Minimizar } F(z_1, z_2, \dots, z_s) \quad (21)$$

Sujeta a m variables dependientes (y), función de las variables de decisión (z):

$$\begin{aligned} y_1 &= F(z_1, z_2, \dots, z_s) \\ &\vdots \\ y_m &= F(z_1, z_2, \dots, z_s) \end{aligned} \quad (22)$$

Ambas variables tienen límites inferiores y superiores del tipo \leq , es decir, $z_{inf} \leq z_i \leq z_{sup}$ y $y_{inf} \leq y_j \leq y_{sup}$. Para el *algoritmo Complex*, sus antecedentes, una descripción breve de su proceso operativo y su código OPTIM en *Basic* se pueden consultar en Campos-Aranda (2003). En Bunday (1985) se tiene otra descripción y código de este método de búsqueda.

Las designaciones principales en el código OPTIM son NX y NY, que definen el número de variables de decisión y dependientes. MI es el

número máximo de evaluaciones de la función objetivo y NQ el número de tales cálculos entre impresión de resultados. Estas variables se definen en la subrutina de lectura de datos.

Una ventaja importante del código OPTIM radica en permitir un fácil acceso de los límites ($L = lower$, $U = upper$), nombres y valores iniciales de las variables en la subrutina citada, por medio de las designaciones siguientes: $XL(I)$, $XU(I)$, $XN\$(I)$, $X(I)$, $YL(J)$, $YU(J)$, $YN\$(J)$ y $Y(J)$; en las cuales I es el número de variables de decisión y J el de restricciones. El algoritmo Complex trabaja con dos criterios de convergencia, FA y FR , para las desviaciones absoluta y relativa de la *función objetivo* (FO), la cual se define al final del programa.

Datos por procesar

En este estudio se utilizaron las fechas de ocurrencia de 777 crecientes anuales que procesó Campos-Aranda (2014), en 21 estaciones hidrométricas de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México. Por lo anterior, en la Tabla 1 se expone un resumen de tal información, que incluye nombres de las estaciones de aforo, sus áreas de cuenca, lapsos de registro y dos índices de estacionalidad de sus fechas de ocurrencia de sus crecientes.



Tabla 1. Datos generales e índices de estacionalidad de las crecientes anuales registradas en las 21 estaciones hidrométricas de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

No.	Nombre	A	Registro (años)	DMC	Fecha	\bar{r}
1	Huites	26 057	1942-1992 (51)	293.6	Oct. 21	0.3739
2	San Francisco	17 531	1941-1973 (33)	285.6	Oct. 13	0.4133
3	Santa Cruz	8 919	1944-2002 (52)	283.7	Oct. 11	0.5507
4	Jaina	8 179	1942-1998 (56)	276.9	Oct. 4	0.5281
5	Palo Dulce	6 439	1958-1986 (21)	292.8	Oct. 20	0.3405
6	Ixpalino	6 166	1953-1999 (45)	279.7	Oct. 7	0.6214
7	La Huerta	6 149	1970-1999 (28)	312.3	Nov. 8	0.4219
8	Chinipas	5 098	1965-2002 (24)	269.9	Sep. 27	0.4457
9	Tamazula	2 241	1963-1999 (32)	252.9	Sep. 10	0.5928
10	Naranjo	2 064	1939-1984 (45)	243.6	Sep. 1	0.7047
11	Acatitán	1 884	1955-2002 (43)	256.3	Sep. 13	0.7497
12	Guamúchil	1 645	1940-1971 (32)	238.4	Ago. 26	0.7299
13	Choix	1 403	1956-2002 (38)	243.8	Sep. 1	0.6889
14	Badiraguato	1 018	1974-1999 (26)	263.0	Sep. 20	0.5989
15	El Quelite	835	1961-2001 (33)	252.4	Sep. 09	0.8035
16	Zopilote	666	1939-2001 (56)	239.7	Ago. 28	0.8322
17	Chico Ruiz	391	1977-2002 (19)	237.5	Ago. 25	0.8161
18	El Bledal	371	1938-1994 (56)	238.0	Ago. 26	0.8458
19	Pericos	270	1961-1992 (30)	230.5	Ago. 19	0.8158
20	La Tina	254	1960-1983 (24)	246.0	Sep. 3	0.7207
21	Bamícori	223	1951-1983 (33)	230.8	Ago. 19	0.8810

Acrónimos:

A = área de cuenca, en km².

DMC = día medio de crecientes.

\bar{r} = índice de estacionalidad, adimensional.

Por otra parte, en Campos-Aranda (2017) se muestran los datos anuales de las fechas de ocurrencia de las crecientes registradas en las estaciones de aforos Guamúchil y Huites, con 32 y 51 años de registro. Estas series ya no cambiarán, pues abarcan del inicio de su operación al cierre de tales estaciones por la construcción de los embalses Eustaquio Buelna y Luis Donaldo Colosio. Estos registros fueron procesados para mostrar dos tipos de ajuste de la dvM .

Además, en la referencia de Campos-Aranda (2014) se exponen los datos anuales citados de las estaciones hidrométricas San Francisco y Bamícori, ambas con 33 años de registro, que también se procesaron para ilustrar dos tipos de ajuste de la dvM . Finalmente, se exponen algunas de las series de datos anuales analizadas, que ilustran resultados importantes; tal es el caso de las estaciones Palo Dulce, La Huerta y Jaina, por mencionar algunos ejemplos.

Resultados y su discusión

Ajuste de la *dvM* a las fechas de ocurrencia

En la Tabla 2 se presentan los 21 resultados del ajuste de la *dvM*, por medio de las ecuaciones (7) y (8) a todos los datos de cada registro. Se observa en su última columna que los valores mínimos de la SDPC (Ecuación (17)) ocurren en las estaciones Palo Dulce, La Huerta, Chinipas y Tamazula. Solo estas cuatro estaciones hidrométricas definen o aceptan el ajuste tipo 1 de la *dvM*.

Tabla 2. Parámetros de ajuste de la distribución von Mises para las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales registradas en las 21 estaciones hidrométricas de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

No.	Nombre	n	μ	κ	FN	$SDPC$
1	Huites	51	5.054255	0.783421	7.2849	0.321
2	San Francisco	33	4.916883	0.756742	7.2154	0.195
3	Santa Cruz	52	4.883268	0.666516	7.0006	0.269
4	Jaina	56	4.766349	0.680831	7.0327	0.286
5	Palo Dulce	21	5.040438	0.806016	7.3459	0.041
6	Ixpalino	45	4.816023	0.623589	6.9090	0.623
7	La Huerta	28	5.374923	0.750965	7.2008	0.059
8	Chinipas	24	4.645802	0.734899	7.1606	0.110
9	Tamazula	32	4.353449	0.640634	6.9446	0.324
10	Naranjo	45	4.193736	0.577105	6.8173	0.809
11	Acatitán	43	4.411395	0.553888	6.7744	1.113
12	Guamúchil	32	4.103816	0.563965	6.7928	0.639
13	Choix	38	4.197106	0.585610	6.8335	0.726
14	Badiraguato	26	4.527146	0.636949	6.9368	0.265
15	El Quelite	33	4.344669	0.527901	6.7286	0.999
16	Zopilote	56	4.126714	0.516567	6.7094	1.870
17	Chico Ruiz	19	4.087486	0.524164	6.7222	0.547
18	El Bledal	56	4.097247	0.510294	6.6989	1.891
19	Pericos	30	3.967493	0.524331	6.7225	0.851
20	La Tina	24	4.233593	0.568730	6.8016	0.524
21	Bamícori	33	3.972656	0.494675	6.6735	1.219

Acrónimos:

n = número de datos.

μ = dirección media, en radianes.

κ = parámetro de concentración, adimensional.

FN = factor de normalización, en radianes.

SDPC = suma de diferencias entre probabilidades teóricas y empíricas al cuadrado (Ecuación (17)), adimensional.

En la Tabla 3 y Tabla 4 se muestran los datos procesados y los resultados de las estaciones Palo Dulce y La Huerta. En la Figura 1 y Figura 2 se muestran los histogramas mensuales de fechas de ocurrencia y su curva de FDP (Ecuación (13)).

Tabla 3. Gastos de las crecientes anuales, fechas de ocurrencia y sus probabilidades de no excedencia teóricas y empíricas en la estación hidrométrica Palo Dulce de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

No.	Q_{max} (m^3/s)	Mes	Día	Día juliano	α_i ordenado (radianes)	$F_T(x)$	$F_E(x)$
1	455	Mar	6	65	0.223785	0.0362	0.0265
2	743	Dic	9	343	0.430355	0.0644	0.0739
3	6 800	Ene	13	13	0.912353	0.1149	0.1212
4	347	Sep	11	254	1.118923	0.1317	0.1686
5	584	Dic	11	345	2.392775	0.2142	0.2159
6	481	Ago	1	213	3.408413	0.3072	0.2633
7	1 360	Dic	23	357	3.614984	0.3363	0.3106
8	674	Ago	22	234	3.666626	0.3444	0.3580
9	635	Dic	15	349	3.683840	0.3472	0.4053
10	530	Ago	2	214	3.873196	0.3801	0.4527
11	1 100	Jul	17	198	4.028124	0.4107	0.5000
12	390	Ago	13	225	4.372409	0.4909	0.5473
13	1 283	Oct	29	302	4.699478	0.5809	0.5947
14	688	Oct	30	303	4.716693	0.5859	0.6420
15	1 370	Feb	22	53	5.198691	0.7313	0.6894
16	2 245	Nov	9	313	5.215905	0.7365	0.7367
17	383	Jul	29	210	5.388047	0.7875	0.7841
18	740	Oct	1	274	5.904473	0.9232	0.8314
19	951	Sep	30	273	5.938902	0.9310	0.8788
20	843	Ene	25	25	6.007758	0.9461	0.9261
21	1 112	May	19	139	6.145472	0.9744	0.9735

Tabla 4. Gastos de las crecientes anuales, fechas de ocurrencia y sus probabilidades de no excedencia teóricas y empíricas en la estación hidrométrica La Huerta de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

No.	Q_{max} (m ³ /s)	Mes	Día	Día juliano	α_i ordenado (radianes)	$F_T(x)$	$F_E(x)$
1	659	Ene	5	5	0.086071	0.0185	0.0199
2	530	Oct	26	299	0.172142	0.0360	0.0555
3	1 931	Oct	30	303	0.223785	0.0460	0.0910
4	1 251	Feb	21	52	0.430355	0.0828	0.1266
5	1 260	Dic	25	359	0.895139	0.1476	0.1622
6	273	Ago	31	243	1.084495	0.1683	0.1977
7	1 250	Ago	28	240	1.618136	0.2148	0.2333
8	331	Ago	31	243	3.287913	0.3264	0.2688
9	1 605	Ene	25	25	3.511698	0.3596	0.3044
10	1 475	Oct	8	281	3.597769	0.3695	0.3400
11	609	Dic	10	344	4.131410	0.4475	0.3755
12	1 303	Mar	4	63	4.183052	0.4568	0.4111
13	683	Dic	15	349	4.183052	0.4568	0.4467
14	1 774	Ene	13	13	4.251909	0.4697	0.4822
15	934	Oct	22	295	4.406837	0.5011	0.5178
16	1 003	Dic	25	359	4.424052	0.5048	0.5533
17	840	Jul	10	191	4.510123	0.5238	0.5889
18	1 111	Nov	19	323	4.837192	0.6042	0.6245
19	1 076	Dic	29	363	5.078191	0.6707	0.6600
20	1 663	Dic	11	345	5.147048	0.6904	0.6956

No.	Q_{max} (m ³ /s)	Mes	Día	Día juliano	α_i ordenado (radianes)	$F_T(x)$	$F_E(x)$
21	1 318	Ene	10	10	5.215905	0.7104	0.7312
22	1 919	Sep	13	256	5.560189	0.8113	0.7667
23	195	Sep	4	247	5.921687	0.9122	0.8023
24	207	Sep	19	262	5.938902	0.9167	0.8378
25	474	Sep	14	257	6.007758	0.9345	0.8734
26	386	Abr	4	94	6.179900	0.9765	0.9090
27	138	Jul	28	209	6.179900	0.9765	0.9445
28	265	Jul	23	204	6.248758	0.9923	0.9801

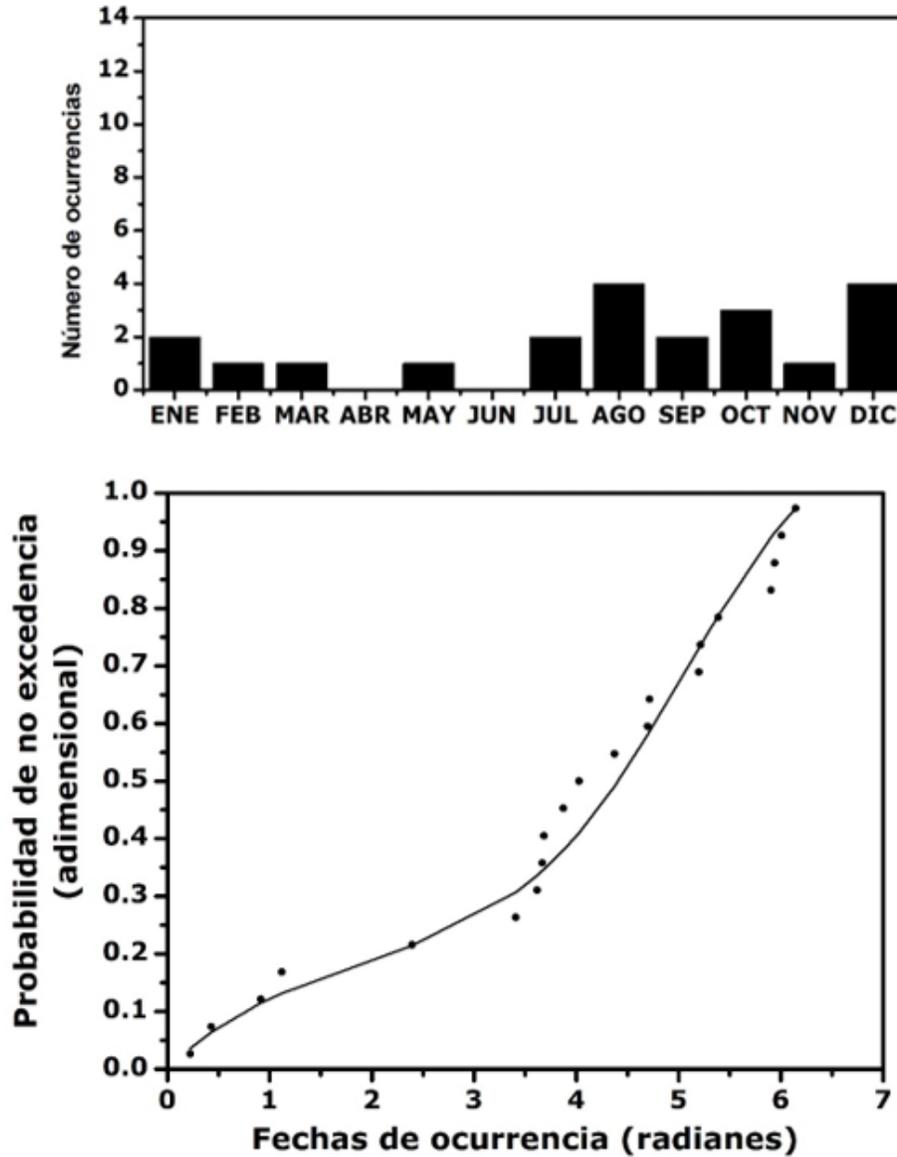


Figura 1. Histograma mensual y ajuste tipo 1 de la distribución de von Mises a las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales registradas en la estación hidrométrica Palo Dulce.

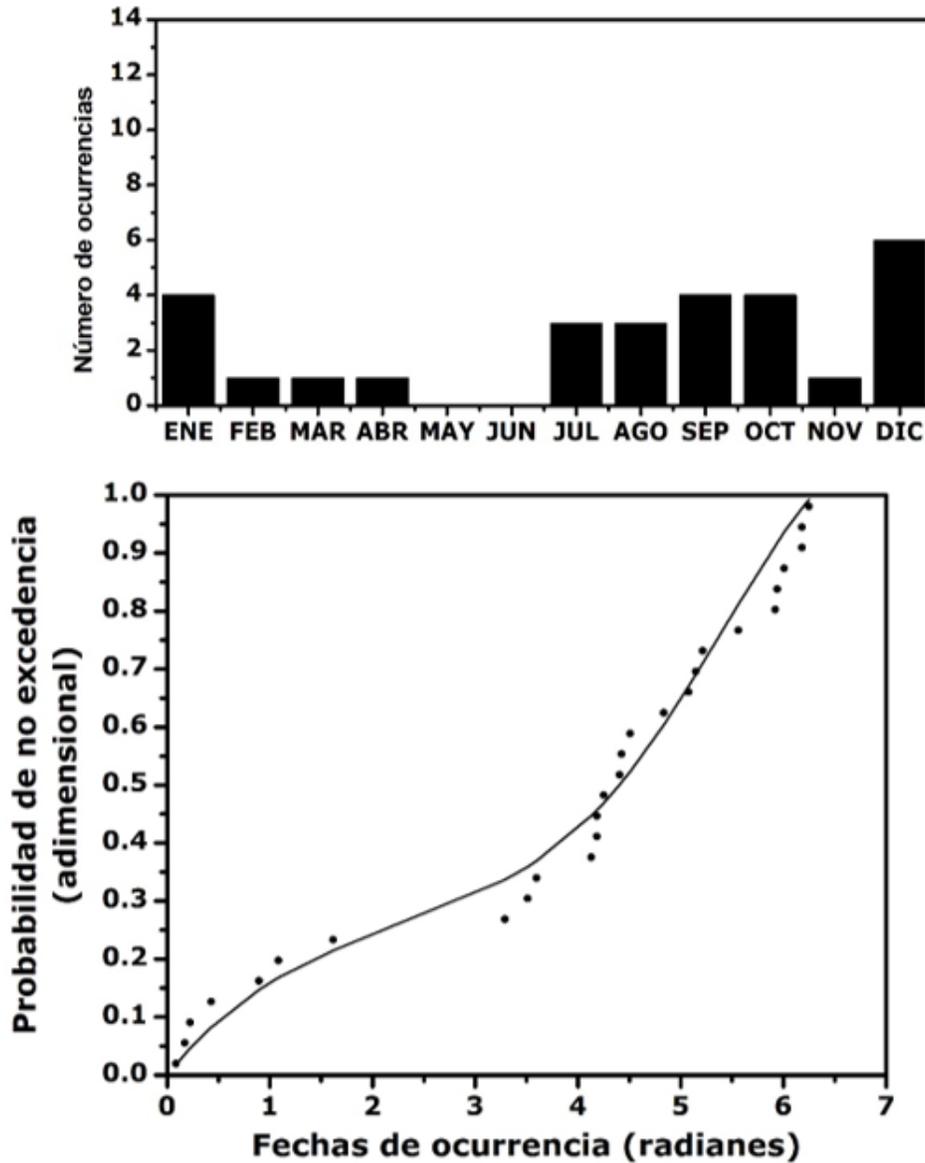


Figura 2. Histograma mensual y ajuste tipo 1 de la distribución de von Mises a las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales registradas en la estación hidrométrica La Huerta.

Fechas de ocurrencia por meses y ajustes tipo 2 de la dvM

En la Tabla 5 se detalla en número de fechas de ocurrencias de las crecientes anuales en los 12 meses del año en las 21 estaciones hidrométricas procesadas. Se indican sombreadas las tres estaciones que se adoptaron para ilustrar el tipo 2 de ajuste de la dvM, es decir, las de amplitud local: (1) Bamícori, con un registro de 33 fechas de junio a octubre; (2) El Bledal, con un registro de 55 fechas de julio a noviembre, después de eliminar el dato de enero; y (3) Guamúchil, con un registro de 29 fechas de junio a octubre, posterior a descartar dos datos en enero y uno en febrero. Para propósitos ilustrativos, solo se detallan los ajustes tipo 2 de las estaciones Bamícori y Guamúchil.

Tabla 5. Número de ocurrencias mensuales de las crecientes anuales registradas en las 21 estaciones hidrométricas de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

No.	Nombre	E	F	M	A	M'	J	J'	A'	S	O	N	D
1	Huites	8	4	1	0	0	0	6	10	6	7	1	8
2	San Francisco	5	2	0	0	0	0	4	9	3	3	1	6
3	Santa Cruz	11	0	0	0	0	0	4	10	11	9	3	4
4	Jaina	6	3	0	0	0	1	3	15	10	9	2	7
5	Palo Dulce	2	1	1	0	1	0	2	4	2	3	1	4
6	Ixpalino	4	0	0	1	0	0	2	10	9	11	1	7
7	La Huerta	4	1	1	1	0	0	3	3	4	4	1	6
8	Chinipas	1	2	0	0	0	0	5	5	1	5	1	4
9	Tamazula	1	0	1	1	0	0	6	5	9	6	0	3
10	Naranjo	3	0	1	0	0	1	5	16	10	8	0	1
11	Acatitán	1	0	1	0	0	0	5	13	10	11	0	2
12	Guamúchil	2	1	0	0	0	1	5	12	8	3	0	0
13	Choix	2	0	1	0	0	0	7	12	9	4	1	2
14	Badiraguato	2	1	0	0	0	0	3	5	8	3	2	2
15	El Quelite	1	0	0	0	0	0	5	8	10	8	1	0
16	Zopilote	1	0	1	0	0	1	8	20	18	6	1	0
17	Chico Ruiz	0	0	0	0	0	1	4	6	5	2	1	0
18	El Bledal	1	0	0	0	0	0	12	23	12	7	1	0
19	Pericos	0	1	0	0	0	0	10	10	5	4	0	0
20	La Tina	1	0	0	0	0	0	4	7	7	3	0	2
21	Bamícori	0	0	0	0	0	1	8	13	7	4	0	0

La aplicación del *algoritmo de Rosenbrock*, para los ajustes del tipo 2 de la dvM, se llevó a cabo utilizando los valores siguientes: MF = 500,

ME = 30, MC = 50 y EY = $1.0 \cdot 10^{-7}$. Los valores iniciales de μ y κ empleados en la estación Bamícori fueron 4.00 y 0.50, los cuales definen una FO inicial de 1.193. Estos valores se adoptan semejantes a los calculados en la Tabla 2 para tal estación.

Después de seis etapas y 33 evaluaciones de la FO se obtuvo FO = 0.049, $\mu = 3.9755$, $\kappa = 3.3077$, FN = 39.4687 y los resultados concentrados en la Tabla 6 y Figura 3. Este ajuste de la dvM es válido en el intervalo de ocurrencias de 3.0641 a 5.1987 radianes, que corresponden a las fechas siguientes: del 27 de junio al 29 de octubre ($302 - 178 = 124$ días).

Tabla 6. Fechas de ocurrencia (x en radianes) y probabilidades de no excedencia teóricas y empíricas para las fechas de ocurrencia de sus crecientes anuales de la estación hidrométrica Bamícori.

No.	$x = \alpha_i$	$F_T(x)$	$F_E(x)$	No.	$x = \alpha_i$	$F_T(x)$	$F_E(x)$
1	3.0641	0.066	0.017	18	3.9593	0.490	0.530
2	3.2363	0.107	0.047	19	3.9593	0.490	0.560
3	3.2707	0.118	0.077	20	3.9937	0.514	0.591
4	3.3223	0.135	0.107	21	4.0109	0.526	0.621
5	3.4773	0.198	0.138	22	4.1658	0.630	0.651
6	3.5117	0.214	0.168	23	4.2347	0.674	0.681
7	3.5806	0.250	0.198	24	4.2691	0.695	0.711
8	3.5806	0.250	0.228	25	4.3036	0.716	0.742
9	3.5978	0.259	0.258	26	4.3724	0.754	0.772
10	3.6666	0.298	0.289	27	4.3896	0.763	0.802
11	3.7871	0.373	0.319	28	4.4413	0.789	0.832
12	3.8043	0.385	0.349	29	4.6995	0.891	0.862
13	3.8043	0.385	0.379	30	4.7167	0.896	0.893
14	3.8043	0.385	0.409	31	4.7855	0.914	0.923
15	3.8043	0.385	0.440	32	4.8372	0.926	0.953
16	3.8732	0.431	0.470	33	5.1987	0.977	0.983
17	3.8732	0.431	0.500	-	-	-	-

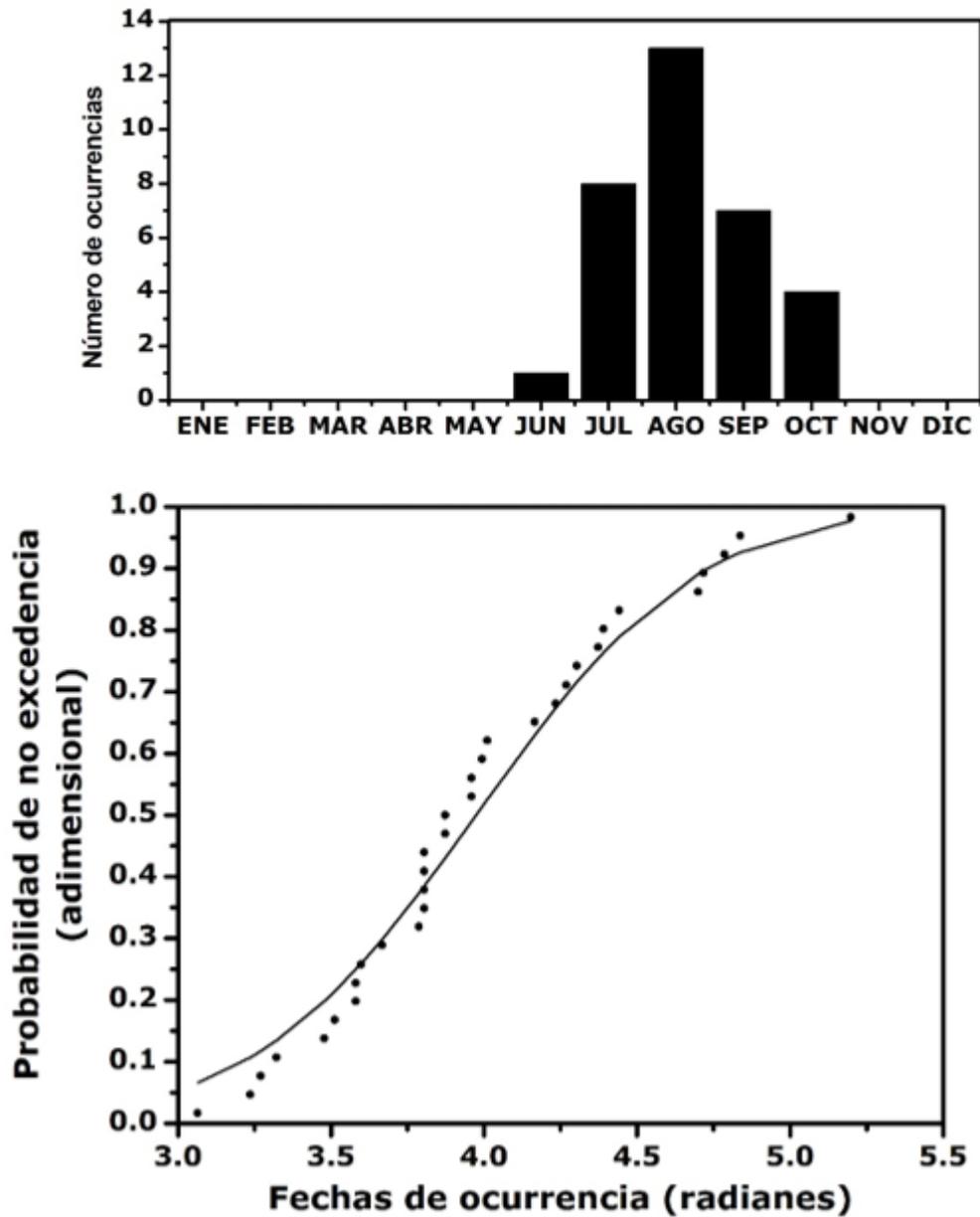


Figura 3. Histograma mensual y ajuste tipo 2 de la distribución de von Mises a las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales registradas en la estación hidrométrica Bamícori.

Por otra parte, los valores iniciales de μ y κ asignados en la estación Guamúchil fueron 4.25 y 0.50, los cuales definen una FO inicial de 1.040. Como ya se indicó, estos valores se adoptan similares a los calculados en la Tabla 2 para tal estación.

Después de 15 etapas y 83 evaluaciones de la FO se obtuvo FO = 0.046, $\mu = 4.0410$, $\kappa = 3.7923$, $FN = 59.3770$ y los resultados concentrados en la Tabla 7 y Figura 4. Este ajuste de la dvM resulta válido en el intervalo de ocurrencias de 3.0641 a 4.8372 radianes, que corresponden a las fechas siguientes: del 27 de junio al 8 de octubre (281 - 178 = 103 días).



Tabla 7. Fechas de ocurrencia (x en radianes) y probabilidades de no excedencia teóricas y empíricas para las fechas de ocurrencia de sus crecientes anuales de la estación hidrométrica Guamúchil.

No.	$x = \alpha_i$	$F_T(x)$	$F_E(x)$	No.	$x = \alpha_i$	$F_T(x)$	$F_E(x)$
1	3.0641	0.041	0.019	16	4.0281	0.491	0.534
2	3.2879	0.086	0.054	17	4.0970	0.543	0.569
3	3.5117	0.165	0.088	18	4.1658	0.593	0.603
4	3.5633	0.189	0.122	19	4.3036	0.689	0.637
5	3.5806	0.198	0.157	20	4.3380	0.711	0.672
6	3.5806	0.198	0.191	21	4.4413	0.772	0.706
7	3.6666	0.244	0.225	22	4.4757	0.791	0.740
8	3.6838	0.254	0.260	23	4.5273	0.817	0.775
9	3.7183	0.275	0.294	24	4.5618	0.833	0.809
10	3.7355	0.285	0.328	25	4.5790	0.841	0.843
11	3.8216	0.342	0.363	26	4.6306	0.862	0.878
12	3.8560	0.366	0.397	27	4.7339	0.898	0.912
13	3.9076	0.402	0.431	28	4.7683	0.909	0.946
14	3.9248	0.415	0.466	29	4.8372	0.927	0.981
15	3.9593	0.440	0.500	-	-	-	-

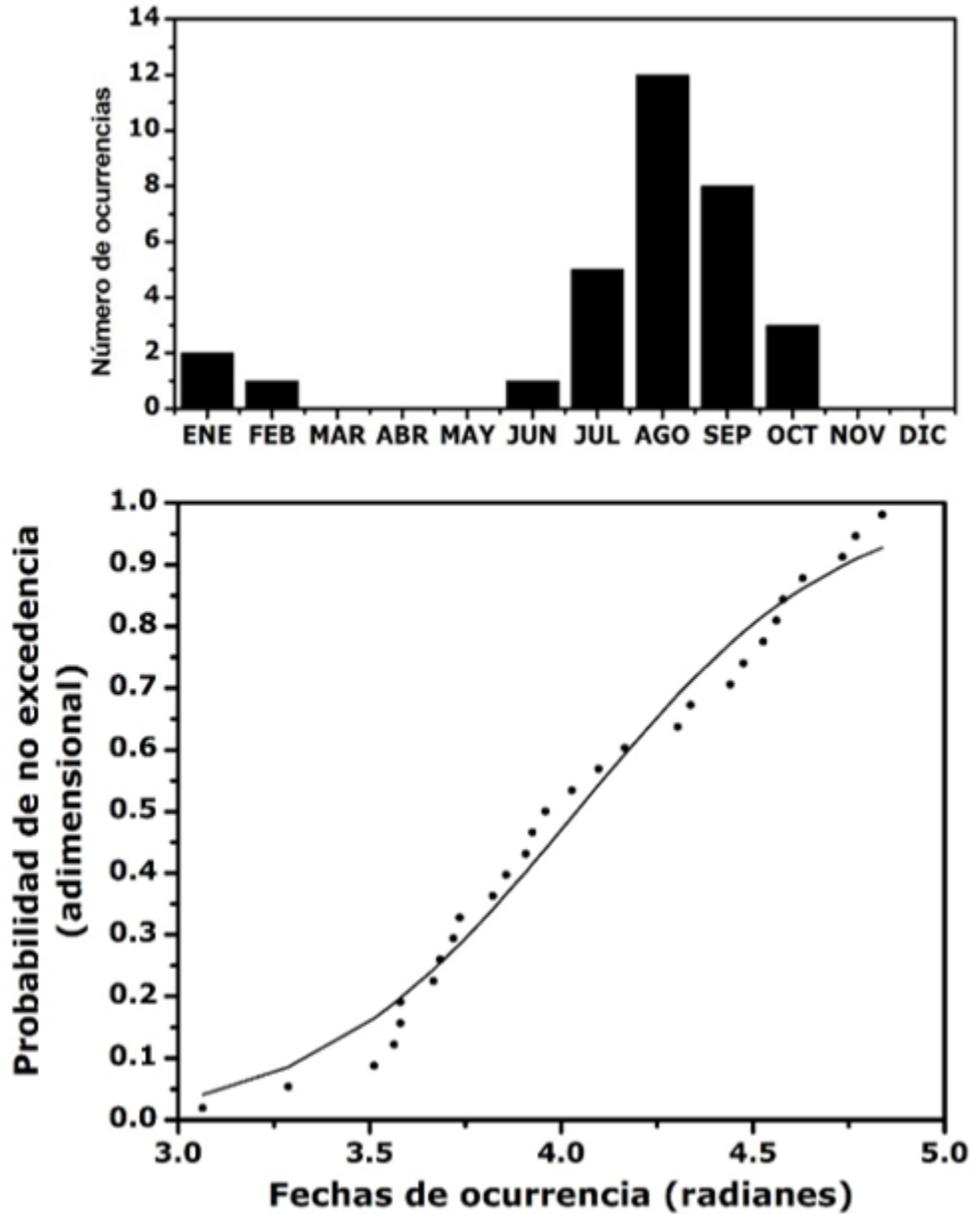


Figura 4. Histograma mensual y ajuste tipo 2 de la distribución de von Mises a las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales registradas en la estación hidrométrica Guamúchil.

Fechas de ocurrencia bimodales y ajustes tipo 3 de la dvM

Para la aplicación de la Ecuación (18) primero se deben definir los límites superiores x_k de su integral. Como se adoptaron 12 intervalos uniformes, que corresponden a los meses del año, entonces cada límite de intervalo avanza 30° y los 12 abarcan la circunferencia de 360° . Entonces, los límites x_k en radianes se obtienen multiplicando 0.0174533 por los ángulos de $30, 60, 90^\circ$ y así sucesivamente hasta 330 y 360° ; para definir $x_1 = 0.523599, x_2 = 1.047198, x_3 = 1.570797, \dots, x_{11} = 5.759589$ y $x_{12} = 6.283188$. Los valores de las probabilidades observadas P_k de la Ecuación (18) se obtienen dividiendo los 12 datos de la Tabla 5 relativos a la estación o registro por procesar entre el número total de datos n citado en la Tabla 2.

La aplicación del *algoritmo Complex*, para los ajustes del tipo 3 de la dvM, se realizó utilizando los valores siguientes: $NX = 9, NY = 1; MI = 5000, NQ = 50, FA = 0.0002$ y $FR = 0.00001$. Además, se definieron todos los límites inferiores de los nueve parámetros de ajuste en 0.10, los límites superiores de w_j en 1.00, los de μ_j en 6.283 y los de κ_j en 50. Las ternas de valores iniciales w, μ y κ fueron las tres siguientes: (0.25, 0.50,

1.50), (0.60, 4.10, 3.20) y (0.15, 5.50, 2.50). Se observa que la suma de w_j es la unidad (0.25 + 0.60 + 0.15) y que los μ_j establecen tres direcciones medias, al inicio del año, después de su mitad y hacia el final.

Para la estación hidrométrica San Francisco, los valores iniciales adoptados y citados de w_i , μ_i y κ_i definen el siguiente resumen de parámetros óptimos de la Tabla 8 después de 2 075 evaluaciones de la función objetivo (FO). En la Figura 5 se muestra el contraste de 33 probabilidades de no excedencia empíricas y teóricas logradas con el ajuste tipo 3 de la dvM, correspondientes a las 33 fechas de crecientes registradas en la estación San Francisco.

Tabla 8. Resultados del algoritmo Complex para el ajuste de tipo 3 en la estación hidrométrica San Francisco de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

Parámetros	Valor	No. mes	Acumuladas		Incrementos	
			$F_E(x)$	$F_T(x)$	$F_E(x)$	$F_T(x)$
FO inicial	0.03876	1	0.1515	0.1566	0.152	0.157
FO final	0.00245	2	0.2121	0.2029	0.061	0.046
w_1	0.12920	3	0.2121	0.2091	0.000	0.006
μ_1	0.10013	4	0.2121	0.2098	0.000	0.001
κ_1	7.21766	5	0.2121	0.2106	0.000	0.001
w_2	0.51320	6	0.2121	0.2241	0.000	0.013
μ_2	3.94560	7	0.3333	0.3594	0.121	0.115
κ_2	6.39697	8	0.6061	0.5940	0.273	0.255
w_3	0.33760	9	0.6970	0.7244	0.091	0.130
μ_3	6.11277	10	0.7879	0.7570	0.091	0.033
κ_3	3.74811	11	0.8182	0.8346	0.030	0.078
Suma de w_j	0.98000	12	1.0000	0.9955	0.182	0.161

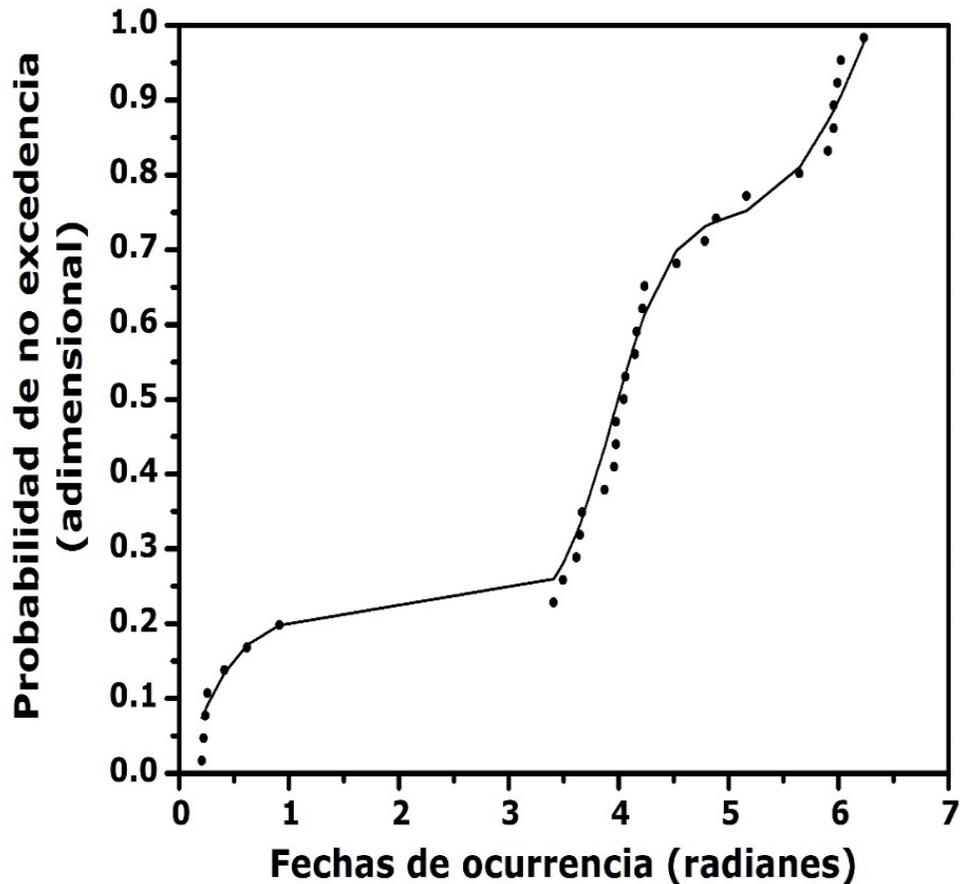


Figura 5. Ajuste tipo 3 de la distribución de von Mises a las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales registradas en la estación hidrométrica San Francisco.

Para la estación hidrométrica Huites, con los valores iniciales adoptados y citados de w_i , μ_i y κ_i , se obtiene el siguiente resumen de parámetros óptimos de la Tabla 9, después de 1 459 evaluaciones de la función objetivo (FO). En la Figura 6 se muestra el contraste de las 51

probabilidades de no excedencia empíricas y teóricas logradas con el ajuste tipo 3 de la dvM.

Tabla 9. Resultados del algoritmo Complex para el ajuste de tipo 3 en la estación hidrométrica Huites de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

Parámetros	Valor	No. mes	Acumuladas		Incrementos	
			$F_E(x)$	$F_T(x)$	$F_E(x)$	$F_T(x)$
FO inicial	0.04912	1	0.1569	0.1610	0.157	0.161
FO final	0.00292	2	0.2353	0.2321	0.078	0.071
w_1	0.17860	3	0.2549	0.2461	0.020	0.014
μ_1	0.40666	4	0.2549	0.2486	0.000	0.003
κ_1	5.38817	5	0.2549	0.2542	0.000	0.006
w_2	0.57650	6	0.2549	0.2798	0.000	0.026
μ_2	4.15254	7	0.3725	0.3701	0.118	0.090
κ_2	3.01271	8	0.5686	0.5487	0.196	0.179
w_3	0.23010	9	0.6863	0.7183	0.118	0.170
μ_3	6.18776	10	0.8235	0.7987	0.137	0.080
κ_3	6.97684	11	0.8431	0.8539	0.020	0.055
Suma de w_j	0.98530	12	1.0000	0.9987	0.157	0.145

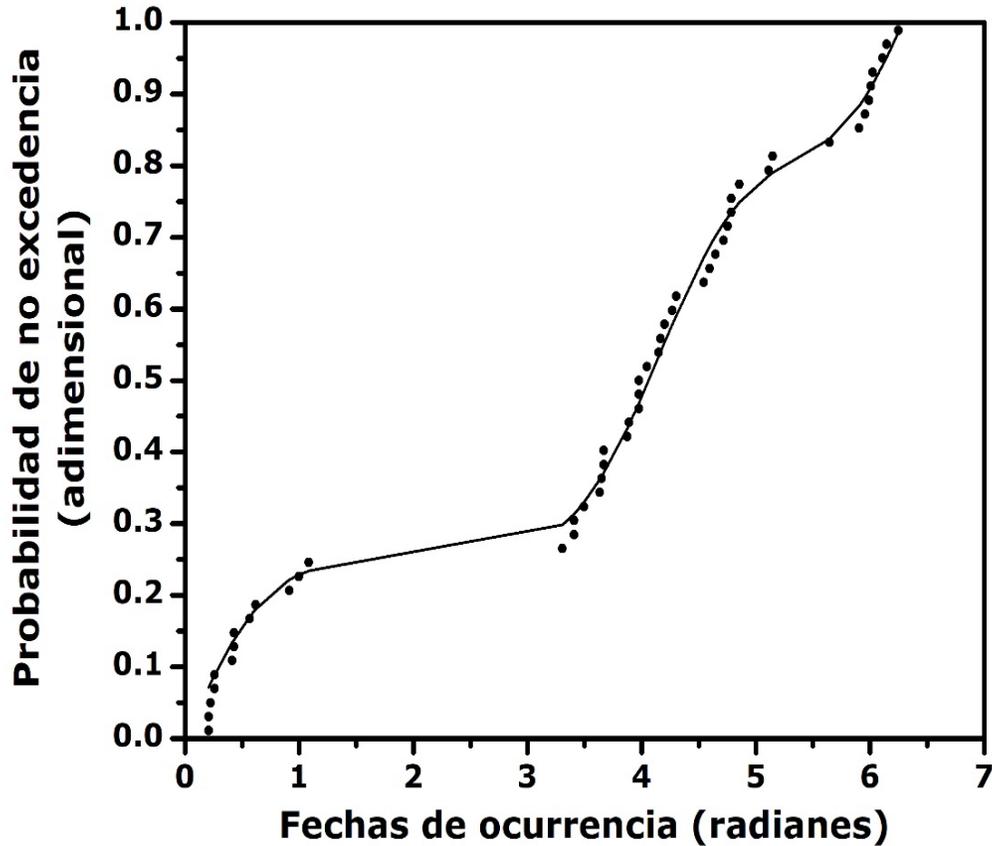


Figura 6. Ajuste tipo 3 de la distribución de von Mises a las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales registradas en la estación hidrométrica Huites.

Para la estación hidrométrica Jaina, en la Tabla 10 se exponen sus 56 años de gastos máximos anuales y fechas de ocurrencia.

Tabla 10. Gastos de las crecientes anuales y sus fechas de ocurrencia en la estación hidrométrica Jaina de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

No.	Q_{max} (m ³ /s)	Mes	Día	No.	Q_{max} (m ³ /s)	Mes	Día
1	2 065	Oct	2	29	357	Ago	24
2	6 991	Dic	9	30	1 109	Oct	27
3	580	Feb	28	31	932	Nov	24
4	714	Oct	9	32	1 349	Feb	22
5	747	Ago	10	33	680	Ago	31
6	771	Dic	4	34	488	Sep	4
7	693	Oct	8	35	900	Oct	24
8	2 614	Ene	26	36	791	Ago	31
9	2 336	Ene	13	37	989	Sep	27
10	437	Dic	15	38	1 620	Feb	5
11	594	Ago	22	39	400	Ago	18
12	546	Sep	17	40	2 832	Oct	8
13	516	Ago	19	41	4 440	Sep	30
14	1 600	Ene	15	42	179	Sep	19
15	639	Jun	27	43	694	Ago	13
16	362	Ago	28	44	494	Ene	26
17	2 232	Sep	21	45	416	Oct	2
18	616	Ago	18	46	518	Ago	13
19	2 003	Ene	12	47	105	Ago	23
20	795	Oct	31	48	227	Ago	20
21	1 137	Oct	5	49	638	Dic	29

No.	Q_{max} (m ³ /s)	Mes	Día	No.	Q_{max} (m ³ /s)	Mes	Día
22	1 226	Dic	12	50	309	Dic	23
23	454	Jul	29	51	372	Ene	17
24	650	Sep	2	52	216	Sep	23
25	958	Ago	15	53	199	Ago	21
26	900	Dic	17	54	174	Jul	18
27	1 338	Sep	14	55	169	Nov	12
28	340	Jul	17	56	713	Sep	3

Para los datos de la Tabla 10 de la estación de aforos Jaina y los valores iniciales adoptados y citados de w_i , μ_i y κ_i , se define el siguiente resumen de parámetros óptimos de la Tabla 11 después de 1 076 evaluaciones de la función objetivo (FO). En la Figura 7 se muestra el contraste de las 56 probabilidades de no excedencia empíricas y teóricas logradas con el ajuste tipo 3 de la dvM.

Tabla 11. Resultados del algoritmo Complex para el ajuste de tipo 3 en la estación hidrométrica Jaina de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

Parámetros	Valor	No. mes	Acumuladas		Incrementos	
			$F_E(x)$	$F_T(x)$	$F_E(x)$	$F_T(x)$
FO inicial	0.02575	1	0.1071	0.1130	0.107	0.113
FO final	0.00291	2	0.1607	0.1500	0.054	0.037
w_1	0.16850	3	0.1607	0.1578	0.000	0.008
μ_1	0.10894	4	0.1607	0.1596	0.000	0.002
κ_1	3.52386	5	0.1607	0.1621	0.000	0.003
w_2	0.68740	6	0.1786	0.1777	0.018	0.016
μ_2	4.25620	7	0.2321	0.2571	0.054	0.079
κ_2	3.68355	8	0.5000	0.4693	0.268	0.212
w_3	0.12410	9	0.6786	0.7083	0.179	0.239
μ_3	6.21950	10	0.8393	0.8225	0.161	0.114
κ_3	8.27296	11	0.8750	0.8787	0.036	0.056
Suma de w_j	0.98000	12	1.0000	0.9987	0.125	0.120

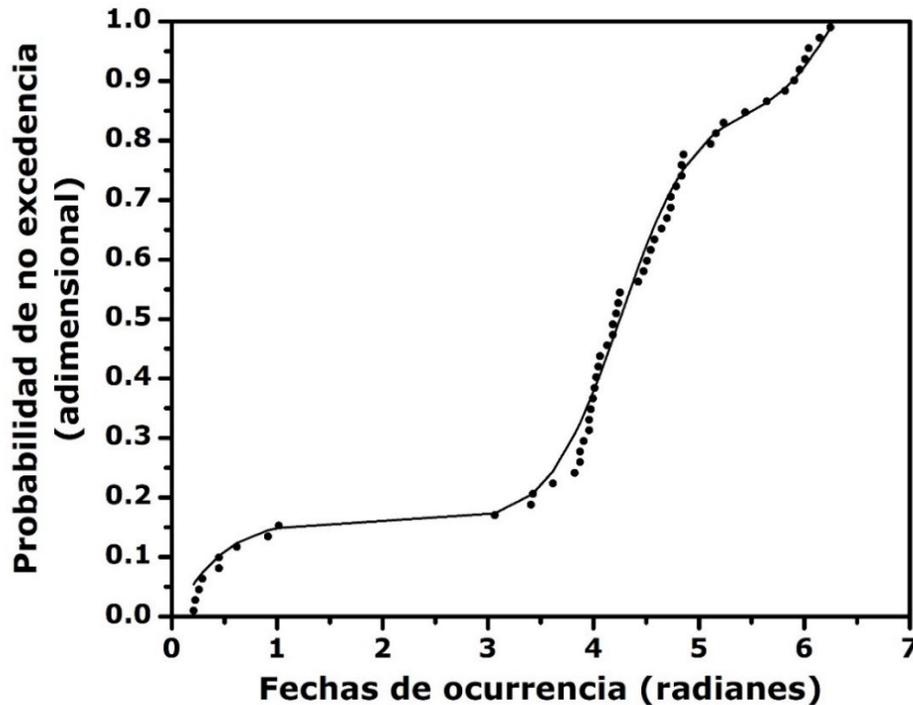


Figura 7. Histograma mensual y ajuste tipo 3 de la distribución de von Mises a las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales registradas en la estación hidrométrica Jaina.

Observaciones generales

En la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México, estudiada, el tamaño de cuenca y la ubicación que tienen sus estaciones hidrométricas definen el tipo de ajuste que se debe realizar para caracterizar

probabilísticamente las fechas de ocurrencia de sus crecientes anuales. Las cuencas montañosas grandes con áreas mayores a los 8 000 km² presentan régimen bimodal, con ajuste tipo 3 o mixto, como Huites, San Francisco, Santa Cruz y Jaina.

Las cuencas intermedias con áreas mayores de 5 000 km² tienen un régimen unimodal amplio que acepta un ajuste tipo 1 o estándar, tal es el caso de Palo Dulce, Ixpalino, La Huerta y Chinipas. Finalmente, todas las cuencas de la planicie costera con áreas de cuenca menores de los 2 000 km² exponen un régimen unimodal concentrado con ajuste tipo 2 o local.

En relación con la caracterización de las fechas de ocurrencia de las crecientes de esta región hidrológica, se considera importante continuar su estudio; por ejemplo, buscando relacionar sus regímenes (estándar, local y mixto) con las precipitaciones de los frentes fríos, las ciclónicas y las convectivas.

Conclusiones

Se ha descrito con detalle la *distribución de von Mises*, la cual permite la caracterización probabilística de las fechas de ocurrencia de las crecientes



anuales. Tales fechas son analizadas como datos circulares, y sus estadísticos de dirección media e índice de estacionalidad definen los dos parámetros de ajuste de tal distribución: su moda (μ) y su parámetro de concentración (κ). La distribución de von Mises es simétrica y se considera el equivalente de la distribución Normal para vectores o datos con dirección.

Cuando las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales acontecen a lo largo del año, y además muestran una concentración o *moda* única, la distribución de von Mises se ajusta de manera *estándar* con el método de máxima verosimilitud, el cual establece ecuaciones para μ y κ . La calidad de ajuste logrado se mide por medio de la suma de las diferencias entre probabilidades teóricas y empíricas elevadas al cuadrado (SDPC). Las probabilidades empíricas se asignaron con base en la fórmula de Gringorten.

Cuando las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales se concentran en una época del año, el ajuste de la distribución de von Mises se realizó mediante el algoritmo de Rosenbrock, que minimizó la función objetivo SDPC para buscar los parámetros óptimos μ y κ . Este ajuste se denominó *local*.

Por último, cuando las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales muestran dos modas, la caracterización probabilística de tales fechas se buscó con una mezcla de tres distribuciones von Mises, cuyos nueve parámetros de ajuste óptimos se obtuvieron a través del algoritmo Complex, al minimizar la función objetivo SDPC, cuyas probabilidades

empíricas fueron las fechas de ocurrencia acontecidas en los 12 meses del año. Este ajuste se designó *mixto*.

En la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México, que fue estudiada, sus cuencas montañosas grandes ($> 8\ 000\ \text{km}^2$) presentan un régimen *bimodal* de fechas ocurrencia de sus crecientes anuales. En cambio, en las cuencas chicas ($< 2\ 000\ \text{km}^2$), sus fechas de ocurrencias de sus crecientes anuales se concentran en una época del año. Las cuencas cuyas fechas de ocurrencia de sus crecientes anuales acontecen a todo lo largo del año son las de tamaño intermedio y montañosas.

Agradecimientos

Se agradece a los árbitros anónimos C y D sus observaciones y correcciones sugeridas, las cuales permitieron eliminar errores de omisión y mejorar la redacción general, además de precisar los alcances del estudio.

Referencias

- Aldama, A. A., Ramírez, A. I., Aparicio, J., Mejía-Zermeño, R., & Ortega-Gil, G. E. (2006). *Seguridad hidrológica de las presas en México*. Jiutepec, México: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.
- Box, M. J. (1965). A new method of constrained optimization and a comparison with other methods. *Computer Journal*, 8(1), 42-52.



- Bunday, B. D. (1985). Theme 6.2. The Complex method. In: *Basic optimisation methods* (pp. 98-106). London, UK: Edward Arnold Publishers, Ltd.
- Burn, D. H. (1997). Catchment similarity for regional flood frequency analysis using seasonality measures. *Journal of Hydrology*, 202(1-4), 212-230. DOI: 10.106/S0022-1694(97)00068-1
- Campos-Aranda, D. F. (2003). Capítulo 7. Integración numérica y Capítulo 9. Optimización numérica (pp. 137-153 y 172-211). En: *Introducción a los métodos numéricos: software en Basic y aplicaciones en hidrología superficial*. San Luis Potosí, México: Editorial Universitaria Potosina.
- Campos-Aranda, D. F. (2014). Análisis regional de frecuencia de crecientes en la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México. 1: índices de estacionalidad y regiones de influencia. *Agrociencia*, 48(2), 147-158.
- Campos-Aranda, D. F. (2017). Definición de tres épocas de crecientes utilizando estadísticos direccionales. *Tecnología y ciencias del agua*, 8(1), 155-165.
- Carta, J. A., Bueno, C., & Ramírez, P. (2008). Statistical modelling of directional wind speeds using mixtures of von Mises distributions: Case study. *Energy Conversion and Management*, 49(5), 897-907. DOI: 10.1016/j.enconman.2007.10.017

- Chen, L., Guo, S., Yan, B., Liu, P., & Fang, B. (2010). A new seasonal design flood method based on bivariate joint distribution of flood magnitude and date of occurrence. *Hydrological Sciences Journal*, 55(8), 1264-1280. DOI: 10.1080/02626667.2010.520564
- Chen, L., Singh, V. P., Guo, S., Fang, B., & Liu, P. (2013). A new method for identification of flood seasons using directional statistics. *Hydrological Sciences Journal*, 58(1), 28-40. DOI: 10.1080/02626667.2012.743661
- Cunderlik, J. M., Ouarda, T. B. M. J., & Bobée, B. (2004). Determination of flood seasonality from hydrological records. *Hydrological Sciences Journal*, 49(3), 511-526. DOI: 10.1623/hysj.49.3.511.54351
- Davis, P. J., & Polonsky, I. (1972). Chapter 25. Numerical interpolation, differentiation and integration. In: Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (eds.). *Handbook of mathematical functions*, 9th print. (pp. 875-926). New York, USA: Dover Publications.
- Durrans, S. R., Eiffe, M. A., Thomas Jr., W. O., & Goranflo, H. M. (2003). Joint seasonal/annual flood frequency analysis. *Journal of Hydrologic Engineering*, 8(4), 181-189. DOI: 10.1061/(ASCE)1084-0699(2003)8:4(181)
- Escalante-Sandoval, C. A., & Reyes-Chávez, L. (2002). Capítulo 9. Análisis conjunto de eventos hidrológicos. En: *Técnicas estadísticas en hidrología* (pp. 203-246). México, DF, México: Facultad de Ingeniería de la UNAM.

- Genest, C., & Chebana, F. (2017). Copula Modeling in Hydrologic Frequency Analysis. In: Singh, V. P. (ed.). *Handbook of applied hydrology* (2nd ed.) (pp. 30.1-30.10). New York, USA: McGraw-Hill Education.
- Khedun, C. P., Singh, V. P., & Byrd, A. R. (2019). Joint probability of extreme streamflow and its day of occurrence. *Journal of Hydrologic Engineering*, 24(8), 06019005:1-8. DOI: 10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0001813
- Kite, G. W. (1977). *Frequency and risk analyses in hydrology*. Fort Collins, USA: Water Resources Publications.
- Kottegoda, N. T., & Rosso, R. (2008). Theme 3.5. Copulas. In: *Applied statistics for civil and environmental engineers* (2nd ed.) (pp. 154-157). Oxford, UK: Blackwell Publishing.
- Kuester, J. L., & Mize, J. H. (1973). Chapter 9. Multivariable unconstrained methods. III. ROSENB algorithm. In: *Optimization techniques with Fortran* (pp. 320-330). New York, USA: McGraw-Hill Book Co.
- Metcalfe, A. V. (1997). Theme 2.4.4. Vector variables and von Mises distribution. In: *Statistics in civil engineering* (pp. 31-32). London, UK: Arnold Publishers.
- Meylan, P., Favre, A. C., & Musy, A. (2012). *Predictive hydrology. A frequency analysis approach*. Boca Raton, USA: CRC Press.
- Nieves, A., & Domínguez, F. C. (1998). Sección 6.2. Cuadratura de Gauss. En: *Métodos numéricos. aplicados a la ingeniería* (pp. 416-425). México, DF, México: Compañía Editorial Continental.

- Olver, F. W. J. (1972). Chapter 9. Bessel functions of integer order. In: Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (eds.). *Handbook of Mathematical Functions* (9th print) (pp. 355-436). New York, USA: Dover Publications.
- Ramírez-Orozco, A. I., Gutiérrez-López, A., & Ruiz-Silva, H. L. (2009). Análisis de la ocurrencia en el tiempo de los gastos máximos en México. *Ingeniería hidráulica en México*, 24(1), 115-124.
- Rao, A. R., & Hamed, K. H. (2000). *Flood frequency analysis*. Boca Raton, USA: CRC Press.
- Rosenbrock, H. H. (1960). An automatic method of finding the greatest or least value of a function. *Computer Journal*, 3(3), 175-184.
- Stedinger, J. R., Vogel, R. M., & Foufoula-Georgiou, E. (1993). Chapter 18: Frequency analysis of extreme events. In: Maidment, D. R. (ed.). *Handbook of Hydrology* (pp. 18.1-18.66). New York, USA: McGraw-Hill Inc.
- Stedinger, J. R. (2017). Flood frequency analysis. In: Singh, V. P. (ed.). *Handbook of Applied Hydrology* (2nd ed.) (pp. 76.1-76.8). New York, USA: McGraw-Hill Education.
- Teegavarapu, R. S. V., Salas, J. D., & Stedinger, J. R. (2019). *Statistical analysis of hydrologic variables*. Reston, USA: American Society of Civil Engineers.
- Yue, S., & Rasmussen, P. (2002). Bivariate frequency analysis: Discussion of some useful concepts in hydrological application. *Hydrological Processes*, 16(14), 2881-2898. DOI: 10.1002/hyp.1185

- Zhang, L., & Singh, V. P. (2006). Bivariate flood frequency analysis using the Copula method. *Journal of Hydrologic Engineering*, 11(2), 150-164. DOI: 10.1061/(ASCE)1084-0699(2006)11:2(150)
- Zhang, L., & Singh, V. P. (2019). Chapter 3. Copulas and their properties. In: *Copulas and their applications in water resources engineering* (pp. 62-122). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

