





DOI: 10.24850/j-tyca-2024-04-03

Artículos

Análisis de frecuencias de crecientes bivariado de fechas de ocurrencia y gasto máximo a través de funciones Cópula

Bivariate flood frequency analysis of dates of occurrence and maximum flow through Copula functions

Daniel Francisco Campos-Aranda¹, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9876-3967

¹Profesor jubilado de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí, México, campos_aranda@hotmail.com

Autor para correspondencia: Daniel Francisco Campos-Aranda, campos_aranda@hotmail.com

Resumen

En el centro y sur de la república mexicana cada año los huracanes del mar Caribe y del océano Pacífico originan *crecientes* que definen una *estación húmeda*, y que en general aumentan en magnitud y peligrosidad conforme transcurre la temporada de ciclones. Ambas condiciones







permiten el análisis de frecuencias bivariado de sus fechas de ocurrencia y sus gastos máximos (Qm). En este estudio, la distribución conjunta se formó con base en la función Cópula de Gumbel-Hougaard, que satisface la condición de dependencia (λ_{II}^{CFG}) observada y que combina como distribuciones marginales la de von Mises para las fechas de ocurrencia en el año y para los Qm una función probabilística idónea. La teoría expuesta se aplica a las crecientes anuales registradas en la estación de aforos Guamúchil de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México, en el periodo de 1940 a 1971. La distribución de von Mises se ajusta vía optimización numérica con el algoritmo de Rosenbrock y la distribución idónea de los *Qm* fue la Kappa. Se formó la gráfica de *periodos de retorno* conjuntos de tipo AND de 50, 100 y 500 años. Además, se estimaron periodos de retorno conjuntos condicionales de fechas de ocurrencia, dado que el *Qm* tiene los periodos de retorno citados. Lo anterior permite estimaciones de la probabilidad de excedencia del *Qm* en lapsos definidos. Las conclusiones destacan la simplicidad de estos análisis de frecuencias bivariados por medio de las funciones Cópula y la importancia práctica de sus predicciones, según las fechas de ocurrencia.

Palabras clave: fechas de ocurrencia, distribución de von Mises, funciones Cópula, cociente tau de Kendall, probabilidades empíricas conjuntas, dependencia en el extremo derecho, periodos de retorno conjuntos y condicionales.







Abstract

In the center and south of the Mexican Republic, each year the hurricanes of the Caribbean Sea and the Pacific Ocean cause floods that lead to a wet season and that generally increase in magnitude and danger as the cyclone season progresses. Both conditions allow bivariate frequency analysis of their dates of occurrence and their maximum flows (Qm). In this study, the bivariate distribution was formed based on the Gumbel-Hougaard Copula function, which satisfies the observed dependency condition (λ_{II}^{CFG}) and which combines the von Mises distributions as marginal distributions for the dates of occurrence in the year and for the Qm a suitable probabilistic function. The exposed theory is applied to the annual floods recorded at the *Guamúchil* gauging station of Hydrological Region No. 10 (Sinaloa), Mexico, in the period from 1940 to 1971. The von Mises distribution is fitted via numerical optimization with the de Rosenbrock algorithm and the ideal distribution of the *Om* turned out to be the Kappa. The graph of joint return periods of the AND type of 50, 100 and 500 years was formed. In addition, conditional joint return periods of occurrence dates were estimated given that the Qm has the cited return periods. This allows estimates of the probability of exceedance of *Qm* in defined periods. The conclusions highlight the simplicity of these bivariate frequency analyses, by means of the Copula functions, and the practical importance of their *predictions*, according to the dates of occurrence.

Keywords: Dates of occurrence, von Mises distribution, Copula functions, Kendall's tau ratio, joint empirical probabilities, dependency on the extreme right, joint and conditional return periods.







Recibido: 03/08/2022

Aceptado: 21/12/2022

Publicado Online: 05/01/2023

Introducción

Generalidades

En términos generales, el riesgo de las inundaciones y sus daños son función directa del volumen de agua que escurre por el cauce, y que excede su límite o capacidad, desbordándose y cubriendo las planicies de inundación. Sin embargo, la *fecha de ocurrencia* del evento es tan importante como su magnitud y en algunos casos mayor cuando se presentan fuera de la temporada o *estación húmeda* debido a que toma a la población desprevenida y causa daños mayores (Khedun, Singh, & Byrd, 2019).

Por lo anterior, la estimación de la *probabilidad de ocurrencia* de las crecientes a lo largo del año es vital para la elaboración de los planes sin obras hidráulicas de mitigación de daños, que incluyen la preparación para el evento, con el propósito de reducir la exposición y vulnerabilidad de la población, así como optimizar los recursos económicos disponibles para la emergencia y acelerar la recuperación posterior al evento (Durrans, Eiffe, Thomas, & Goranflo, 2003; Khedun *et al.*, 2019).







En general, entender el comportamiento estacional de las crecientes es vital en la planeación y el manejo de los recursos hidráulicos del río tanto para los usos agrícolas e hidroeléctricos como para la navegación, usos recreativos y otras actividades asociadas con los cuerpos de agua. Por lo anterior, conocer la relación que guardan el gasto máximo con su fecha de ocurrencia es sumamente importante, al grado de requerir su estudio conjunto bivariado (Chen, Guo, Yan, Liu, & Fang, 2010).

El análisis de frecuencia de crecientes bivariado comenzó formalmente a principios del siglo XXI (Yue & Rasmussen, 2002), y por lo general se basó en el gasto máximo y el volumen de las crecientes anuales, utilizando la distribución Normal bivariada y el llamado modelo Logístico, que acepta como funciones de distribución de probabilidades (FDP) marginales iguales a las distribuciones de valores extremos; las más comunes, Gumbel y GVE (Escalante-Sandoval & Reyes-Chávez, 2002; Aldama, Ramírez, Aparicio, Mejía-Zermeño, & Ortega-Gil, 2006).

El análisis bivariado de las crecientes es el enfoque multivariado más simple y aun así implica cinco complicaciones matemáticas: (1) se debe emplear una FDP bivariada; (2) su validación requiere la estimación de las probabilidades empíricas bivariadas; (3) ahora existen probabilidades conjuntas y condicionales; (4) se debe definir un periodo de retorno conjunto, para el cual existen *infinitas* parejas de valores de X y Y que lo satisfacen, y (5) hay que seleccionar entre las parejas citadas los eventos críticos o de diseño (Ramírez-Orozco & Aldama, 2000; Escalante-Sandoval & Reyes-Chávez, 2002; Volpi & Fiori, 2012; Requena, Mediero, & Garrote, 2013).







Actualmente, mediante el uso de la herramienta matemática conocida como "Cópulas", se pueden construir FDP bivariadas con marginales de tipos diferentes debido a que las *funciones cópula* permiten representar distribuciones multivariadas a partir de las FDP univariadas o *marginales*, sin importar su forma o tipo (Salvadori, De Michele, Kottegoda, & Rosso, 2007; Meylan, Favre, & Musy, 2012; Genest & Chebana, 2017; Zhang & Singh, 2019; Chowdhary & Singh, 2019).

Por medio de las funciones Cópula se aborda el análisis de frecuencias *bivariado* de las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales y sus gastos máximos. Las primeras son representadas por la distribución de von Mises y los segundos por una FDP idónea.

Objetivos

Los *objetivos* de este estudio se pueden englobar en los seis siguientes: (1) se exponen los estadísticos direccionales que representan a las fechas de ocurrencia de las crecientes en el año; (2) se describe la *distribución de von Mises* (dvM) y su ajuste vía optimización numérica, que permite la caracterización probabilística de las fechas de ocurrencia; (3) se presentan las características básicas de las *funciones Cópula* (*FC*) de Frank y de Gumbel-Hougaard, que incluyen cociente tau de Kendall, dependencia observada y de la *FC*, estimación de las probabilidades empíricas conjuntas y selección y ratificación de la *FC*; (4) se expone la selección y adopción de la FDP marginal idónea de los gastos máximos anuales; (5) se describen los periodos de retorno conjuntos de tipo OR, AND y condicionales, y (6) se detalla como ejemplo numérico la aplicación







de la teoría y procedimientos expuestos a las 32 crecientes anuales registradas en la estación hidrométrica *Guamúchil* de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

Teoría operativa

Datos circulares e indicadores direccionales

Las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales en México por lo general definen una estación húmeda, que abarca de junio a octubre, temporada de incidencia de los huracanes que se generan en el mar Caribe y en el océano Pacífico. Por lo anterior, las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales se pueden representar dentro de un círculo, que abarca los 365 días del año.

Existen varias convenciones o formas de trabajar en el círculo para dibujar los datos (Ramírez-Orozco, Gutiérrez-López, & Ruiz-Silva, 2009). En adelante, se usará la convención de Burn (1997), por su semejanza con los cuadrantes cartesianos. En tal esquema, el avance es contrario a las manecillas del reloj, iniciando en el eje de las abscisas; por ello, los días 1º de enero y 31 de diciembre coinciden en tal inicio.

Teniendo varios datos circulares dibujados es posible obtener sus indicadores direccionales, los más importantes son dos: su *dirección media* ($\bar{\alpha}$) y su *índice estacionalidad* (\bar{r}). El primero define la tendencia central de los datos y, por lo tanto, es la fecha de ocurrencia promedio de las crecientes anuales; el segundo cuantifica la dispersión de tales valores (Campos-Aranda, 2017).







Dirección media e índice de estacionalidad

Para estimar estos indicadores se comienza por transformar cada fecha de ocurrencia de las crecientes anuales a día juliano (D_i), es decir, de 0 a 365; lo anterior implica no considerar los años bisiestos. Si una creciente ocurre el 29 de febrero, se le asigna el día 28. Las fechas de enero quedan igual, pero a las de febrero se les suma 31, a las de marzo 59, a las de abril 90 y así sucesivamente hasta las de noviembre a las que se les agrega 304, y a las de diciembre se les suma 334 para obtener el día juliano. Enseguida se obtiene el ángulo a_i en radianes, correspondiente a la fecha i de cada creciente (D_i), con la expresión siguiente (Burn, 1997; Cunderlik, Ouarda, & Bobée, 2004; Chen, Singh, Guo, Fang, & Liu, 2013; Campos-Aranda, 2023b):

$$\alpha_i = 2\pi \frac{D_i}{365} = X_i \text{ con } 0 \le \alpha_i \le 2\pi$$
 (1)

en la cual:

 π = número pi con 3.141592654 como valor aproximado

 X_i = variable aleatoria de las fechas de ocurrencia en radianes

Enseguida, las coordenadas x y y de las fechas de ocurrencia de las crecientes descritas por los ángulos α_i se estiman con base en los cosenos y senos, y se obtienen sus valores medios a través de las ecuaciones siguientes:







$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \cos(\alpha_i) \tag{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}(\alpha_i)$$
 (3)

siendo:

n= número de fechas de ocurrencia de las crecientes anuales analizadas Ahora, la *dirección media* $(\bar{\alpha})$ de la fecha promedio de las crecientes será:

$$\bar{\alpha} = \arctan\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right) \tag{4}$$

La aplicación de la ecuación anterior se realiza obteniendo primero el arco tangente de \bar{y} entre \bar{x} , ambas con signo positivo designado a, en radianes; entonces, si \bar{x} y \bar{y} son positivas $\bar{\alpha}=\alpha$; si $\bar{x}<0$ y $\bar{y}>0$ $\bar{\alpha}=\pi-\alpha$; si ambas son negativas $\bar{\alpha}=\pi+\alpha$; por último, si $\bar{x}>0$ y $\bar{y}<0$ $\bar{\alpha}=2\pi-\alpha$. Los ángulos α_i y $\bar{\alpha}$ se transforman a grados (de 0 a 360°) al multiplicarlos por 57.295755.

El valor de $\bar{\alpha}$ en día juliano se denomina día medio de las crecientes (DMC), y se obtiene dividiendo entre 2π y multiplicando por 365. El índice DMC indica la fecha promedio de ocurrencia de los gastos máximos anuales en una cuenca dada. Se puede esperar que cuencas con valores similares del DMC presenten semejanzas en otras características







hidrológicas importantes. Lógicamente, el *DMC* estará relacionado con el tamaño de la cuenca y con su localización geográfica dentro de la región hidrológica estudiada (Burn, 1997; Cunderlik *et al.*, 2004).

Una medida de la variabilidad de las *n* fechas de ocurrencia de las crecientes, en relación con el *DMC*, se puede estimar calculando la resultante media, cuya expresión es:

$$\bar{r} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \tag{5}$$

El *índice de estacionalidad* \bar{r} es una medida adimensional de la dispersión de los datos, y toma valores entre 0 y 1. Un valor unitario indica que todas las crecientes ocurren en la misma fecha; en cambio, un valor cercano a cero implica gran variabilidad de ocurrencias a lo largo de todo el año.

Ramírez-Orozco et~al.~(2009) establecen los siguientes cinco grados de estacionalidad: (1) muy fuerte, cuando $\bar{r} > 0.90$; (2) fuerte, cuando \bar{r} fluctúa entre 0.70 y 0.90; (3) media, cuando \bar{r} varía de 0.50 a 0.70; (4) baja, cuando \bar{r} cambia de 0.10 a 0.50, y (5) muy baja o débil, cuando $\bar{r} < 0.10$. Chen et~al.~(2013) indican que si \bar{r} es cercano a la unidad, se puede esperar que una sola temporada o estación húmeda sea dominante.







La distribución de von Mises

Este modelo probabilístico es de uso común para representar variables aleatorias que tienen dirección en dos dimensiones y una moda única. Por ello, la distribución de von Mises (dvM) se considera la analogía natural del modelo Normal para datos estacionales. Su función de densidad de probabilidad es la ecuación siguiente (Metcalfe, 1997; Carta, Bueno, & Ramírez, 2008; Chen et al., 2010):

$$f(x) = \frac{\exp\left[\kappa \cdot \cos(x - \mu)\right]}{2\pi I_0(\kappa)} \text{ con } 0 \le x \le 2\pi, 0 < \mu \le 2\pi, \kappa > 0$$
(6)

La dvM es simétrica con su moda en $x = \mu$, que también es su dirección media $(\bar{\alpha})$, y la dispersión está dada por el parámetro de concentración κ (kappa). El denominador de la Ecuación (6) hace que el área bajo la curva sea unitaria y por ello se le llama factor de normalización (FN); incluye la función modificada de Bessel de primer tipo de orden cero $[I_0(\kappa)]$.

Para estimar la probabilidad de no excedencia de un valor x se integra numéricamente la Ecuación (6), esto es:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \int_0^x \exp[\kappa \cdot \cos(x - \mu)]$$
 (7)

La expresión anterior define la FDP de la dvM. $I_0(\kappa)$ se estima con la siguiente serie ascendente, que proviene de Olver (1972):









$$I_0(\kappa) = 1 + \frac{(\kappa^2/4)}{1} + \frac{(\kappa^2/4)^2}{4} + \frac{(\kappa^2/4)^3}{36} + \frac{(\kappa^2/4)^4}{576} + \frac{(\kappa^2/4)^5}{14400} + \tag{8}$$

Integración numérica de la dvM

Para llevar a cabo tal integración numérica de la Ecuación (7) se adoptó el método de la cuadratura Gauss-Legendre, cuya ecuación operativa univariada es (Nieves & Domínguez, 1998; Campos-Aranda, 2003):

$$\int_{a}^{b} f(x) \, dx \cong \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{np} w_{i} \cdot f \left[\frac{(b-a)h_{i} + b + a}{2} \right] \tag{9}$$

en la cual:

 w_i = coeficientes del método, cuyas abscisas son h_i

np = número de parejas en donde se evalúa la función f(x), con el argumento indicado en $f(\cdot)$ de la Ecuación (9)

En Davis y Polonsky (1972) se obtuvieron las 12 parejas utilizadas de w_i y h_i con 15 dígitos debido a que el lenguaje *Basic* acepta 16 dígitos como variables de doble precisión.









Ajuste de la dvM en la estación húmeda

Cuando las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales abarcan en su mayoría un lapso en meses bastante definido, por ejemplo, de junio a octubre, entonces la aplicación de la Ecuación (7) se realiza vía optimización numérica, para buscar los valores de μ y κ que reduzcan la suma de las diferencias entre probabilidades teóricas $[F_T(x)]$ y empíricas $[F_E(x)]$ al cuadrado, esto es:

Minimizar F0 =
$$\sum_{i=1}^{n} [F_T(x) - F_E(x)]^2$$
 (10)

La minimización de la función objetivo anterior se realizará por medio del algoritmo de Rosenbrock. Las probabilidades empíricas se definen con la fórmula de Gringorten (Chen *et al.*, 2010), que es la siguiente:

$$F_E(x) = \frac{m - 0.44}{n + 0.12} \tag{11}$$

en la cual:

m= número de orden del dato o fecha de ocurrencia en radianes ($x=\alpha_i$) cuando se ubican en magnitud progresiva

n = número total de datos

Lógicamente, se eliminan de modo previo las fechas ocurrencia acontecidas fuera del lapso principal o *estación húmeda* de las crecientes







para mejorar el ajuste y, por lo tanto, la definición de la dvM. Mayores detalles del proceso anterior se pueden consultar en Campos-Aranda (2023b).

Algoritmo de Rosenbrock

Es un procedimiento numérico de búsqueda directa que intenta definir el *mínimo* de una función no lineal de múltiples variables aleatorias no acotadas. El *algoritmo de Rosenbrock* asume que la función es unimodal, y comienza definiendo una línea recta o dirección de búsqueda a partir de un punto dado inicial. Enseguida evalúa la *función objetivo* (FO) en varios puntos de la línea y determina el óptimo; cuando sucede esto, se selecciona una nueva dirección de búsqueda y el proceso se repite de manera recursiva por etapas.

En este algoritmo es conveniente dar diferentes puntos iniciales para buscar el mínimo global a partir de los mínimos locales estimados. Una descripción más detallada del proceso se tiene en Rosenbrock (1960), Kuester y Mize (1973), y Campos-Aranda (2003).

Ventajas de las funciones Cópula

Como ya se indicó, la ventaja esencial de las *funciones Cópula* (*FC*) consiste en permitir expresar una *distribución conjunta* de variables aleatorias correlacionadas, como una función de sus distribuciones marginales, previamente adoptadas. Entonces, una *FC* enlaza o relaciona las distribuciones marginales univariadas para formar una distribución







multivariada. Otra ventaja básica de las *FC* al formar distribuciones multivariadas es el hecho de que ellas separan el efecto de la dependencia entre las variables aleatorias de los efectos de las distribuciones marginales en la modelación conjunta.

Debido a lo anterior, la construcción de la distribución multivariada se reduce al estudio de la relación que guardan las variables correlacionadas si las distribuciones marginales univariadas son conocidas. El uso de las *FC* ofrece entera libertad para adoptar o seleccionar las distribuciones marginales univariadas que mejor representen a los datos (Meylan *et al.*, 2012; Zhang & Singh, 2019; Chowdhary & Singh, 2019).

Familias de Cópulas por aplicar

Las funciones Cópula (FC) que han sido desarrolladas se han clasificado en cuatro clases: de Arquímedes, de valores extremos, elípticas y misceláneas. También se clasifican en Cópulas de un parámetro o de varios, dependiendo de la amplitud con la cual se defina la estructura de la dependencia entre las variables X y Y (Meylan et al., 2012; Chowdhary & Singh, 2019). Salvadori et al. (2007) exponen un resumen amplio y útil de FC que han sido aplicadas en el campo de la hidrología.

Designando a $F_X(x) = u$, $F_Y(y) = v$ y θ el parámetro que mide la dependencia o asociación entre u y v, se tienen las siguientes dos familias de Cópulas de Arquímedes y de valores extremos (Salvadori *et al.*, 2007; Zhang & Singh, 2019; Chen & Guo, 2019; Chowdhary & Singh, 2019).

1. Frank. Su ecuación y espacio de variación de θ son:









$$C(u,v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right] (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$$
(12)

Para la dependencia negativa $0 \le \theta < 1$ y para la positiva $\theta > 1$, con $\theta = 1$ para la independencia entre u y v. La relación de θ con el τ_n es la siguiente:

$$\tau_n = 1 + \frac{4}{\theta} [D_1(\theta) - 1] \tag{13}$$

siendo $D_1(\theta)$ la función Debye de orden 1, cuya expresión es:

$$D_1(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{s}{e^s - 1} ds \tag{14}$$

La ecuación anterior se estimó con integración numérica, ratificando sus resultados con los valores tabulados por Stegun (1972).

2. Gumbel-Hougaard, la cual acepta solo dependencia positiva. Su ecuación y espacio de variación de θ son:

$$C(u,v) = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right\} [1,\infty)$$
 (15)

Con $\theta = 1$ se tiene independencia entre u y v. La relación de θ con el cociente tau de Kendall es la siguiente:









$$\tau_n = \frac{\theta - 1}{\theta} \tag{16}$$

Medidas de asociación

Concordancia

Como la FC caracteriza la dependencia entre las variables aleatorias u y v, es necesario el estudio de las medidas de asociación para disponer de un método que permita estimar su parámetro θ . En términos generales, una variable aleatoria es concordante con otra cuando sus grandes valores están asociados con los grandes valores de la otra y los valores pequeños de una con los valores reducidos de la otra (Salvadori et al., 2007; Chowdhary & Singh, 2019).

Unas variables con correlación lineal directa serán concordantes, pues al aumentar una la otra también lo hace. Variables con correlación lineal inversa serán *discordantes*, ya que a grandes valores de una le corresponderán pequeños valores de la otra. Lo anterior implica que son *concordantes* (c) las parejas ($x_1 - x_2$)($y_1 - y_2$) > 0 y *discordantes* (d) cuando ($x_1 - x_2$)($y_1 - y_2$) < 0 (Salvadori *et al.*, 2007; Chowdhary & Singh, 2019).

Una medida numérica de asociación es un estadístico que indica el grado de dependencia o asociación de las variables. Para fines de comparación, tales medidas varían de 0 a +1 o a -1, indicado la asociación perfecta positiva en +1 o negativa en -1. El cociente tau de







Kendall y el coeficiente rho de Spearman son dos medidas no paramétricas que proporcionan información sobre una forma especial de asociación o dependencia conocida como concordancia (Salvadori et al., 2007; Chen & Guo, 2019).

Cociente tau de Kendall

Mide la probabilidad de tener parejas concordantes, por lo cual es el cociente de c - d entre c + d. Su expresión para estimarlo con datos bivariados es (Zhang & Singh, 2006; Zhang & Singh, 2019):

$$\tau_n = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} signo[(x_i - x_j)(y_i - y_j)]$$
 (17)

en la ecuación anterior:

n = número de observaciones

 $signo[\cdot] = +1$ si tales parejas son concordantes y -1 si son discordantes

Genest y Favre (2007) exponen una prueba para el cociente tau, adoptando como hipótesis nula H_0 en el que X y Y son independientes y entonces el estadístico tiene distribución aproximadamente Normal con media 0 y varianza 2(2n + 5) / [9n(n - 1)]. Entonces H_0 será rechazada con un nivel de confianza a = 5 % si:

$$\sqrt{\frac{9n(n-1)}{2(2n+5)}} |\tau_n| > Z_{\alpha/2} = 1.96 \tag{18}$$





Ciencias Agua





Estimación del parámetro de dependencia

El método más simple para estimar el parámetro θ de las FC se asemeja al método de momentos y se basa en la inversión de la ecuación que relaciona a θ con el cociente tau de Kendall o con el coeficiente rho de Spearman (Meylan et al., 2012; Chowdhary & Singh, 2019; Zhang & Singh, 2019; Chen & Guo, 2019). Para obtener θ , en la Ecuación (13) se procede por tanteos; en cambio, en la Ecuación (16) se despeja su valor.

Estimación de probabilidades empíricas conjuntas

Las probabilidades empíricas bivariadas se estimaron con base en la fórmula de Gringorten, aplicada por Yue (2000b), Zhang y Singh (2019), y Chen y Guo (2019). Tal fórmula es:

$$p = \frac{i - 0.44}{n + 0.12} \tag{19}$$

en la cual:

i = número de cada dato cuando están ordenados de manera progresiva n = número total de ellos o amplitud del registro procesado

La expresión anterior se aplicó en el plano bidimensional, con los datos ordenados en forma progresiva; las fechas de ocurrencia (X_i) en los renglones y los gastos máximos (Q_i) en las columnas. El plano formado







es un cuadrado de n por n casillas, con n casillas en su diagonal principal cuando el número de orden del renglón es igual al de la columna. Después, cada pareja de datos anual (X_i y Q_i) se localiza en el plano bidimensional, y la casilla definida por la intersección del renglón y columna se identifica con el número i, que corresponde al año histórico dibujado.

Cuando las n parejas de datos están dibujadas, se busca el año 1, y se define un área rectangular o cuadrada de valores menores de X y de Q, cuyo conteo de casillas numeradas dentro es NM_1 o combinaciones de X y Y menores. Calculados los n valores de NM_i , se aplica la fórmula de posición gráfica de Gringorten para estimar la probabilidad empírica conjunta o bivariada:

$$F(x,y) = P(X \le x, Q \le q) = \frac{NM_i - 0.44}{n + 0.12}$$
(20)

Selección de la función Cópula

Un enfoque simple de selección de la función Cópula bivariada se basa en los estadísticos del error de ajuste, al comparar las probabilidades empíricas observadas (w_i^o) con las teóricas calculadas (w_i^c) con la FC que se prueba. Los indicadores aplicados son el error medio estándar (EME), el error medio absoluto (EMA) y el error absoluto máximo (EAM); sus expresiones son (Chowdhary & Singh, 2019):







$$EME = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (w_i^o - w_i^c)^2}$$
 (21)

$$EMA = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |(w_i^o - w_i^c)| \tag{22}$$

$$EAM = \max_{i=1:n} |(w_i^o - w_i^c)|$$
 (23)

Dependencia en el extremo superior

Generalidades

El criterio más importante que se aplica para seleccionar una FC bivariada es el basado en la magnitud de la dependencia en el extremo superior de la distribución conjunta, lo cual tiene impacto en la *veracidad* de las predicciones extremas. La dependencia en la cola superior derecha (λ_U) es la probabilidad condicional de que Q sea mayor que un cierto percentil (s) de $F_Q(q)$, dado que X es mayor que tal percentil en $F_X(x)$ conforme S se aproxima a la unidad. La dependencia en la cola inferior izquierda (λ_L) compara que Q sea menor que X cuando S se aproxima a cero (Chowdhary & Singh, 2019; Salvadori *et al.*, 2007).

En relación con las *FC* expuestas, las cópulas de Frank no tienen dependencias en sus zonas extremas. Por el contrario, la cópula Gumbel-Hougaard tiene dependencia significativa en la cola superior igual a:

$$\lambda_{II} = 2 - 2^{1/\theta} \tag{24}$$









Dupuis (2007) probó seis familias de cópulas y encontró que su capacidad para estimar eventos extremos varía de mala a buena, con el siguiente orden: Clayton, Frank, Normal, *t*-Student, Gumbel-Hougaard y de Clayton Asociada (*Survival Clayton*). A conclusiones similares llegaron Poulin, Huard, Favre y Pugin (2007), al comparar las mismas seis familias de Cópulas y la denominada A12, que tiene dependencia significativa en su cola derecha.

Estimación de la dependencia observada

Para abordar la estimación de la dependencia en la cola superior (λ_U) que muestran los datos disponibles, primero se debe definir la llamada *Cópula empírica*. Como la *FC* caracteriza la dependencia entre las variables aleatorias X y Q, entonces el par de rangos R_i y S_i procedentes de las tales variables son el estadístico que retiene la mayor cantidad de información y su escalamiento con el factor 1/(n+1) genera una serie de puntos en el cuadrado unitario $[0, 1]^2$, formando el dominio de la Cópula empírica (Chowdhary & Singh, 2019), definida así:

$$C_n(u,v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(\frac{R_i}{n+1} \le u, \frac{S_i}{n+1} \le v)$$
 (25)

En la ecuación anterior, $\mathbf{1}(\cdot)$ indica una función de las variables aleatorias U y V, que son una transformación en aumento continuo de X









y Y, en relación con las integrales de probabilidad empírica $F_n(X)$ y $F_n(Y)$, cuyas ecuaciones son:

$$U_i = \frac{\text{Rango}(X_i)}{n+1} = F_n(x_i) \ V_i = \frac{\text{Rango}(Q_i)}{n+1} = F_n(q_i)$$
 (26)

Poulin *et al.* (2007) utilizan el estimador propuesto por Frahm, Junker y Schmidt (2005), el cual se basa en una muestra aleatoria obtenida de la Cópula empírica. Su expresión es:

$$\lambda_U^{CFG} = 2 - 2\exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln\left[\sqrt{\ln\frac{1}{U_i}\cdot\ln\frac{1}{V_i}}/\ln\left(\frac{1}{\max(U_i,V_i)^2}\right)\right]\right\}$$
 (27)

Este estimador acepta que la *FC* se puede aproximar por una de la clase valores extremos; tiene la ventaja de no requerir un valor umbral para su estimación.

Ratificación de la función Cópula seleccionada

Esta es la etapa más importante del proceso de aplicación de las *FC*, pues en ella se verifica que tal modelo reproduzca fielmente las probabilidades conjuntas observadas (Ecuación (20)). Yue (2000a) expone una forma simple y práctica de representar las probabilidades conjuntas empíricas y teóricas, que consiste en llevar al eje de las abscisas la primera y al eje de las ordenadas la segunda; en tal gráfica, cada pareja de datos define









un punto que coincide o se aleja de la recta a 45 °. La inspección de la gráfica descrita y el valor del coeficiente de correlación —en estos casos, superior a 0.98— ratifican la validez del modelo probabilístico conjunto.

Yue (2000b), y Yue y Rasmussen (2002) aplican el test de Kolmogorov-Smirnov con un nivel de significancia (a) del 5%, para aceptar o rechazar la diferencia máxima absoluta (dma) entre las probabilidades conjuntas. Para evaluar la estadística (D_n) del test, se utilizó la expresión que exponen Meylan $et\ al$. (2012), para a=5%, que es:

$$D_n = \frac{1.358}{\sqrt{n}} \tag{28}$$

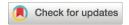
n es el número de datos. Si la dma es menor que D_n , se ratifica la FC adoptada.

Selección de las distribuciones marginales

El planteamiento para la selección de las distribuciones marginales fue muy simple y consistió en aplicar las tres FDP que se han establecido de referencia o de aplicación bajo precepto, que son la Log-Pearson tipo III (LP3), la general de valores extremos (GVE) y la logística generalizada (LOG). Además, se aplicaron tres modelos de uso generalizado: la Pareto generalizada (PAG), la Kappa y la Wakeby. Las primeras cuatro FDP citadas tienen tres parámetros de ajuste y las dos últimas, 4 y 5. Con excepción de la LP3, que se aplicó con el método de momentos en los







dominios logarítmico (WRC, 1977) y real (Bobée, 1975), el resto se ajustó con el método de momentos L (Hosking & Wallis, 1997).

La selección de la FDP más conveniente se basó en el valor que cada una genera con una probabilidad de no excedencia del $1\,\%$; es decir, un valor muy bajo que no supere a los valores mínimos observados, para evitar probabilidades marginales (v) negativas. Este criterio de selección es el requerido en registros de gasto máximo Q que presentan valores mínimos muy reducidos, en comparación con sus extremos máximos.

Además, se tomaron en cuenta los errores estándar de ajuste (*EEA*) y absoluto medio (*EAM*), así como la magnitud de las *predicciones* en los periodos de retorno mayores a 500 años.

Errores de ajuste

El primer criterio aplicado para la selección de la mejor FDP a unos datos o serie disponible fueron los llamados *errores de ajuste* (Kite, 1977; Willmott & Matsuura, 2005; Chai & Draxler, 2014). Este criterio y el descrito para evitar probabilidades negativas permitirán adoptar una distribución adecuada entre los modelos: LP3, GVE, LOG, PAG, Kappa y Wakeby.

Cambiando en las ecuaciones (20) y (21) las probabilidades observadas por los datos ordenados de la serie analizada (x_i o y_i), y las probabilidades calculadas por los valores estimados con la FDP que se prueba o contrasta, se obtienen el error estándar de ajuste (*EEA*) y el error absoluto medio (*EAM*). Los valores que se estiman (\hat{x}_i o \hat{y}_i) se buscan







para la misma probabilidad de no excedencia asignada a los datos con la fórmula empírica de Gringorten (Ecuación (19)).

Periodos de retorno bivariados

El primer periodo de retorno bivariado del evento (X, Y) se define bajo la condición OR, lo cual indica que los límites x o y, o ambos pueden ser excedidos, y entonces la ecuación clásica del periodo de retorno o inverso de la probabilidad de excedencia será (Shiau, Wang, & Tsai, 2006; Genest & Chebana, 2017):

$$T_{XY} = \frac{1}{P(X > x \text{ or } Y > y)} = \frac{1}{1 - F_{XY}(x, y)} = \frac{1}{1 - C[F_X(x), F_Y(y)]}$$
(29)

en la cual $C[F_X(x), F_Y(y)]$ es la FC seleccionada.

El segundo periodo de retorno bivariado del evento (X, Y) está asociado con el caso en que ambos límites son excedidos (X > x, Y > y)o condición AND; su ecuación es (Shiau et al., 2006; Genest & Chebana, 2017):

$$T'_{XY} = \frac{1}{P(X > x \text{ and } Y > y)} = \frac{1}{F'_{X,Y}(x,y)} = \frac{1}{1 - F_X(x) - F_Y(y) + C[F_X(x), F_Y(y)]}$$
(30)

Aldama (2000) obtiene la expresión $F'_{X,Y}(x,y)$ de la probabilidad bivariada de excedencia mediante un razonamiento de probabilidades









lógico y simple aplicado en el plano cartesiano. En cambio, Yue y Rasmussen (2002) recurren al plano cartesiano para definir el evento bivariado (X, Y) conceptualmente, que puede ocurrir en alguno de los cuatro cuadrantes.

La relación entre los periodos de retorno bivariados y los univariados es la siguiente (Yue & Rasmussen, 2002; Shiau *et al.*, 2006; Vogel & Castellarin, 2017):

$$T_{XY} \le \min[T_X, T_Y] \le \max[T_X, T_Y] \le T'_{XY} \tag{31}$$

siendo:

$$T_X = \frac{1}{F_X'(x)} = \frac{1}{1 - F_X(x)} \tag{32}$$

$$T_Y = \frac{1}{F_Y'(y)} = \frac{1}{1 - F_Y(y)} \tag{33}$$

Los periodos de retorno bivariados condicionales se basan en la distribución condicional de X, dado que $Y \le y$, la cual se expresa así (Chen & Guo, 2019):

$$P(X \le x | Y \le y) = C(F_X(x) | F_Y(y) \le y) = \frac{C[F_X(x), F_Y(y)]}{F_Y(y)}$$
(34)









Una ecuación similar se obtiene para Y, dado que $X \le x$. Por similitud con la ecuación anterior y la Ecuación (30), se puede obtener la distribución condicional para variables X y Y, excediendo a unos límites (Chen & Guo, 2019), la cual es:

$$P(X > x | Y > y) = \frac{P(X > x, Y > y)}{P(Y > y)} = \frac{1 - F_X(x) - F_Y(y) + C[F_X(x), F_Y(y)]}{1 - F_Y(y)}$$
(35)

Datos por procesar

En este estudio se procesó el registro de la estación hidrométrica *Guamúchil* de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México. La estación de aforos Guamúchil tiene un área de cuenca de 1 645 km² y un registro de 32 años que inició en 1940 y terminó en 1971, cuando se construyó la presa Eustaquio Buelna (Aldama *et al.*, 2006). En tal registro se eliminaron tres años: (1) 1949, cuyo gasto de 375 m³/s ocurrió el 22 de enero; (2) 1960, con un gasto de 1 373 m³/s, que se presentó el 13 de enero, y (3) 1968, con un gasto de 200 m³/s, que aconteció el 10 de febrero. El registro de la *estación húmeda* adoptada se muestra en la Tabla 1, en sus columnas 1 a 6.







Tabla 1. Gastos de las crecientes anuales, fechas de ocurrencia, probabilidades de no excedencia teóricas y empíricas, y conteo para probabilidad empírica conjunta en la estación hidrométrica *Guamúchil* de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
No.	<i>Q_i</i> (m ³ /s)	Mes	D:-	DJ	α_i (radia	anes)	F _T (x)	F _E (x)	NMi
NO.			Día	נט	obs	obs ord		ord	INMi
1	255	Ago	4	216	3.718269	3.0641	0.041	0.019	3
2	65	Sep	22	265	4.561765	3.2879	0.086	0.054	1
3	445	Oct	2	275	4.733907	3.5117	0.165	0.088	12
4	1550	Sep	26	269	4.630622	3.5633	0.189	0.122	24
5	392	Ago	30	242	4.165838	3.5806	0.198	0.157	8
6	916	Oct	8	281	4.837192	3.5806	0.198	0.191	22
7	241	Ago	10	222	3.821554	3.6666	0.244	0.225	3
8	530	Ago	12	224	3.855983	3.6838	0.254	0.260	9
9	648	Jul	23	204	3.511698	3.7183	0.275	0.294	3
10	272	Ago	16	228	3.924839	3.7355	0.285	0.328	5
11	422	Sep	7	250	4.303552	3.8216	0.342	0.363	9
12	377	Ago	5	217	3.735483	3.8560	0.366	0.397	4
13	1173	Sep	17	260	4.475694	3.9076	0.402	0.431	21
14	219	Jul	10	191	3.287913	3.9248	0.415	0.466	2
15	3507	Sep	23	266	4.578979	3.9593	0.440	0.500	25
16	165	Jun	27	178	3.064129	4.0281	0.491	0.534	1
17	526	Ago	18	230	3.959268	4.0970	0.543	0.569	10







1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
No.	No. Qi Mes		Día	DJ	$lpha_i$ (radia	anes)	F _T (x)	F _E (x)	NMi
(m³/s)					obs	obs ord		ord	
18	1014	Sep	20	263	4.527337	4.1658	0.593	0.603	20
19	1610	Ago	2	214	3.683840	4.3036	0.689	0.637	8
20	525	Ago	1	213	3.666626	4.3380	0.711	0.672	5
21	985	Oct	4	277	4.768336	4.4413	0.772	0.706	22
22	460	Jul	26	207	3.563341	4.4757	0.791	0.740	3
23	390	Ago	26	238	4.096982	4.5273	0.817	0.775	7
24	449	Jul	27	208	3.580555	4.5618	0.833	0.809	3
25	794	Jul	27	208	3.580555	4.5790	0.841	0.843	6
26	720	Ago	22	234	4.028124	4.6306	0.862	0.878	13
27	312	Sep	9	252	4.337981	4.7339	0.898	0.912	6
28	520	Sep	15	258	4.441266	4.7683	0.909	0.946	13
29	1045	Ago	15	227	3.907625	4.8372	0.927	0.981	12

DJ = día juliano.

Obs = valores observados.

Ord = valores ordenados.

 $F_T(x)$ = probabilidad de no excedencia teórica (Ecuación (7)).

 $F_E(x)$ = probabilidad de no excedencia empírica (Ecuación (19)).

NMi = número de combinaciones de X_i y Q_i menores (Ecuación (20)).







Test de Wald-Wolfowitz

Esta prueba no paramétrica ha sido expuesta y aplicada por Bobée y Ashkar (1991), Rao y Hamed (2000), y Meylan et~al. (2012) para verificar independencia y estacionariedad en registros de gastos máximos anuales (Q_i) . Por lo anterior, se propuso aplicar la prueba a los registros de α_i en radianes y de gastos máximos anuales, que deben ser muestras aleatorias.

Resultados y su discusión

Búsqueda de las distribuciones marginales

Verificación de la aleatoriedad

Primero se verificó la aleatoriedad de los registros por procesar con base en el Test de Wald-Wolfowitz, cuyo estadístico (U) condujo a valores de -0.720 y -1.522, para las fechas de ocurrencia (α_i) en radianes y para los gastos máximos de la Tabla 1. Como U es menor que 1.96, ambas series o muestras son aleatorias.

Distribución de las fechas de ocurrencia anuales

Para la aplicación del algoritmo de Rosenbrock se adoptaron como valores iniciales de μ y κ 4.25 y 0.50 a los datos (columnas 3 y 4) de la Tabla 1 de la estación Guamúchil, los cuales definen una FO inicial de 1.040.









Después de 15 etapas y 83 evaluaciones de la FO se obtuvo: FO = 0.0456, μ = 4.04104, κ = 3.79233, FN = 59.3770, y los resultados concentrados en la columna 8 de la Tabla 1 y Figura 1. Este ajuste de la dvM recorre el intervalo de ocurrencias de 3.0641 a 4.8372 radianes, que corresponden a las fechas siguientes: del 27 de junio al 8 de octubre (281 – 178 = 103 días).

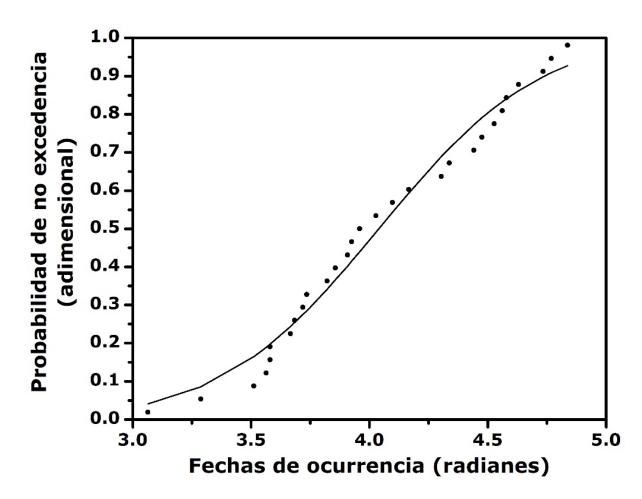


Figura 1. Ajuste de la distribución de von Mises a las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales registradas en la estación hidrométrica *Guamúchil* de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.







Para estimar las fechas correspondientes a los periodos de retorno (Tr, años) que tendrán las predicciones de las crecientes, se procede por tanteos con base en la Ecuación (7), y los valores de μ = 4.04104 y κ = 3.79233 obtenidos para el registro de la Tabla 1. Se adoptan el mes y día que definen los valores más aproximados de probabilidad de no excedencia [F(x)] relativa el Tr estimado. En la Tabla 2 se exponen las estimaciones obtenidas para los Tr indicados.

Tabla 2. Fechas de ocurrencia estimadas con distribución de von Mises para los periodos de retorno indicados en las crecientes anuales registradas en la estación hidrométrica *Guamúchil*, México.

Tr (años)	Tr (años) Fecha		F(x)	1-F(x)	<i>Tr</i> (años)	
asignado	obtenida	radianes	estimada	estimada	estimado	
50	Oct 29	5.198691	0.97970	0.02030	49.3	
100	Nov 8	5.370833	0.98969	0.01031	97.0	
500	Nov 28	5.715117	0.99806	0.00194	515.5	
1000	Dic 4	5.818403	0.99904	0.00096	1041.7	

Distribución de los gastos máximos anuales

En la Tabla 3 se exponen los errores de ajuste y predicciones (m³/s) obtenidas con las tres distribuciones de referencia y las tres de uso generalizado, aplicadas al registro de gastos máximos de la Tabla 1. El valor mínimo del gasto máximo de 65 m³/s resultó inferior a las









magnitudes con probabilidad de excedencia del 1 % que se estiman con las FDP aplicadas, excepto con la distribución Kappa, y que por ello fue la adoptada.

Tabla 3. Errores de ajuste y predicciones (m³/s) de las seis distribuciones aplicadas en el registro de gastos máximos anuales de las crecientes de la estación hidrométrica *Guamúchil* de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México.

FDP	EEA	EAM	Periodos de retorno, en años							
	(m³/s)	(m³/s)	50	100	500	1 000	5 000	10 000		
LP3	181.5	90.0	2 649	3 246	4 855	5 650	7 747	8 765		
GVE	152.6	71.1	2 749	3 647	6 852	8 929	16 361	21 178		
LOG	140.4	72.2	2 702	3 649	7 283	9 798	19 499	26 219		
PAG	163.3	82.6	2 738	3 439	5 493	6 599	9 837	11 581		
KAP	225.6	116.8	2 430	3 031	4 946	6 068	9 664	11 775		
WAK	152.7	76.0	2 789	3 697	6 839	8 815	15 651	19 951		

Los parámetros de ubicación (u_2), escala (a_2) y forma (k_2 y h_2) de la distribución Kappa adoptada son los siguientes: 578.6213, 265.6867, -0.275 y -1.0, cuya expresión es:

$$F(y) = \left\{1 - h_2 \left[1 - \frac{k_2(y - u_2)}{a_2}\right]^{1/k_2}\right\}^{1/h_2}$$
(36)









La distribución Kappa adopta un valor de -1 en su segundo parámetro de forma (h) debido a que los cocientes L ($\tau_3 = 0.42744$ y $\tau_4 = 0.32260$) definen en el diagrama de cocientes L, un punto encima de la distribución Logística Generalizada (Campos-Aranda, 2023a).

Selección y ratificación de la FC

El procesamiento bivariado de los datos de la Tabla 1 condujo a los siguientes dos indicadores de asociación: $r_{xy} = 0.3563$ y $\tau_n = 0.2315$. La Ecuación (18), con n = 29 y el tau citado origina un valor de 0.9424, por lo cual el cociente de Kendall no es significativo.

Aunque el valor de tau no es estadísticamente diferente de cero, el ser positivo indica una correspondencia directa o concordancia, aunque baja, entre las fechas de ocurrencia de las crecientes y su valor de gasto máximo para sus magnitudes anuales. Tal relación o dependencia será modelada por la *FC*.

En la Tabla 4 se muestran los indicadores estadísticos de ajuste que se obtuvieron al aplicar las FC de Frank y Gumbel-Hougaard (G-H). En las ecuaciones (21) a (23), las probabilidades bivariadas empíricas se estimaron con la Ecuación (20), y las teóricas con las ecuaciones (12) y (15).



Ciencias Agua





Tabla 4. Indicadores estadísticos del ajuste de las funciones Cópula indicadas en las crecientes anuales de la estación hidrométrica *Guamúchil*, México.

Cópula	θ	EME	EAM	No. DP	No. DN	MDP	MDN	λ_U
Frank	2.1790	0.0309	0.0237	20	9	0.0682	-0.0368	0.0000
G-H	1.3013	0.0326	0.0246	18	11	0.0785	-0.0369	0.2965

DP, DN = diferencias positivas y negativas.

MDP, MDN = máxima diferencia positiva y negativa.

Como la aplicación de la Ecuación (27) condujo a un valor de λ_U^{CFG} de 0.3416, no existe dificultad para seleccionar a la FC Gumbel-Hougaard en la Tabla 4.

Por otra parte, debido a que el valor de λ_{U}^{CFG} resultó ligeramente mayor que el λ_{U} de la FC, se debería buscar una FC con mayor dependencia en su extremo derecho, pero en este caso no es necesario porque no se realizarán predicciones a altos periodos de retorno, sino que más bien se formularán estimaciones de probabilidades de excedencia, según fechas de ocurrencia, a partir de los periodos de retorno condicionales. Chen y Guo (2019) aplican exclusivamente la FC de Gumbel-Hougaard en este tipo de análisis de frecuencias.

En la Tabla 5 se muestran las probabilidades de no excedencia bivariadas, empíricas observadas (w_i^o) calculadas con la Ecuación (20) y teóricas estimadas (w_i^c) con la FC de Gumbel-Hougaard. También se indican sombreadas las diferencias máximas positiva y negativa.







Tabla 5. Probabilidades de no excedencia conjuntas y sus diferencias, calculadas con la *FC* de Gumbel-Hougaard, para las crecientes de anuales de la estación *Guamúchil*, México.

No.	w_i^o	w_i^c	Diferencias
1	0.0879	0.0785	0.0094
2	0.0192	0.0561	-0.0369
3	0.3970	0.3529	0.0441
4	0.8091	0.8232	-0.0141
5	0.2596	0.2318	0.0279
6	0.7404	0.7201	0.0203
7	0.0879	0.0881	-0.0002
8	0.2940	0.2155	0.0785
9	0.0879	0.1215	-0.0335
10	0.1566	0.1165	0.0400
11	0.2940	0.2812	0.0128
12	0.1223	0.1229	-0.0007
13	0.7060	0.7126	-0.0066
14	0.0536	0.0250	0.0285
15	0.8434	0.8391	0.0043
16	0.0192	0.0103	0.0090
17	0.3283	0.2514	0.0769







No.	w_i^o	w_i^c	Diferencias
18	0.6717	0.6919	-0.0202
19	0.2596	0.2485	0.0111
20	0.1566	0.1486	0.0080
21	0.7404	0.7410	-0.0007
22	0.0879	0.1043	-0.0163
23	0.2253	0.2156	0.0097
24	0.0879	0.1061	-0.0182
25	0.1909	0.1628	0.0282
26	0.4313	0.3619	0.0694
27	0.1909	0.1998	-0.0089
28	0.4313	0.3865	0.0448
29	0.3970	0.3623	0.0346
-	-	-	-

Por otra parte, la Ecuación (28) define a $D_n = 0.2522$ y como la diferencia máxima absoluta de la Tabla 5 es 0.0785, el test de Kolmogorov-Smirnov ratifica a la FC de Gumbel-Hougaard (G-H) adoptada. El coeficiente de correlación (r_{xy}) entre las probabilidades empíricas y las teóricas, estimadas con la FC de G-H, resultó de 0.9931; por lo tanto, el ajuste es excelente. El contraste gráfico entre ambas probabilidades, para ratificar la adopción de FC de G-H, se expone en la Figura 2 para los datos de la Tabla 5.



Ciencias Agua





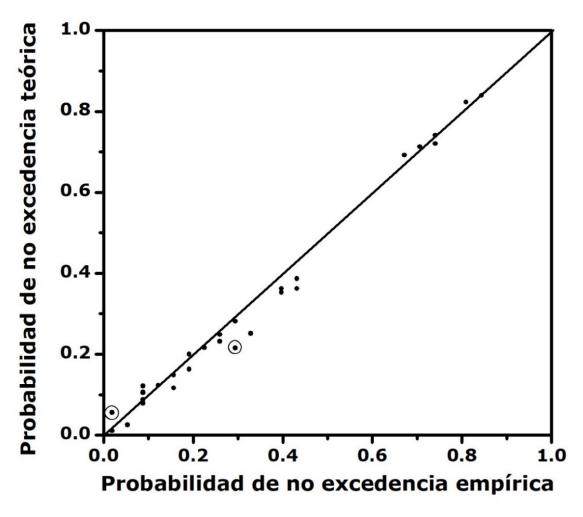


Figura 2. Contraste gráfico de probabilidades conjuntas de las fechas de ocurrencia y del gasto máximo de las crecientes de la estación hidrométrica Guamúchil, México, con la FC de Gumbel-Hougaard.

Gráficas de los periodos de retorno conjuntos

Los periodos de retorno bivariados de tipo AND se calculan con la Ecuación (30). Para sus estimaciones con valores del T'_{XY} de 50, 100 y 500 años se







define una fecha (mes y día), y se calcula su probabilidad de no excedencia F(x) con la Ecuación (7), y los valores de $\mu=4.04104$ y $\kappa=3.79233$. Ahora por *tanteos* se asigna un gasto máximo ($y=q_{max}$) y se estima su F(y) con la Ecuación (36). Ambos resultados se llevan a la Ecuación (15), con $\theta=1.3013$, para estimar la probabilidad de no excedencia conjunta y así obtener con la Ecuación (30) el T'_{XY} que debe coincidir con el valor buscado.

De manera arbitraria se seleccionan fechas de ocurrencia y gastos máximos para ir definiendo las curvas del T'_{XY} . En la Tabla 6 se muestran los valores adoptados para definir las tres gráficas de la Figura 3.

Tabla 6. Parejas de fechas de ocurrencia y gasto máximo anual utilizadas para definir las gráficas del periodo de retorno conjunto tipo AND con la *FC* de Gumbel-Hougaard en las crecientes de la estación *Guamúchil*, México.

T'_{XY} :	= 50 a	ños	$T'_{XY} =$	100 a	ños	T'_{XY} = 500 años			
Fecha	ND*	<i>Qm</i> m³/s	Fecha	ND*	<i>Qm</i> m ³ /s	Fecha	ND*	<i>Qm</i> m ³ /s	
Oct 29	121	117	Nov 8	131	255	Nov 28	151	0	
Oct 27	119	569	Nov 6	129	717	Nov 27	150	607	
Oct 25	117	814	Nov 5	128	880	Nov 26	149	1055	
Oct 22	114	1097	Nov 3	126	1159	Nov 25	148	1452	
Oct 20	112	1248	Oct 31	123	1496	Nov 24	147	1798	
Oct 15	107	1530	Oct 28	120	1749	Nov 23	146	2095	







T'_{XY} :	= 50 a	ños	$T'_{XY} =$	100 a	ños	$T'_{XY} =$	500 a	ños
Fecha	ND*	<i>Qm</i> m³/s	Fecha	ND*	<i>Qm</i> m ³ /s	Fecha	ND*	<i>Qm</i> m ³ /s
Oct 10	102	1719	Oct 25	117	1941	Nov 22	145	2347
Oct 5	97	1854	Oct 20	112	2171	Nov 21	144	2560
Oct 1	93	1937	Oct 15	107	2331	Nov 20	143	2743
Sep 25	87	2034	Oct 10	102	2450	Nov 18	141	3036
Sep 20	82	2098	Oct 5	97	2543	Nov 15	138	3357
Sep 15	77	2152	Sep 30	92	2617	Nov 10	133	3707
Sep 15	72	2197	Sep 25	87	2679	Nov 5	128	3937
Sep 5	67	2235	Sep 20	82	2731	Oct 31	123	4103
Ago 31	62	2268	Sep 15	77	2776	Oct 25	117	4252
Ago 25	56	2302	Sep 10	72	2815	Oct 20	112	4349
Ago 20	51	2326	Sep 5	67	2849	Oct 15	107	4429
Ago 15	46	2346	Ago 31	62	2879	Oct 10	102	4496
Ago 10	41	2363	Ago 25	56	2910	Oct 5	97	4554
Ago 5	36	2377	Ago 20	51	2932	Sep 30	92	4604
Jul 31	31	2389	Ago 15	46	2951	Sep 25	87	4648
Jul 25	25	2400	Ago 10	41	2967	Sep 20	82	4687
Jul 13	13	2415	Ago 5	36	2980	Sep 15	77	4722
Jul 1	1	2430	Jul 31	31	2992	Sep 10	72	4754







T'_{XY} = 50 años			$T'_{XY} =$	100 a	ños	T'_{XY} = 500 años			
Fecha	ND*	<i>Qm</i> m³/s	Fecha	ND*	<i>Qm</i> m ³ /s	Fecha	ND*	<i>Qm</i> m³/s	
			Jul 25	25	3002	Sep 5	67	4783	
			Jul 20	20	3009	Ago 31	62	4808	
			Jul 15	15	3015	Ago 20	51	4855	
			Jul 10	10	3019	Ago 10	41	4886	
			JUL 1	1	3031	Ago 5	36	4899	
						Jul 31	31	4909	
						Jul 25	25	4919	
						Jul 20	20	4926	
						Jul 1	1	4946	

^{*}ND = número de día a partir del 1º de julio.



Ciencias Agua



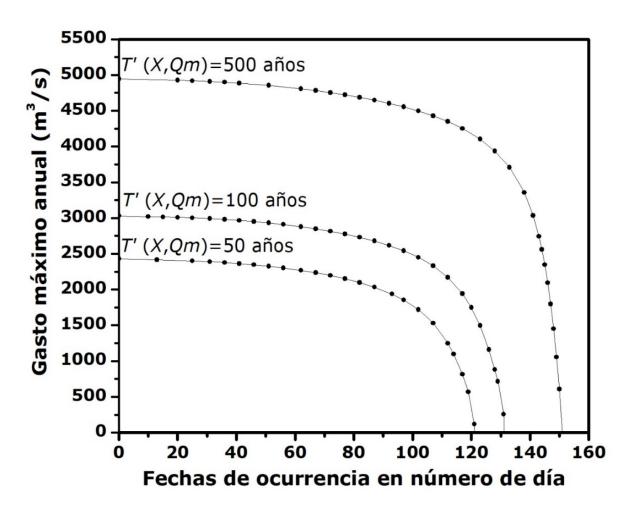


Figura 3. Gráficas de los tres periodos de retorno conjunto T'_{XY} de diseño obtenidas con la FC de Gumbel-Hougaard en las crecientes de la estación hidrométrica Guamúchil, México.

Probabilidades de ocurrencia de eventos de diseño

En la Tabla 7, Tabla 8 y Tabla 9 se exponen las probabilidades condicionales de excedencia $P(X > x \mid Qm > qo)$, calculadas con la Ecuación (35), cuando qo tiene un periodo de retorno (Tr) de 50, 100 y









500 años, es decir, cuando la probabilidad marginal $v = F_Y(y)$ es igual a 0.98. 0.99 y 0.998, y el gasto Qm excede a 2 430, 3 031 y 4 946 m³/s, según la Tabla 3.

Tabla 7. Cálculos de la probabilidad condicional de las fechas de ocurrencia dado que el gasto máximo tiene un Tr = 50 años en las crecientes de la estación hidrométrica *Guamúchil*, México.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
PE propuesta (%)	99	95	90	80	70	60	50	40	30	20	10	5	1
Fecha obtenida	JUN 3	JUN 30	JUL 13	JUL 27	AGO 6	AGO 15	AGO 23	AGO 30	SEP 8	SEP 18	OCT 2	OCT 15	NOV 8
ai (radianes) = Xi	2.6510	3.1158	3.3396	3.5806	3.7527	3.9076	4.0453	4.1658	4.3208	4.4929	4.7339	4.9577	5.3708
PE real	0.9902	0.9509	0.8994	0.8025	0.7038	0.5977	0.4959	0.4068	0.3000	0.2002	0.1016	0.0488	0.0103
PNE de FC de GH	0.0097	0.0489	0.1002	0.1967	0.2949	0.4003	0.5014	0.5897	0.6954	0.7939	0.8902	0.9404	0.9739
PE condicional	0.9985	0.9916	0.9813	0.9592	0.9333	0.9012	0.8652	0.8280	0.7726	0.7016	0.5853	0.4591	0.2106

PE = probabilidad de excedencia, adimensional.

PNE = probabilidad de no excedencia, adimensional.

GH = FC de Gumbel-Hougaard.







Tabla 8. Cálculos de la probabilidad condicional de las fechas de ocurrencia dado que el gasto máximo tiene un Tr = 100 años en las crecientes de la estación hidrométrica *Guamúchil*, México.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
PE propuesta (%)	99	95	90	80	70	60	50	40	30	20	10	5	1
Fecha obtenida	JUN 3	JUN 30	JUL 13	JUL 27	AGO 6	AGO 15	AGO 23	AGO 30	SEP 8	SEP 18	OCT 2	OCT 15	NOV 8
a_i (radianes) = X_i	2.6510	3.1158	3.3396	3.5806	3.7527	3.9076	4.0453	4.1658	4.3208	4.4929	4.7339	4.9577	5.3708
PE real	0.9902	0.9509	0.8994	0.8025	0.7038	0.5977	0.4959	0.4068	0.3000	0.2002	0.1016	0.0488	0.0103
PNE de <i>FC</i> de GH	0.0098	0.0490	0.1005	0.1972	0.2957	0.4015	0.5030	0.5918	0.6982	0.7974	0.8951	0.9467	0.9828
PE condicional	0.9988	0.9932	0.9849	0.9671	0.9461	0.9202	0.8911	0.8609	0.8160	0.7582	0.6622	0.5543	0.3073

PE = probabilidad de excedencia, adimensional.

PNE = probabilidad de no excedencia, adimensional.

GH = FC de Gumbel-Hougaard.

Tabla 9. Cálculos de la probabilidad condicional de las fechas de ocurrencia dado que el gasto máximo tiene un Tr = 500 años en las crecientes de la estación hidrométrica *Guamúchil*, México.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
PE propuesta (%)	99	95	90	80	70	60	50	40	30	20	10	5	1
Fecha obtenida	JUN 3	JUN 30	JUL 13	JUL 27	AGO 6	AGO 15	AGO 23	AGO 30	SEP 8	SEP 18	OCT 2	OCT 15	NOV 8
a_i (radianes) = x	2.6510	3.1158	3.3396	3.5806	3.7527	3.9076	4.0453	4.1658	4.3208	4.4929	4.7339	4.9577	5.3708
PE real	0.9902	0.9509	0.8994	0.8025	0.7038	0.5977	0.4959	0.4068	0.3000	0.2002	0.1016	0.0488	0.0103
PNE de FC de GH	0.0098	0.0491	0.1006	0.1975	0.2961	0.4022	0.5030	0.5918	0.6982	0.7974	0.8951	0.9467	0.9828
PE condicional	0.9993	0.9958	0.9907	0.9798	0.9670	0.9510	0.8911	0.8609	0.8160	0.7582	0.6622	0.5543	0.3073

PE = probabilidad de excedencia, adimensional.

PNE = probabilidad de no excedencia, adimensional.

GH = FC de Gumbel-Hougaard.









Entonces, para el caso de qo = 2 430 m³/s (Tabla 7), se tienen las siguientes probabilidades de eventos: (1) la *probabilidad de ocurrencia* de tales gastos después del 13 de julio es de 98.13 %; (2) la probabilidad de que tales gastos ocurran entre el 13 de julio y el 8 de noviembre será 98.13 - 21.06 = 77.07 %, y (3) durante el lapso de 8 al 18 de septiembre será 77.26 - 70.16% = 7.10 %.

Entonces, para el caso de $qo = 3~031~\text{m}^3/\text{s}$ (Tabla 8), se tienen las siguientes probabilidades eventos: (1) la probabilidad de ocurrencia de tales gastos después del 13 de julio es de 98.49 %; (2) la probabilidad de que tales gastos ocurran entre el 13 de julio y el 8 de noviembre será 98.49 - 30.73 = 67.76 %, y (3) durante el lapso de 8 al 18 de septiembre será de 81.60 - 75.82 = 5.78 %.

Por último, para el caso de qo = 4 946 m³/s (Tabla 9), se tienen las siguientes probabilidades eventos: (1) la probabilidad de ocurrencia de tales gastos después del 13 de julio es de 99.07 %; (2) la probabilidad de que tales gastos ocurran entre el 13 de julio y el 8 de noviembre será 99.07 – 54.23 = 44.84 %, y (3) durante el lapso de 8 al 18 de septiembre será de 88.70 – 85.14 = 3.56 %.

La comparación entre los resultados de los tres límites establecidos para el gasto máximo (qo) indica que la probabilidad de ocurrencia después del 13 de julio aumenta ligeramente conforme el qo crece, lo cual es lógico, dada la correlación positiva de $r_{xy} = 0.3563$ mostrada entre las fechas de ocurrencia y los gastos máximos. A lo anterior también influye el denominador de la Ecuación (35), el cual, conforme aumenta qo, se reduce de 0.02 a 0.002.







Por el contrario, las dos probabilidades de ocurrencia calculadas para los dos lapsos dentro de la estación húmeda decrecen conforme *qo* aumenta, lo cual se debe a la menor probabilidad de excedencia de cada gasto máximo, al tener el 2, 1 y 0.2 %.

Contraste con resultados de un trabajo anterior

Chen y Guo (2019) exponen en sus páginas 42 a 44 y Tabla 3.2, como caso de estudio de un análisis de frecuencias de crecientes bivariado de fechas de ocurrencia y gasto máximo, su aplicación en el embalse *Geheyan* de múltiples propósitos, con una cuenca de 17 000 km², que recibe una precipitación media anual de 1 500 milímetros, y cuya temporada de crecientes abarca cinco meses del 1º de mayo al 30 de septiembre (153 días). Guardando las debidas proporciones, los resultados de su Tabla 3.2 son coincidentes con los de la Tabla 8 debido a que ambas son para un gasto máximo de periodo de retorno 100 años.

Aplicación en cuencas con dos estaciones húmedas

En general, en las cuencas grandes solo las tormentas que originan los frentes fríos y los huracanes las abarcan en su totalidad con lluvias de baja intensidad y larga duración, que generan crecientes de gran magnitud por su gasto máximo, volumen y duración. En cambio, en tales cuencas, las tormentas convectivas son locales, de gran intensidad y dan origen a crecientes ordinarias.









En México, las grandes cuencas de la zona montañosa de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa) presentan dos fechas de ocurrencia de sus crecientes: en otoño e invierno (de noviembre a marzo), y en el verano (de junio a septiembre). En estos regímenes de crecientes existen dos modas y su caracterización probabilística de sus fechas de ocurrencia se realiza con una mezcla de distribuciones de von Mises (Carta *et al.*, 2008; Campos-Aranda, 2023b).

Chen *et al.* (2010), y Chen y Guo (2019) han expuesto análisis *estacionales* crecientes para definir épocas de ocurrencia en cuencas con dos o más estaciones húmedas.

Aplicación en cuencas grandes con una estación húmeda

En cuencas grandes con regímenes de crecientes de una sola temporada húmeda, el estudio bivariado de fechas de ocurrencia y gasto máximo en sus diversos colectores o ríos principales puede ayudar a entender la evolución o desarrollo que tienen sus crecientes, y entonces hacer *pronósticos* más confiables de fechas de llegada hacia aguas abajo.







Conclusiones

El análisis de frecuencias bivariado de fechas de ocurrencia (X) y gasto máximo (Qm) de las crecientes anuales resulta factible debido a las funciones $C\acute{o}pula$, las cuales permiten construir su distribución de probabilidades conjunta con base en unas marginales univariadas; la que caracteriza a las fechas de ocurrencia es la distribución de von Mises y la de los Qm es una FDP idónea.

En este estudio se utilizó una función Cópula (FC) de un solo parámetro de ajuste (θ), que se estima con base en el cociente tau de Kendall, el cual se calcula con el registro conjunto de X y Qm. Tal enfoque primero estima a λ_U^{CFG} o dependencia observada en la cola derecha del registro conjunto disponible. Después se busca una FC que reproduzca tal valor de λ_U^{CFG} ; en este estudio, la de Gumbel-Hougaard. También se aplica una FC que no tiene dependencia significativa en su cola derecha, como es la de Frank, para poder comparar y juzgar la calidad del ajuste de la FC adoptada previamente.

La aplicación numérica descrita en los 32 datos anuales de fechas de ocurrencia y gasto máximo (m³/s) de las crecientes anuales registradas en la estación hidrométrica *Guamúchil* de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México, mostró en la Figura 2 una reproducción fidedigna de las probabilidades bivariadas empíricas y teóricas a través de la *FC* de Gumbel-Hougaard, con un coeficiente de correlación lineal de 0.9931.







Por otra parte, en la Figura 3, relativa a los *periodos de retorno* conjuntos de diseño de tipo AND, se pueden definir infinitas parejas de *X* y *Qm* críticas por estar en la región curva de cada gráfica.

Finalmente, en la Tabla 7, Tabla 8 y Tabla 9 se expone el cálculo de las probabilidades *condicionales*, las cuales permiten estimar, para un lapso adoptado arbitrariamente, la probabilidad de excedencia de eventos de diseño con periodos de retorno de 50, 100 y 500 años.

Referencias

- Aldama, A. A. (2000). Hidrología de avenidas. Conferencia Enzo Levi 1998. *Ingeniería Hidráulica en México*, 15(3), 5-46.
- Aldama, A. A., Ramírez, A. I., Aparicio, J., Mejía-Zermeño, R., & Ortega-Gil, G. E. (2006). *Seguridad hidrológica de las presas en México.*Jiutepec, México: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.
- Bobée, B. (1975). The Log-Pearson type 3 distribution and its application to Hydrology. *Water Resources Research*, 11(5), 681-689. DOI: 10.1029/WR011i005p00681
- Bobée, B., & Ashkar, F. (1991). Chapter 1: Data requirements for hydrologic frequency analysis. In: *The Gamma Family and derived distributions applied in Hydrology* (pp. 1-12). Littleton, USA: Water Resources Publications.
- Burn, D. H. (1997). Catchment similarity for regional flood frequency analysis using seasonality measures. *Journal of Hydrology*, 202(1-4), 212-230. DOI: 10.1016/S0022-1694(97)00068-1









- Campos-Aranda, D. F. (2003). Capítulo 7. Integración Numérica y Capítulo 9. Optimización numérica. En: *Introducción a los métodos numéricos: software en Basic y aplicaciones en hidrología superficial* (pp. 137-153, 172-211). San Luis Potosí, México: Editorial Universitaria Potosina.
- Campos-Aranda, D. F. (2017). Definición de tres épocas de crecientes utilizando estadísticos direccionales. *Tecnología y ciencias del agua*, 8(1), 155-165.
- Campos-Aranda, D. F. (2023a). Análisis de Frecuencias comparativo con momentos L entre la distribución Kappa y seis de aplicación generalizada. *Tecnología y ciencias del agua*, 14(1), 200-250. DOI: 10.24850/j-tyca-14-01-05
- Campos-Aranda, D. F. (2023b). Caracterización probabilística de las fechas de ocurrencia de las crecientes anuales mediante la distribución de von Mises. *Tecnología y ciencias del agua*, 14(2), 204-260. DOI: 10.24850/j-tyca-14-02-06
- Carta, J. A., Bueno, C., & Ramírez, P. (2008). Statistical modelling of directional wind speeds using mixtures of von Mises distributions: Case study. *Energy Conversion and Management*, 49(5), 897-907. DOI: 10.1016/j.enconman.2007.10.017
- Cunderlik, J. M., Ouarda, T. B. M. J., & Bobée, B. (2004). Determination of flood seasonality from hydrological records. *Hydrological Sciences Journal*, 49(3), 511-526. DOI: 10.1623/hysj.49.3.511.54351







- Chai, T., & Draxler, R. R. (2014). Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)? Arguments against avoiding RMSE in the literature. *Geoscientific Model Development*, 7(3), 1247-1250. DOI: 10.5194/gmd-7-1247-2014
- Chen, L., Guo, S., Yan, B., Liu, P., & Fang, B. (2010). A new seasonal design flood method based on bivariate joint distribution of flood magnitude and date of occurrence. *Hydrological Sciences Journal*, 55(8), 1264-1280. DOI: 10.1080/02626667.2010.520564
- Chen, L., Singh, V. P., Guo, S., Fang, B., & Liu, P. (2013). A new method for identification of flood seasons using directional statistics.

 Hydrological Sciences Journal, 58(1), 28-40. DOI: 10.1080/02626667.2012.743661
- Chen, L., & Guo, S. (2019). Chapter 3. Copula-based Flood Frequency
 Analysis and Chapter 4. Copula-based Seasonal Design Flood
 Estimation. In: *Copulas and its application in Hydrology and Water Resources.* (pp. 39-71, 73-96). Gateway East, Singapore: Springer.
- Chowdhary, H., & Singh, V. P. (2019). Chapter 11. Multivariate frequency distributions in hydrology. In: Teegavarapu, R. S. V., Salas, J. D., & Stedinger, J. R. (eds.). *Statistical analysis of hydrologic variables* (pp. 407-489). Reston, USA: American Society of Civil Engineers.
- Davis, P. J., & Polonsky, I. (1972). Chapter 25. Numerical interpolation, differentiation and integration. In: Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (eds.). *Handbook of mathematical functions* (pp. 875-926) (9th print). New York, USA: Dover Publications.







- Dupuis, D. J. (2007). Using copulas in hydrology: Benefits, cautions, and issues. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), 381-393. DOI: 10.1061/(ASCE)1084-0699(2007)12:4(381)
- Durrans, S. R., Eiffe, M. A., Thomas Jr., W. O., & Goranflo, H. M. (2003).

 Joint seasonal/annual flood frequency analysis. *Journal of Hydrologic Engineering*, 8(4), 181-189. DOI: 10.1061/(ASCE)1084-0699(2003)8:4(181)
- Escalante-Sandoval, C. A., & Reyes-Chávez, L. (2002). Capítulo 9. Análisis conjunto de eventos hidrológicos. En: *Técnicas estadísticas en hidrología* (pp. 203-246). Ciudad de México, México: Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.
- Frahm, G., Junker, M., & Schmidt, R. (2005). Estimating the tail-dependence coefficient: Properties and pitfalls. *Insurance: Mathematics and Economics*, 37(1), 80-100. DOI: 10.1016/j-insmatheco.2005.05.008
- Genest, C., & Favre, A. C. (2007). Everything you always wanted to know about Copula modeling but were afraid to ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), 347-368. DOI: 10.1061/(ASCE)1084-0699(2007)12:4(347)
- Genest, C., & Chebana, F. (2017). Copula modeling in hydrologic frequency analysis (pp. 30.1-30.10) (2nd ed.). In: Singh, V. P. (ed.). *Handbook of applied hydrology*. New York, USA: McGraw-Hill Education.







- Hosking, J. R., & Wallis, J. R. (1997). Appendix. *L*-moments for some specific distributions. In: *Regional frequency analysis. An approach based on L-moments*. (pp. 191-209). Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Khedun, C. P., Singh, V. P., & Byrd, A. R. (2019). Joint probability of extreme streamflow and its day of occurrence. *Journal of Hydrologic Engineering*, 24(8), 06019005:1-8. DOI: 10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0001813
- Kite, G. W. (1977). Chapter 12. Comparison of frequency distributions.
 In: Frequency and risk analyses in hydrology (pp. 156-168). Fort
 Collins, USA: Water Resources Publications.
- Kuester, J. L., & Mize, J. H. (1973). Chapter 9. Multivariable unconstrained methods. III. ROSENB algorithm. In: *Optimization techniques with Fortran* (pp. 320-330). New York, USA: McGraw-Hill Book Co.
- Metcalfe, A. V. (1997). Theme 2.4.4. Vector variables and von Mises distribution. In: *Statistics in Civil Engineering* (pp. 31-32). London, England: Arnold Publishers.
- Meylan, P., Favre, A. C., & Musy, A. (2012). Chapter 3. Selecting and checking data series and Theme 9.2. Multivariate Frequency Analysis using Copulas. In: *Predictive hydrology. A frequency analysis approach* (pp. 29-70, 164-176). Boca Raton, USA: CRC Press.
- Nieves, A., & Domínguez, F. C. (1998). Sección 6.2. Cuadratura de Gauss. En: *Métodos numéricos. Aplicados a la ingeniería* (pp. 416-425). México, DF, México: Compañía Editorial Continental.







- Olver, F. W. J. (1972). Chapter 9. Bessel Functions of Integer Order. In:

 Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (eds.). *Handbook of Mathematical Functions* (pp. 355-436) (9th print.). New York, USA: Dover Publications.
- Poulin, A., Huard, D., Favre, A. C., & Pugin, S. (2007). Importance of tail dependence in bivariate frequency analysis. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), 394-403. DOI: 10.1061/(ASCE)1084-0699(2007)12:4(394)
- Ramírez-Orozco, A. I., Gutiérrez-López, A., & Ruiz-Silva, H. L. (2009).

 Análisis de la ocurrencia en el tiempo de los gastos máximos en

 México. *Ingeniería Hidráulica en México*, 24(1), 115-124.
- Ramírez-Orozco, A. I. & Aldama, A. A. (2000). Capítulo 1. Teoría estadística y análisis de frecuencias conjunto. En: *Análisis de frecuencias conjunto para estimación de avenidas de diseño* (pp. 25-58). Avances en Hidráulica No. 7. México, DF, México: Asociación Mexicana de Hidráulica e Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.
- Rao, A. R., & Hamed, K. H. (2000). Chapter 1. Introduction. In: *Flood frequency analysis* (pp. 1-21). Boca Raton, USA: CRC Press.
- Requena, A. I., Mediero, L., & Garrote, L. (2013). A bivariate return period based on copulas for hydrologic dam design: Accounting for reservoir routing in risk estimation. *Hydrology and Earth System Sciences*, 17(8), 3023-3038. DOI: 10.5194/hess-17-3023-2013
- Rosenbrock, H. H. (1960). An automatic method of finding the greatest or least value of a function. *Computer Journal*, 3(3), 175-184.







- Salvadori, G., De Michele, C., Kottegoda, N. T., & Rosso, R. (2007). Chapter 3. Bivariate analysis via Copulas; Appendix B. Dependence and Appendix C. Families of Copulas. In: *Extremes in nature. An approach using Copulas* (pp. 131-175, 219-232, 233-269). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Shiau, J. T., Wang, H. Y., & Tsai, C. T. (2006). Bivariate frequency analysis of floods using Copulas. *Journal of the American Water Resources Association*, 42(6), 1549-1564.
- Stegun, I. A. (1972). Chapter 27. Miscellaneous functions. In: Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (eds.). *Handbook of Mathematical Functions* (pp. 997-1010) (9th print.). New York, USA: Dover Publications.
- Vogel, R. M., & Castellarin, A. (2017). Risk, reliability, and return periods and hydrologic design. In: Singh, V. P. (ed.). *Handbook of applied hydrology* (pp. 78.1-78.10) (2nd ed.). New York, USA: McGraw-Hill Education.
- Volpi, E., & Fiori, A. (2012). Design event selection in bivariate hydrological frequency analysis. *Hydrological Sciences Journal*, 57(8), 1506-1515. DOI: 10.1080/02626667.2012.726357
- WRC, Water Resources Council. (1977). *Guidelines for determining flood flow frequency* (revised edition). Bulletin #17A of the Hydrology Committee. Washington, DC, USA: Water Resources Council.







- Willmott, C. J., & Matsuura, K. (2005). Advantages of the mean absolute error (MAE) over the root mean square error (RMSE) in assessing average model performance. *Climate Research*, 30(1), 79-82. DOI: 10.3354/cr030079
- Yue, S. (2000a). Joint probability distribution of annual maximum storm peaks and amounts as represented by daily rainfalls. *Hydrological Sciences Journal*, 45(2), 315-326. DOI: 10.1080/02626660009492327
- Yue, S. (2000b). The Gumbel mixed model applied to storm frequency analysis. *Water Resources Management*, 14(5), 377-389.
- Yue, S., & Rasmussen, P. (2002). Bivariate frequency analysis: Discussion of some useful concepts in hydrological application. *Hydrological Processes*, 16(14), 2881-2898. DOI:10.1002/hyp.1185
- Zhang, L. & Singh, V. P. (2006). Bivariate flood frequency analysis using the Copula method. *Journal of Hydrologic Engineering*, 11(2), 150-164. DOI: 10.1061/(ASCE)1084-0699(2006)11:2(150)
- Zhang, L. & Singh, V. P. (2019). Chapter 3. Copulas and their properties. In: *Copulas and their applications in water resources engineering* (pp. 62-122). Cambridge, UK: Cambridge University Press.