

DOI: 10.24850/j-tyca-2025-02-02

Artículos

Modelación numérica del flujo rasante en un canal escalonado con curvas verticales

Numerical modeling of skimming flow in a stepped channel with vertical curves

Daniel López-de-Mesa¹, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7577-5527>

Andrés Felipe Cuervo², ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9192-6964>

Alejandra Balaguera³, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4552-513X>

¹Universidad de Medellín, Facultad de Ingeniería, Antioquia, Colombia, dlopez@udemedellin.edu.co

²Universidad de Medellín, Facultad de Ingeniería, Antioquia, Colombia, afcuervov@gmail.com

³Universidad de Medellín, Facultad de Ingeniería, Antioquia, Colombia, abalaguera@udemedellin.edu.co

Autor para correspondencia: Daniel López-de-Mesa, dlopez@udemedellin.edu.co



Resumen

Los canales escalonados se utilizan frecuentemente para la descarga de agua en embalses, sin embargo, hay pocos estudios que consideren la implementación de curvas en el fondo de este tipo de estructuras. Este artículo presenta una evaluación cuantitativa, mediante modelación numérica con dinámica de fluidos computacional (CFD), de las propiedades del flujo rasante en canales escalonados de alta pendiente con curvas verticales. La geometría escalonada se definió con una curva convexa a la entrada, una rampa recta intermedia y una curva cóncava a la salida, con el fin de comparar los campos de velocidad, presión, vorticidad y estadísticas de la turbulencia en los tres tramos del canal. Se concluyó que los perfiles de velocidad obtenidos con el modelo de turbulencia RNG $k-\epsilon$ presentaron una buena correlación con mediciones experimentales en la zona de flujo no aireada. Sin embargo, la calidad del ajuste disminuyó aguas abajo, ya que el modelo numérico no capturó el fenómeno de aireación. Al comparar el comportamiento hidrodinámico en ambas curvas escalonadas se encontró que la zona de separación abarcó una mayor fracción de cada escalón en la curva convexa. En ésta se presentaron además valores negativos de presión a la altura de la esquina superior de las contrahuellas, los cuales no se evidenciaron en la curva cóncava. Finalmente, los máximos de disipación turbulenta se encontraron cerca del fondo en el tramo final de las huellas, y en la frontera entre la corriente principal y el flujo recirculante de cada escalón, y fueron mayores para la curva a la salida del canal.

Palabras clave: flujo rasante, canal escalonado, vertedero escalonado, curvas verticales, dinámica de fluidos computacional (CFD), turbulencia, disipación turbulenta.

Abstract

Stepped channels are frequently used for the discharge of water in reservoirs, however, there are few studies that consider the implementation of curves at their bottom. This article presents a quantitative evaluation, using numerical modeling with computational fluid dynamics (CFD), of the properties of skimming flow in steep stepped chutes with vertical curves. The stepped geometry was defined with a convex curve at the inlet, an intermediate straight chute, and a concave curve at the outlet. A comparative analysis was performed on the velocity, pressure, vorticity, and turbulence statistics fields in the three sections of the channel. It was concluded that the velocity profiles obtained with the RNG $k-\epsilon$ turbulence model presented a good agreement with experimental measurements in the non-aerated flow zone. However, the correlation decreased downstream since the numerical model did not capture the aeration phenomenon. When comparing the hydrodynamic behavior in both stepped curves, it was found that the separation zone covered a greater fraction of each step in the convex curve. In the latter, negative pressure values were observed at the height of the upper corner of the risers, which were not present in the concave curve. Finally, the turbulent dissipation maxima were found near the bottom in the final section of the treads, and on the border between the main stream and the recirculating flow of each step, being higher for the outlet curve.

Keywords: Skimming flow, stepped channel, stepped spillway, vertical curves, computational fluid dynamics (CFD), turbulence, turbulent dissipation.

Recibido: 04/07/2023

Aceptado: 30/10/2023

Publicado *online*: 01/12/2023

Introducción

Una rampa escalonada es un canal abierto con una serie de caídas o escalones en el fondo. La pendiente del canal está determinada por la relación entre la altura de la contrahuella y la longitud de la huella de cada peldaño. Existen tres regímenes de flujo: saltante, transición y rasante. El flujo saltante se caracteriza por chorros sucesivos en caída libre, con una cámara de aire entre el chorro y la contrahuella. En el rasante, la corriente principal pasa sobre el pseudofondo, que se define como la línea imaginaria que une las esquinas exteriores de los escalones, los cuales actúan como una macrorrugosidad (Chanson, 1994). Por último, el flujo de transición es una condición intermedia entre las dos anteriores, en la cual la cámara de aire aparece en algunos escalones y en otros no, y la superficie libre tiene un comportamiento caótico, con ciertas regiones de salpicaduras de agua (Chanson & Toombes, 2004).

El uso de vertederos escalonados se intensificó gracias al progreso mostrado por la industria en el manejo del concreto compactado con

rodillo desde finales del siglo XX (Chanson, 2001). Esto, sumado a que el flujo rasante ocurre con grandes descargas o altas pendientes (Chanson, 1994), se presenta con frecuencia en los vertederos de grandes embalses, y ha generado en los últimos años un interés creciente de los investigadores en describir cualitativa y cuantitativamente la hidrodinámica de tal régimen de flujo. A nivel cualitativo, Chanson (1994) encontró que bajo el pseudofondo, en las cavidades entre huella y contrahuella, se forman vórtices de recirculación, que se mantienen por la transferencia de esfuerzos desde la corriente principal. Si la huella es lo suficientemente larga, aguas abajo de los vórtices ocurre la readherencia del flujo principal a la superficie de los escalones. El mismo autor y Llano (2003) reportaron que inicialmente, a partir del primer escalón, se presenta la región no aireada del flujo, con una superficie libre de apariencia suave. En el fondo, los escalones generan turbulencia y la capa límite crece hasta interceptar la superficie libre en el denominado punto de inserción de aire (PIA). Aguas abajo, los niveles de turbulencia son lo suficientemente altos como para propiciar la región de flujo aireado.

La descripción cuantitativa de ambas regiones, aireada y no aireada, se ha basado sobre todo en el análisis de los campos de velocidad, presión y disipación de energía. Bombardelli, Meireles y Matos (2011) registraron mediciones de velocidad y profundidad del flujo en un modelo físico de un aliviadero escalonado de alta pendiente, aguas arriba del PIA, y compararon con resultados numéricos CFD usando los modelos de turbulencia $k - \varepsilon$ y RNG $k - \varepsilon$. Sus resultados de la tasa de crecimiento de la capa límite demostraron ser mayores que los reportados por otras investigaciones en descargas lisas. Asimismo, su análisis de las

estadísticas de la turbulencia mostró los máximos valores de energía cinética turbulenta y disipación turbulenta en el centro de las cavidades escalonadas, que aumenta en la dirección del flujo debido al desarrollo de la capa límite. En un estudio similar, Nikseresht, Talebbeydokhti y Rezaei (2013) usaron los modelos de turbulencia del tipo $k - \varepsilon$, $k - \omega$ y de esfuerzos de Reynolds para analizar el campo de flujo rasante en un vertedero escalonado de pendiente 1H:1V, y validaron los resultados con las mediciones de Chinnarasri y Wongwises (2006). Los autores reportaron vórtices de recirculación ocupando la totalidad de las cavidades escalonadas, con valores negativos de presión cerca de la esquina superior de las contrahuellas. Consideraron estos puntos posiciones críticas por ser más propensas al fenómeno de cavitación. Medhi, Singh, Thokchom y Mahapatra (2019) estudiaron las distribuciones de velocidad en las regiones de flujo aireado y no aireado, también para una pendiente 1H:1V, mediante técnicas experimentales de procesamiento de imágenes, y modelación numérica CFD con el modelo $k - \varepsilon$. Los resultados de los autores mostraron a mayor caudal el desplazamiento del PIA aguas abajo, lo que implica una mayor longitud de la región no aireada. En general, las máximas velocidades en el campo de flujo coincidieron aproximadamente con una profundidad intermedia, cercana al pseudofondo.

Las anteriores son solo algunas de las investigaciones reportadas en la literatura, presentadas por tener estructuras escalonadas con pendiente similar a la que se analizará en el presente estudio, o por usar metodologías equivalentes, por lo que servirán como punto de comparación para los resultados aquí obtenidos. El flujo rasante es, en

general, una temática madura en el estado del arte, que se ha estudiado ampliamente desde el siglo anterior, por lo que en la última década, los esfuerzos investigativos se han centrado en variaciones geométricas del fondo escalonado. Es el caso de Zare y Doering (2012), quienes analizaron el efecto de aristas redondeadas en las puntas de los escalones, o de Arjenaki y Sanayei (2020), quienes compararon el flujo sobre escalones típicos de huella horizontal, con casos de huella inclinada en la dirección transversal al flujo. En el presente artículo, por ejemplo, se considerará la variación progresiva de la longitud de la huella para conformar curvas verticales escalonadas a la entrada y salida del canal.

Al respecto de esta temática de estudio, es típico en el diseño de vertederos lisos recurrir en la entrada a una curva convexa que se ajuste a la trayectoria del flujo al desprenderse de la cresta superior y, a la salida, una cóncava, para minimizar las presiones ejercidas en el fondo del canal (Bureau of Reclamation, 1987). Aun así, en la revisión de literatura se encuentran pocos estudios que aborden la hidrodinámica del flujo en una configuración escalonada que se ajuste a este tipo de curvas. En primer lugar, Tabbara, Chatila y Awwad (2005) analizaron el flujo rasante en un vertedero escalonado de alta pendiente con curvas convexa y cóncava a la entrada y salida, respectivamente, mediante modelación numérica basada en el modelo de turbulencia $k - \epsilon$. En ambas se reportaron perfiles de profundidad de flujo de forma curveada, similar a la del pseudofondo, y vórtices de recirculación ocupando la totalidad de los escalones, independientemente de la relación entre los tamaños de huella y contrahuella. Además, los máximos valores de presión se reportaron en la fracción final de las huellas. Cabe aclarar que los autores

no concluyeron respecto a diferencias significativas del flujo en ambas curvas. En los estudios de Attari y Sarfaraz (2012); Sarkardeh, Marosi y Roshan (2015); Henrique-Povh y Junji-Ota (2019), y Dalili-Khanghah y Kavianpour (2020) se consideró únicamente la curva convexa a la entrada y la importancia de incluir en ella escalones en transición (con magnitudes incrementales aguas abajo), para prevenir la ocurrencia de saltos de flujo en el paso de la curva al tramo recto del vertedero. Además, al comparar una curva escalonada con una lisa se encontraron para la primera menores velocidades del flujo en el tramo inicial del aliviadero y menor riesgo de cavitación aguas arriba del PIA.

Por último, las investigaciones de Ashoor y Riazi (2019), y Zuhaira, Al-Hamd, Alzabeebee y Cunningham (2021) son las más similares a nuestro trabajo, pues analizaron comparativamente el flujo rasante en vertederos escalonados con forma cóncava y convexa. Sin embargo, consideraron la totalidad de la estructura con una de las dos formas, mientras en el presente estudio ambas curvas verticales se repartieron en la entrada y la salida del mismo canal. En contraste a Tabbara *et al.* (2005), los autores reportaron diferencias relevantes entre ambas configuraciones del fondo, por ejemplo, se describió nuevamente la superficie libre del flujo con una forma similar a la geometría curvada del vertedero, pero encontraron una cámara de aire solamente en el primer escalón del caso cóncavo. Ello demostró la importancia de una curva convexa a la entrada para prevenir el desprendimiento del flujo. Además, para adaptar los escalones a las curvas se requirieron huellas más largas en el tramo final del fondo cóncavo y más cortas en el convexo. Este detalle implicó vórtices de mayor magnitud en el primero,

que propiciaron una mayor disipación de energía y, en consecuencia, menor velocidad a la salida de la estructura. Así quedó en evidencia el rol decisivo de la fracción de cada escalón que es ocupada por el flujo recirculatorio, y por ende también de la fracción remanente ocupada por el flujo readherido, en la magnitud de las variables hidrodinámicas en los escalones.

A la luz de los resultados de la literatura y los vacíos del conocimiento previamente reportados, y dado el régimen de flujo rasante en un canal escalonado de alta pendiente con tres tramos: una curva convexa a la entrada, una rampa recta intermedia, y una curva cóncava a la salida, en este artículo se analizaron por primera vez las diferencias en la hidrodinámica del flujo en estas tres regiones, distribuidas a lo largo de una misma estructura escalonada. Para esto, los objetivos del presente estudio se definieron así: 1) analizar la fracción de los escalones ocupada por la región de vórtices vs. la de flujo readherido; 2) definir la diferencia en la distribución de la velocidad, la presión, la vorticidad y las estadísticas de la turbulencia en dichas regiones; y 3) comparar la hidrodinámica del flujo en los tres tramos del canal con base en las variables de los objetivos 1 y 2.

Materiales y métodos

Información experimental

Los datos experimentales para validación del modelo numérico se obtuvieron de las mediciones reportadas por Hunt y Kadavy (2010a), y Hunt y Kadavy (2010b). En la Figura 1 se muestra el montaje

experimental, el cual consta de un canal con un ancho de 1.83 m, una cresta ancha de 2.40 m de longitud, y un tramo escalonado de 6.10 m de longitud medidos sobre la horizontal. La caída vertical total es de 1.5 m, con escalones de huellas de longitud l de 152 mm, y contrahuellas de altura h de 38 mm, que equivalen a una pendiente media de 4H:1V. El canal descarga finalmente a un cuenco de aquietamiento de 2.3 m de longitud. Para la toma de datos se utilizó un caudal unitario q de 0.28 m³/ms, y se definieron puntos de aforo sobre el eje del canal en las siguientes abscisas (absc.): 0.00, 0.61, 1.22, 1.83, 3.05 (corresponde al PIA), 3.66, 4.27 y 4.88 m.

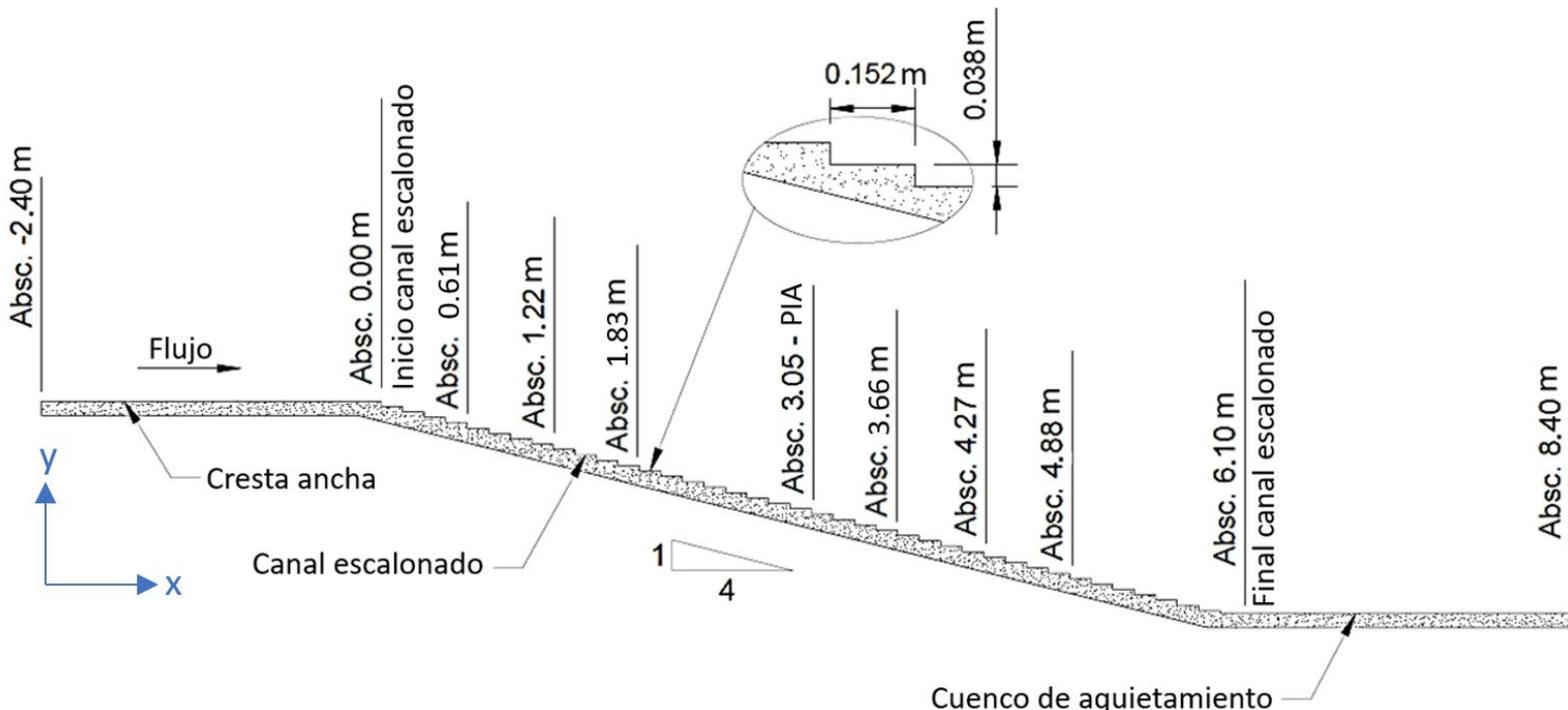


Figura 1. Geometría del prototipo experimental de canal escalonado.

Fuente: Hunt y Kadavy (2010a, 2010b).

Para la medición de la velocidad instantánea del flujo se utilizó un velocímetro acústico o “Acoustic Doppler Velocimeter” (ADV), un tubo Pitot (TP) acoplado a un transductor de presión diferencial, y una sonda de fibra óptica (FO). El uso del ADV estaba limitado a una velocidad máxima de 4.6 m/s (Hunt & Kadavy, 2010a), por lo que fue empleado aguas arriba del PIA. El TP no tenía la limitación del ADV, por lo que fue usado en toda la longitud del canal. Sin embargo, la principal fuente de error en la medición de la presión es la presencia de altas concentraciones de aire en el flujo (Matos, Frizell, André, & Frizell, 2002). Como verificación se utilizó entonces la FO aguas abajo de la absc. 3.05 m, ya que funciona adecuadamente en zonas con una gran fracción volumétrica de aire.

Configuración del modelo numérico para la validación

Modelos y ecuaciones

El *software* OpenFOAM fue utilizado para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds (RANS). Las ecuaciones de continuidad y de conservación del momento lineal para flujo incompresible en dos dimensiones (2D) son la Ecuación (1) y la Ecuación (2), respectivamente:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) \quad (2)$$

Donde U_i es el vector velocidad del flujo medio; los subíndices $i, j = 1$ o 2 , las dos dimensiones en el espacio (x, y) ; x_i , el vector dirección; t , el tiempo; P , la presión estática del flujo medio; g_i , el vector gravedad $(0, -9.81)$ m/s²; ρ , la densidad del fluido; μ , la viscosidad dinámica; u'_i , el vector velocidad del flujo para las fluctuaciones turbulentas, y $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ es el tensor de esfuerzos de Reynolds. El flujo puede considerarse bidimensional si el ancho de la corriente es mayor de 5 a 10 veces la altura de la lámina de agua (Sotelo-Ávila, 2002). Como el ancho del canal escalonado es aproximadamente 18 veces la profundidad promedio del flujo registrada en la campaña experimental, las ecuaciones 2D resueltas a lo largo del plano central entre los muros laterales son adecuadas para la modelación.

El modelo de turbulencia seleccionado fue RNG $k - \varepsilon$, el cual se deriva a partir de una técnica matemática denominada *grupo de renormalización* (RNG). Aplica la hipótesis de Boussinesq para la viscosidad turbulenta (μ_T), tal que esta última se asume como un coeficiente de proporcionalidad entre el tensor de esfuerzos de Reynolds y los gradientes de velocidad del flujo medio; así como en el modelo estándar $k - \varepsilon$, se resuelven dos ecuaciones adicionales para el transporte de la energía cinética turbulenta (k) y de la tasa de disipación (ε), que corresponden a la Ecuación (3) y la Ecuación (4), respectivamente:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \varepsilon \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - R_\varepsilon^* \quad (4)$$

Donde $\sigma_k = \sigma_\varepsilon = 0.71942$ son los números de Prandtl efectivos para k y ε , respectivamente; P_k , la producción de k ; $C_{1\varepsilon} = 1.42$, una constante derivada analíticamente con la teoría RNG; R_ε^* , un término adicional respecto al modelo estándar, que mejora el desempeño en flujos rápidamente deformados y con curvatura en las líneas de corriente (Escue & Cui, 2010).

Estos fenómenos hidrodinámicos son típicos de los vórtices de recirculación presentes en el flujo rasante, en las cavidades entre huella y contrahuella de los escalones, así como en la corriente principal en la zona de impacto con el tramo final de la huella, justo aguas abajo del vórtice. La viscosidad turbulenta se calcula como $\mu_T = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon$, con la constante $C_\mu = 0.0845$, también derivada con RNG. Para mayor detalle respecto a las ecuaciones y términos, se recomiendan los estudios de Yakhot, Orszag, Thangam, Gatski y Speziale (1992), y Orszag, Yakhot, Flannery y Boysan (1993), quienes propusieron el modelo.

Para el modelado de la superficie libre del agua se aplicó el modelo de volúmenes de fluidos (VOF) propuesto por Hirt y Nichols (1981), el cual agrega un término extra (F_s) a la Ecuación (2) para tener en cuenta la tensión superficial en la interfase agua-aire. Además, ρ se reemplaza

por la densidad de la mezcla (ρ_m). F_s y ρ_m se presentan en la Ecuación (5) y la Ecuación (6), respectivamente:

$$F_s = \int_{s'} \sigma k' n' \delta(x - x') ds' \quad (5)$$

$$\rho_m = \alpha \rho_l + (1 - \alpha) \rho_g \quad (6)$$

Donde s' es la superficie libre; σ , el coeficiente de tensión superficial entre el agua y el aire; k' , la curvatura de la superficie libre; n' , el vector unitario normal a la superficie libre; $\delta(x - x')$, la función delta Dirac, siendo x la coordenada en la que se evalúa la función; x' , un punto en la superficie libre para garantizar que solo allí se suma F_s ; α , la fracción volumétrica del agua y se define como la relación entre el volumen de la celda (área en 2D) ocupada por este líquido y su volumen total; ρ_l , las densidades de las fases agua; ρ_g , las densidades de las fases aire.

Adicionalmente, se resuelve la Ecuación (7) de transporte para α :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + U_j \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial (U_{jc} \alpha (1 - \alpha))}{\partial x_j} = 0 \quad (7)$$

Donde el tercer término al lado izquierdo de la ecuación tiene la función de comprimir la superficie libre, ya que $\alpha(1 - \alpha)$ asegura que solo se active en esta región del flujo. El vector velocidad de compresión (U_{jc}) en OpenFOAM está acotado por la magnitud del vector velocidad en las

caras de las celdas ($|U_{jf}|$), máxima en el campo de flujo, y su dirección está alineada con el vector normal a la interfase (n_{jf}). Así se garantiza en la Ecuación (8) (Cifani *et al.*, 2016) que el término de compresión solo introduce flujo de α en la dirección normal a la superficie libre:

$$U_{jc} = \left[\min \left(C_\alpha |U_{jf}|, (|U_{jf}|)_{\max} \right) \right] n_{jf} \quad (8)$$

Donde C_α es un coeficiente que define el efecto del término de compresión. Para valores cercanos a 0 se produce una superficie libre difusa, y para valores mayores a 1 se distorsiona y se puede generar inestabilidad numérica. En el presente estudio se utilizó $C_\alpha = 1$.

Para la solución de las ecuaciones se utilizó el solver *interFoam* con el algoritmo de acoplamiento presión-velocidad PISO. En este último, la Ecuación (1) de continuidad discretizada mediante el método de volúmenes finitos es adaptada como una ecuación de presión, con el objetivo de realizar la corrección del momento dos veces. Para mayor detalle de la implementación del algoritmo PISO en OpenFOAM, se recomiendan las notas de Greenshields y Weller (2022). La aplicación de factores de subrelajación no fue necesaria.

Malla de cómputo y condiciones de frontera

En la Figura 2 se presentan las fronteras del dominio geométrico del modelo y la malla de cómputo utilizada. Las condiciones iniciales (CI) y

de frontera (CF) aplicadas a los límites de la Figura 2a se describen a continuación.

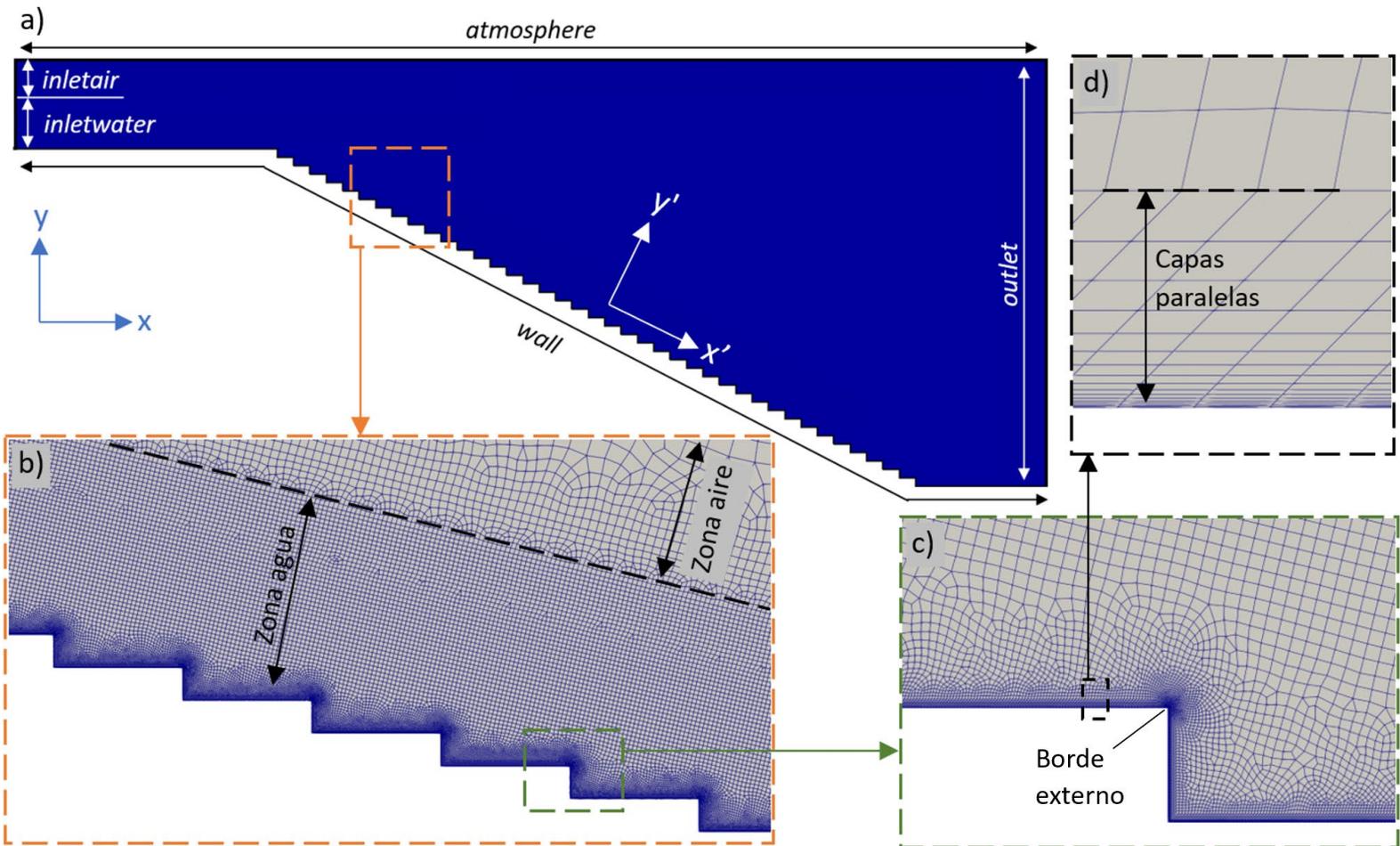


Figura 2. a) fronteras y geometría del modelo numérico para la validación, b) malla de cómputo en la zona de agua y zona de aire, c) detalle de la malla en los escalones, d) capas paralelas al fondo.

- **Velocidad:** en *inletwater* se aplica un vector velocidad de entrada de agua de $(1.21, 0)$ m/s, que en la altura de la frontera de 0.23 m

produce el mismo q experimental de $0.28 \text{ m}^3/\text{ms}$. En *inletair* y *atmosphere* se aplicó la CF *pressureInletOutletVelocity*, la cual se combina con *totalPressure* para la presión, en límites atmosféricos en los que puede haber flujo de entrada, pero se desconoce su velocidad. Esta CF especifica gradiente cero para la velocidad (Greenshields, 2022). En *outlet* se definió la CF *inletOutlet*, que define gradiente cero para flujo de salida, y un vector velocidad de $(0, 0) \text{ m/s}$ para flujo de entrada. Para *wall* se utilizó la CF *noSlip*, garantizando velocidad cero en el fondo escalonado. La CI definió un vector velocidad $(0, 0) \text{ m/s}$ en todo el dominio interno.

- **Presión:** en *inletwater*, *outlet* y *wall* se definió la CF *fixedFluxPressure*, la cual es equivalente a gradiente cero, pero ajusta el gradiente de presión tal que el flujo en la frontera se ajuste a la CF de velocidad. Es útil en casos en los que las ecuaciones de solución incluyen fuerzas gravitacionales y de tensión superficial (Greenshields, 2022). Los límites *inletair* y *atmosphere* se calcularon con la CF *totalPressure*, tal que para flujo de salida la presión manométrica es la atmosférica (p_o) de 0 Pa , y para flujo de entrada es $p_o - 0.5\rho U_n^2$, donde U_n es la magnitud de la velocidad normal de entrada (no hay velocidad tangencial). Para la CI se asumió p_o en todo el dominio interno.
- **Turbulencia:** en *inletwater*, los valores de k y ε se definieron con las aproximaciones de la Ecuación (9) (Versteeg & Malalasekera, 2007):

$$k = \frac{3}{2} (U_{ref} T_i)^2, \varepsilon = 0.09^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l}, l = 0.07L \quad (9)$$

Donde U_{ref} es la magnitud de la velocidad en la frontera; T_i , la intensidad de la turbulencia asumida como 3 %; l , la escala de longitud turbulenta, asumida como una función de la longitud característica a la entrada del canal (L); k , $0.002 \text{ m}^2/\text{s}^2$; ε es $0.0009 \text{ m}^2/\text{s}^3$.

En *wall* se estableció la CF *epsilonWallFunction* para ε , la cual determina el valor de la disipación, dependiendo la distancia adimensional a la primera celda (y^+). Si $y^+ < 11$, se utilizan las deducciones para la subcapa viscosa; si $y^+ > 11$, las de la subcapa inercial que se comporta con base en la ley de logaritmos. El valor límite de 11 resulta de la intersección de los perfiles de velocidad en ambas regiones de la capa límite (Greenshields & Weller, 2022). Para el cálculo de y^+ y ε en OpenFOAM se utilizó la Ecuación (10):

$$y^+ = C_\mu^{1/4} \frac{k^{1/2} y_w}{\nu}, \varepsilon = \varepsilon_{vis} = \frac{2\nu k}{y_w^2} \quad (10)$$

Donde y_w es la distancia del centro de la celda a la pared; ν , la viscosidad cinemática del fluido, y ε_{vis} es la disipación en la subcapa viscosa.

No se presenta en este estudio la expresión para $y^+ > 11$, ya que como se describe más abajo en la descripción de la malla, la altura de la primera capa de celdas garantizó una solución completa de la capa límite. Por lo anterior, la CF *nutkWallFunction* para μ_T asumió un valor fijo de cero, dado que la resolución de la malla garantizó flujo laminar cerca a la

pared. Para k se aplicó la CF $kqRWallFunction$, que equivale a gradiente cero. En el resto de las fronteras se definió la CF *inletOutlet* para k y ε , y para la CI se aplicaron en todo el dominio los mismos resultados obtenidos para la entrada con la Ecuación (9).

- **Fracción volumétrica de agua:** en *inletwater* se definió un valor de α de 1. Para las fronteras de aire se definió la CF *inletOutlet* con un valor de entrada de cero, y para el fondo la CF de gradiente cero. Para la CI se asumió α de 0 en todo el dominio, tal que estaba lleno de aire y el agua a punto de entrar por *inletwater*.

La malla de cómputo tuvo dos regiones principales: zona del agua y zona del aire (Figura 2b). La primera tuvo una mayor resolución, pues incluyó el flujo de la corriente principal sobre los escalones, así como la superficie libre. La segunda solamente modela los flujos de aire atmosférico, por lo que se generó con menor resolución, aumentando esta última solo cerca de la frontera con la zona del agua. En los escalones, a menor distancia a la pared, se redujo de forma gradual la magnitud de las celdas y aumentó la resolución en los bordes externos por ser los puntos de mayores gradientes (Figura 2c). En la región colindante con la frontera *wall* y de forma paralela a su geometría se generaron capas de celdas con un factor de crecimiento de 1.3 (relación de altura entre dos capas subsiguientes), a fin de capturar los fenómenos de flujo en la subcapa viscosa y en la región de transición a la subcapa inercial (Figura 2d).

Para establecer las resoluciones se realizó inicialmente un análisis de sensibilidad con tres mallas. En la Tabla 1 se presentan las características principales que las diferencian. La resolución en la zona del

agua hace referencia al tamaño promedio de las caras de las celdas lejos de los escalones (no tiene en cuenta el aumento de la resolución cerca a la pared), y y^+ promedio y máximo resultó de analizar las distancias adimensionales de todas las celdas en la primera capa paralela, adyacente a la frontera *wall* y cuya altura también se incluye en la Tabla 1. El valor del error promedio numérico respecto a la información experimental ($E_{prom.}$) en las abscisas 0.00, 0.61, 1.22 y 1.83 m se calculó con la Ecuación (11):

$$E_{prom} (\%) = \frac{100}{N} \sum_{n=1}^N \left[\frac{(U_{x'-RNG\ k-\varepsilon})_n - (U_{x'-exp})_n}{(U_{x'-exp})_n} \right] \quad (11)$$

Donde n son los puntos de medición en cada abscisa, que aumentan en la dirección y' perpendicular al pseudofondo (ver los ejes en la Figura 2a) hasta el punto más lejano a la pared (N); $U_{x'-RNG\ k-\varepsilon}$ la velocidad del flujo calculada por el modelo numérico con $RNG\ k - \varepsilon$ para la turbulencia; y $U_{x'-exp}$ es la medida en la campaña experimental con TP, ADV y FO, todas en la dirección x' .

Tabla 1. Análisis de sensibilidad de malla del modelo numérico para la validación.

Mallas	Número total de celdas	Resolución zona de agua (m)	Altura primera capa paralela (m)	y^+ promedio	y^+ máximo	E_{prom} absc. 0.00 m (%)	E_{prom} absc. 0.61 m (%)	E_{prom} absc. 1.22 m (%)	E_{prom} absc. 1.83 m (%)
Malla 1	500 241	5.00E-03	1.00E-05	0.4	1.9	1.4	3.9	3.9	5.0
Malla 2	191 531	7.00E-03	5.00E-05	1.8	5.2	2.0	4.2	3.7	5.1
Malla 3	125 822	9.00E-03	1.00E-04	3.6	8.7	2.0	4.4	3.8	5.2

Solo se analizaron las abscisas en la zona no aireada, pues el modelo numérico no capturó la inserción de aire aguas abajo del PIA. En este estudio se considera que la selección de la malla se debe basar en el análisis de los resultados en comparación con las mediciones experimentales en la zona en que el modelo numérico logra capturar fielmente las características del flujo rasante.

Los errores promedio obtenidos demuestran que en los tres casos los resultados numéricos son independientes de la resolución de malla. La principal diferencia se da en la abscisa 0.00 m para la malla 1 respecto a la 2 y la 3; pero conforme el flujo avanza hacia el PIA, E_{prom} se vuelve aproximadamente igual para las tres mallas. En la Figura 3a se presentan los perfiles de velocidad numéricos en la abscisa 1.83 m, junto con las mediciones con TP. En la Figura 3b y c, se puede observar a una escala ampliada el comportamiento de las tres resoluciones de cómputo en las zonas encerradas por los paneles señalados en la Figura 3a.

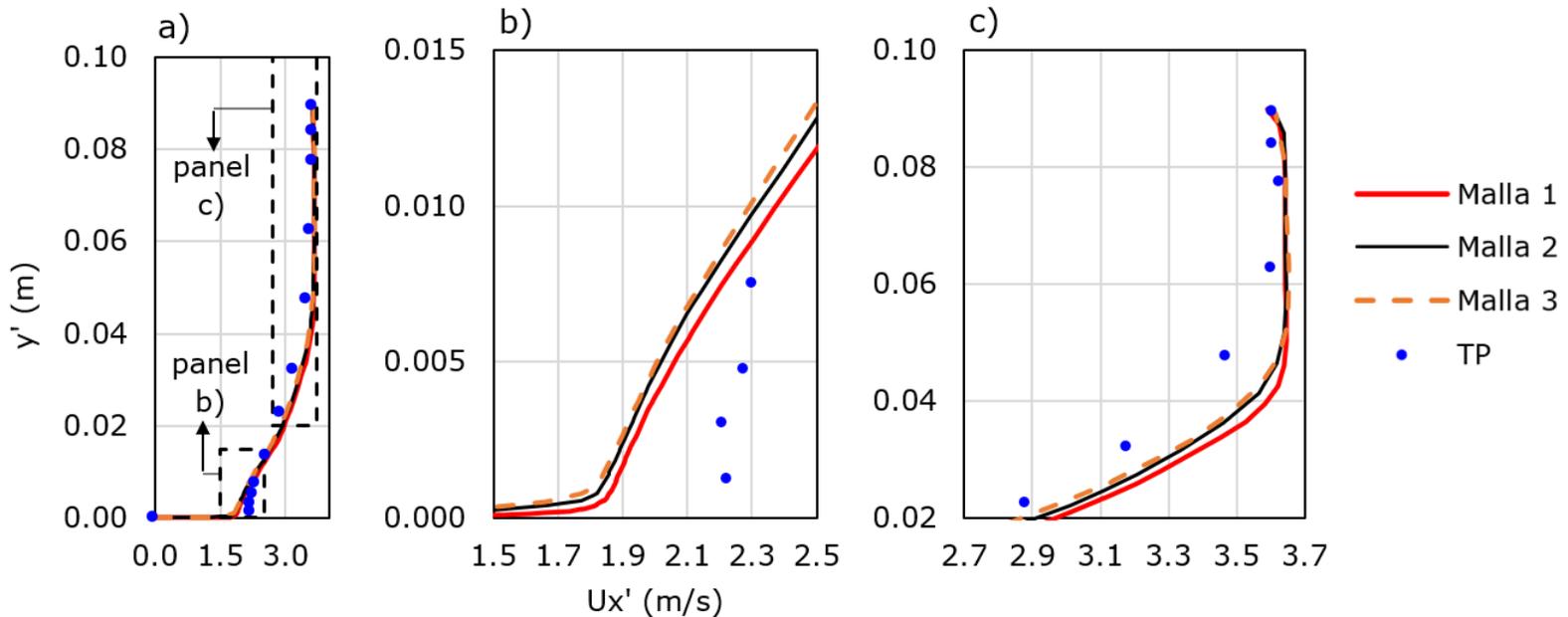


Figura 3. a) Perfiles de velocidad experimental y numéricos para las tres mallas en la abscisa 1.83 m; b) detalle del perfil de velocidades cerca al fondo; c) detalle del perfil de velocidades en la corriente principal.

Cerca del fondo escalonado (Figura 3b), el modelo numérico subestima la velocidad del flujo y la diferencia respecto a las mediciones es menor para la malla más fina. Más lejos de la pared, en la zona de gradientes de velocidad de la corriente principal (Figura 3c), la velocidad del modelo numérico es mayor a la experimental y, contrario a lo mostrado cerca al pseudofondo, la diferencia es mayor para la malla 1. Más cerca de la superficie libre, fuera de la capa límite, las tres mallas convergen al mismo resultado. Finalmente se puede afirmar que aunque

en la mayoría de abscisas se obtuvo un E_{prom} menor para la malla de mayor resolución, no hay una diferencia considerable entre los tres resultados numéricos. Este comportamiento es similar en las demás abscisas aguas arriba, por lo tanto no amerita incluirlas en la Figura 3.

Debido a lo discutido anteriormente, la selección de la malla no se basa en E_{prom} sino en los valores de y^+ promedio y máximo. Con el fin de obtener una modelación completa de la capa límite, la malla debe tener celdas lo suficientemente delgadas cerca de la pared para resolver el flujo en la subcapa viscosa (región delimitada por $y^+ < 5$). Para lo anterior se recomienda en la primera capa un $y^+ \sim 1$ (Greenshields & Weller, 2022). A pesar de que el valor promedio en las mallas 2 y 3 se encuentra dentro de la región de flujo laminar, el valor máximo no. En consecuencia, se puede afirmar que parte de la frontera con los escalones está en la región de transición a la zona logarítmica (región delimitada por $5 < y^+ < 30$), en la que tanto los esfuerzos viscosos como de Reynolds son importantes (Versteeg & Malalasekera, 2007). Solo la malla 1 puede garantizar la solución de la subcapa viscosa en toda la frontera *wall* (y^+ promedio y máximo < 5), por lo que se seleccionó para las corridas del presente artículo.

Configuración del modelo numérico para el canal escalonado con curvas verticales

Con base en la validación del modelo numérico con los datos experimentales de Hunt y Kadavy (2010a, 2010b), se procedió después a ejecutar una corrida adicional en un canal escalonado con curvas

verticales. Se utilizó el mismo modelo de turbulencia y de flujo multifásico: RNG $k - \varepsilon$ y VOF, respectivamente. En la Figura 4 se presentan los parámetros geométricos del canal. La caída vertical total se mantuvo de 1.5 m aproximadamente, pero se incrementó la pendiente media del tramo recto (1H:1V), con escalones de h y l de 38 mm. Este aumento fue con el fin de obtener las curvas del pseudofondo más pronunciadas (de menor radio) y poder ajustar la geometría de los escalones a las mismas. Para esto se definieron con h constante también de 38 mm, y l variable extendiendo cada huella hasta interceptar la curva. Se seleccionaron para análisis posterior en la sección de resultados los escalones A, B y C en la curva 1 (convexa), y sus correspondientes de igual geometría G, F y E, respectivamente, en la curva 2 (cóncava). Se identificó el D en el tramo recto para efectos de comparación con la zona sin curvas.

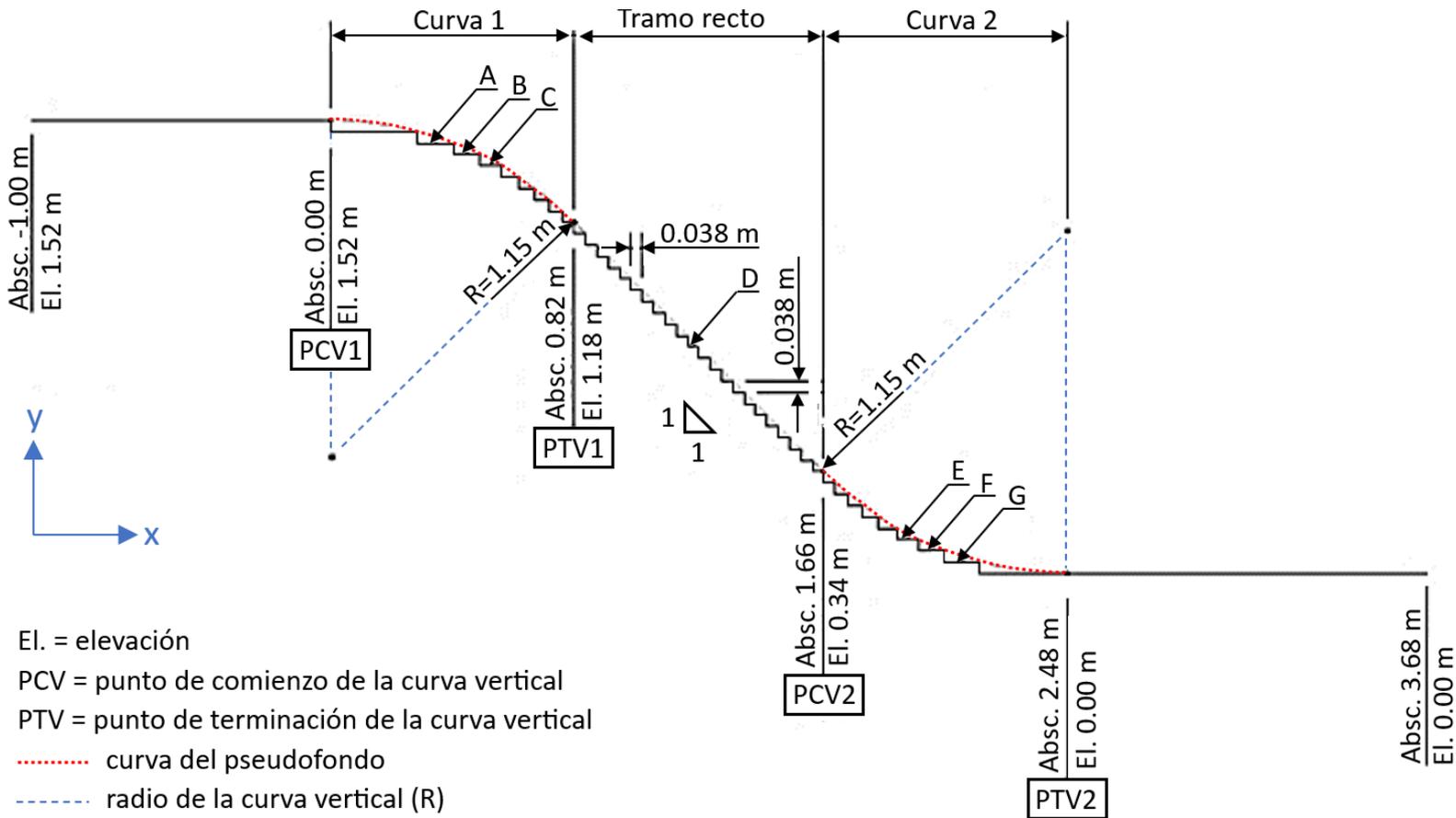


Figura 4. Geometría del canal escalonado con curvas verticales.

Para el diseño de la curva convexa del pseudofondo, el Bureau of Reclamation (1987) recomienda que el fondo describa una forma ligeramente más plana que la de la trayectoria del chorro libre, lanzado con una cabeza igual a la energía específica de la corriente al iniciar la curva. Para la geometría propone la Ecuación (12):

$$-y = x \tan \theta + \frac{x^2}{K[4(d+h_v) \cos^2 \theta]} \quad (12)$$

Donde θ es el ángulo de inclinación del fondo del canal aguas arriba de la curva; K , un factor que debe ser igual o superior a 1.5 para garantizar presiones positivas distribuidas en toda la superficie de contacto de la curva y evitar la separación del flujo; h_v , la cabeza de velocidad, y d es la profundidad del flujo en el PCV.

Para la curva cóncava, la recomendación de diseño se basa en un radio suficiente para minimizar las fuerzas dinámicas producidas en el fondo por el cambio en la dirección del flujo. Radios mayores o iguales a cinco veces la profundidad del flujo se consideran aceptables (Bureau of Reclamation, 1987). Se seleccionó $R = 1.15 \text{ m}$ (Figura 4) en función de la máxima profundidad del flujo en la entrada del canal (0.23 m), cumpliendo con la recomendación para la curva 2, y aproximándose a la trayectoria descrita por la Ecuación (12) para la curva 1.

En la Figura 5a se presentan las fronteras del dominio geométrico del modelo. Las CI y CF aplicadas a los límites fueron las mismas validadas en el modelo previo. La malla de cómputo presentada en la Figura 5b-d se generó también con base en los mismos parámetros del modelo para la validación. Se obtuvo un número total de celdas de 393 239, conservando la misma resolución en la zona del agua de $5.00\text{E}-03 \text{ m}$. Aunque $q = 0.28 \text{ m}^3/\text{ms}$ es el mismo, la velocidad del flujo y el esfuerzo cortante en la pared aumentan debido a la mayor pendiente en el canal escalonado con curvas. Por lo anterior fue necesario disminuir la altura de la primera capa paralela: $5.00\text{E}-06 \text{ m}$, para garantizar la modelación de la subcapa viscosa (y^+ promedio y máximo de 0.2 y 1.3, respectivamente).

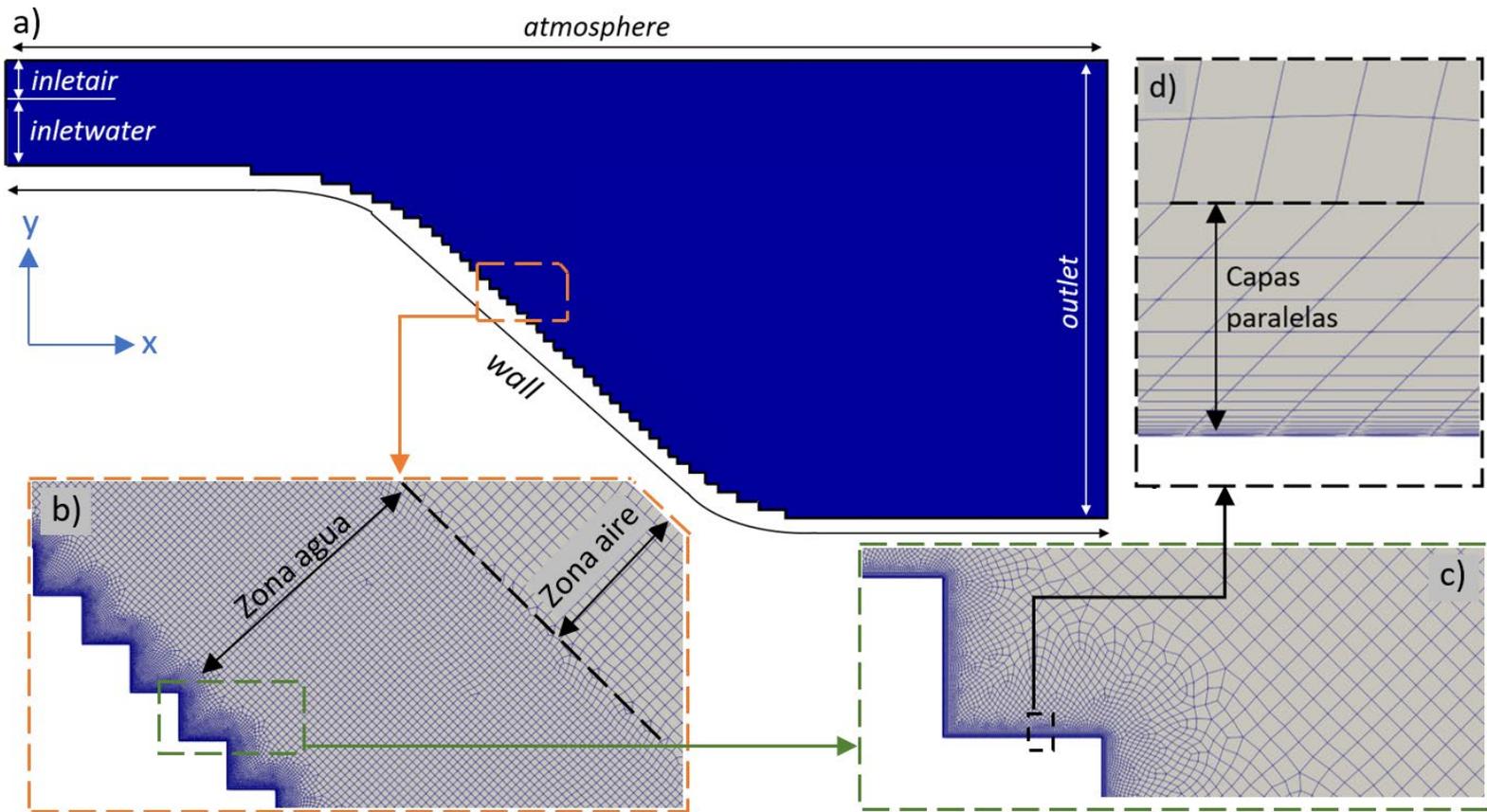


Figura 5. a) fronteras y geometría del modelo numérico con curvas verticales, b) malla de cómputo en la zona de agua y zona de aire, c) detalle de la malla en los escalones, d) capas paralelas al fondo.

Resultados y discusión

Los resultados corresponden a la condición final de flujo permanente, la cual se alcanza un tiempo después de que el flujo sale por la frontera *outlet*, suficiente para que las variables hidrodinámicas se estabilicen.

Validación del modelo numérico

En las Figuras 6a y 6b se presentan los perfiles de velocidad numéricos con el modelo de turbulencia RNG $k - \varepsilon$, aguas arriba y aguas abajo del PIA, respectivamente, junto con las mediciones con TP, ADV y FO. En general, en las abscisas aguas arriba del PIA se observa un buen ajuste de los datos numéricos a los datos experimentales. En la abscisa 0.00 m, el modelo numérico logra capturar la forma y magnitud del perfil de velocidades del flujo medio en toda la distancia y' . Entre las abscisas 0.61 y 3.05 m, cerca del fondo, para valores de y' menores a aproximadamente 0.01 m (26 % de h), los resultados numéricos subestiman los datos experimentales. Lejos del fondo, en las zonas de bajo gradiente de velocidad (por fuera de la capa límite), el ajuste es satisfactorio en todas las estaciones. Sin embargo, en la abscisa 3.05 m, se observa por primera vez gradiente de velocidades en todo el rango de y' , lo cual indica la intercepción de la capa límite con la superficie libre. Lo anterior coincide con el reporte experimental del PIA. Similar a lo mostrado en la Figura 6a y Tabla 1, Bombardelli *et al.* (2011) también obtuvieron un aumento en el error numérico respecto a las mediciones a medida que el flujo se aproximaba al PIA, reportando un E_{prom} de 7 %. El ajuste en el presente estudio es un poco mejor, al obtenerse un E_{prom} máximo de 5 % en la zona de flujo no aireado.

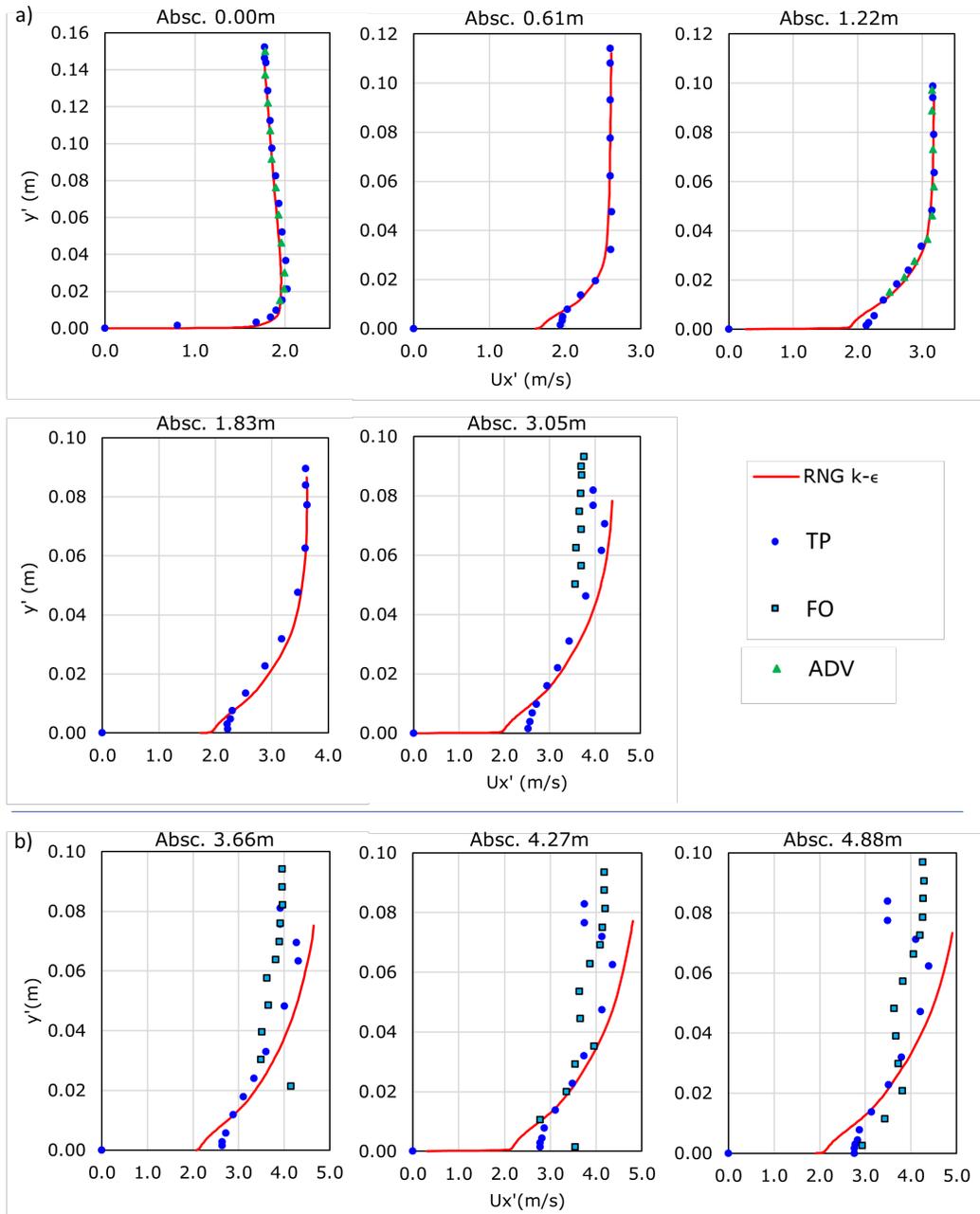


Figura 6. Validación de los perfiles de velocidad del flujo medio para un caudal unitario de $0.28 \text{ m}^3/\text{ms}$ en: a) las abscisas aguas arriba del PIA; b) las abscisas aguas abajo del PIA. Fuente de datos experimentales: Hunt y Kadavy (2010a, 2010b).

En la zona de flujo aireado, aunque los perfiles numéricos capturan la forma de los perfiles experimentales, la calidad del ajuste continúa disminuyendo en la dirección del flujo. Para $y' < 0.01$ m, a mayor distancia aguas abajo, mayor es la subestimación de las mediciones; para $y' > 0.01$ m, mayor es la sobrestimación de la velocidad numérica respecto a la experimental. Esta sobrestimación y menor calidad en el ajuste también fue reportada por Cheng, Luo, Zhao y Li (2004), quienes usaron el modelo de turbulencia $k - \varepsilon$ estándar. El mayor error aguas abajo del PIA se debe a que las corridas numéricas no capturaron la aireación del flujo en dicha región. Esto se puede verificar tanto para el modelo numérico de validación como para el de curvas verticales en la Figura 7, que presenta la variación de α en el espacio. Nótese que para el flujo de agua entre las fronteras *inletwater* y *outlet*, $\alpha = 1$ en todo el dominio. Resultados similares de α fueron reportados por Medhi *et al.* (2019).

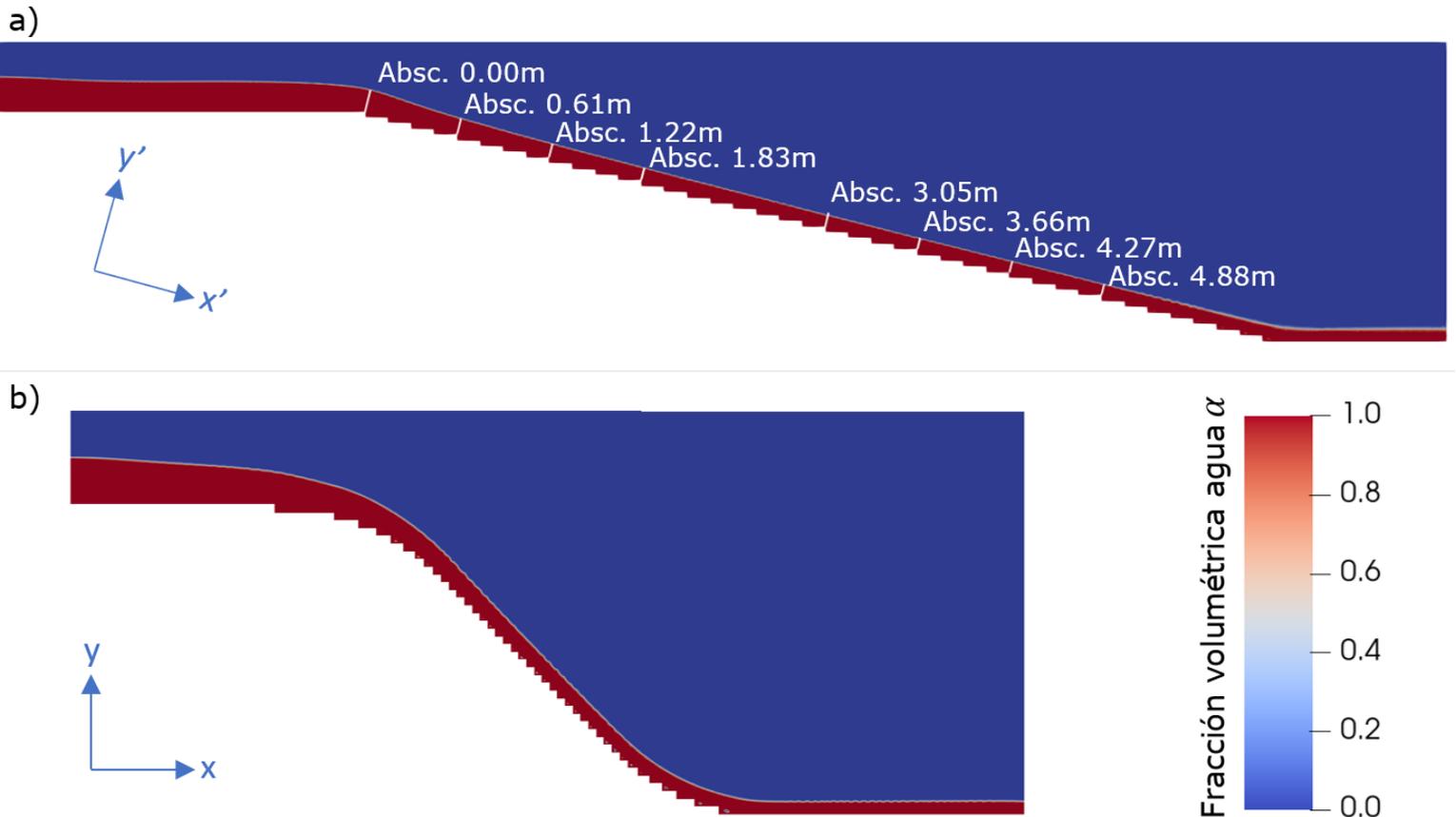


Figura 7. Fracción volumétrica de agua α en: a) modelo numérico para la validación; b) modelo numérico con curvas verticales.

La dificultad para capturar el fenómeno de aireación del flujo fue reportada por Casa, Hidalgo, Castro, Ortega y Vera (2018), quienes aplicaron un submodelo de incorporación de aire mediante el *software* Flow-3D. Cuando una perturbación de magnitud igual a la escala de longitud turbulenta en la superficie libre está asociada con una energía cinética turbulenta por unidad de volumen (P_t), mayor que la energía asociada con las fuerzas estabilizadoras de gravedad y tensión superficial (P_d), el submodelo permite la entrada de un volumen de aire (Hirt, 2003).

Sin embargo, los resultados de Casa *et al.* (2018) para la profundidad del flujo en la región aireada, utilizando también VOF y RNG $k - \varepsilon$, mostraron una gran dependencia de la resolución de la malla, y errores que aumentaron hasta más del 100 % respecto a la información experimental, a medida que se disminuía el tamaño de la celda.

En simulación con grandes “eddies” (LES), las estructuras más grandes se resuelven directamente mientras que las más pequeñas se modelan. Se basa en la idea de que el momento, la masa y la energía se transportan principalmente por los “eddies” de mayor tamaño, que varían en función de la geometría y las condiciones de frontera del flujo analizado. Los “eddies” pequeños, por otro lado, tienden a ser más isotrópicos y universales (Ansys Inc., 2022). Al no aplicarse el filtro temporal típico de los modelos promediados por Reynolds, como el RNG $k - \varepsilon$ del presente estudio, se obtienen las fluctuaciones de velocidad de las estructuras del flujo de mayor escala, lo cual resulta en diversas ventajas para el modelado del flujo rasante. Por ejemplo, permite capturar la anisotropía de la turbulencia (lo cual no es posible con la hipótesis de Boussinesq), por lo que se predicen mejor los flujos con cambios repentinos en la tasa de deformación media, con separación de la capa límite, flujos sobre superficies curvas, fluidos en rotación y flujos tridimensionales (Wilcox, 2006). Todas las anteriores, características típicas en canales escalonados con curvas verticales. Además, los resultados obtenidos por Zhan, Zhang y Gong (2016) para la modelación del flujo rasante mediante el modelo Euleriano de Chahed, Roig y Masbernat (2003) para el flujo multifásico, combinado con RNG $k - \varepsilon$, mostraron resultados similares a los de la Figura 7. No obstante, al utilizar

LES para la turbulencia, una inspección cualitativa de la animación del Apéndice A de dicha referencia permite observar cómo las fluctuaciones instantáneas en la superficie libre contribuyen al atrapamiento de aire, fenómeno suprimido por la promediación de Reynolds en la Figura 7. La comparación de los perfiles numéricos de α con los experimentales mostraron resultados satisfactorios. Por lo tanto, dentro de los planes para futuras investigaciones, el grupo de trabajo de este artículo pretende analizar curvas verticales escalonadas en la región aireada utilizando LES.

Otro detalle para remarcar en las Figuras 6a y 6b es que de la abscisa 1.83 m hacia aguas abajo, incluyendo el flujo aireado, los datos experimentales con TP muestran cerca del fondo una velocidad aproximadamente constante. Este comportamiento fue reportado previamente de forma experimental por Boes y Hager (2003), y Gonzalez (2005), y de forma numérica para la región no aireada por Bombardelli *et al.* (2011). Sin embargo, las modelaciones numéricas del presente estudio no lo capturan de forma adecuada a pesar de aplicarse una modelación completa de la capa límite. Este comportamiento puede estar asociado con una subestimación de μ_T en el modelo RNG $k - \varepsilon$, que limita el transporte turbulento de flujo con mayor momento desde las zonas más alejadas de la pared hacia el fondo escalonado, causando una subestimación de la velocidad. Aun así, Bombardelli *et al.* (2011), a pesar de usar el mismo modelo de turbulencia, reportaron el fenómeno contrario: sobrestimación de la velocidad. La simplificación del flujo a una condición 2D y de la turbulencia a una condición promediada por Reynolds puede influir también al no capturar las estructuras de flujo tridimensionales ni la influencia de la anisotropía del tensor de esfuerzos

de Reynolds (ver la diferencia en las estructuras recirculantes del flujo, capturadas mediante un modelo LES vs. un RANS por Zhan *et al.* (2016)). Se recomienda más investigación para dar claridad al respecto.

Presión y tasa de disipación turbulenta en el canal con curvas verticales escalonadas

Al aplicar la simplificación de Prandtl a la Ecuación (2) de momento en x , para flujo cercano al fondo, se asume que el término advectivo es nulo (ya que $U_x \approx U_y \approx 0$), y $\overline{\rho u_i' u_j'}$ también, pues los esfuerzos turbulentos en esta zona son despreciables (Kundu, Cohen, & Dowling, 2012). Se obtiene entonces la Ecuación (13):

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{pared} = \mu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}\right)_{pared} \quad (13)$$

Donde $(\partial P/\partial x)_{pared}$ es el gradiente presión en la dirección x sobre la huella de los escalones; $\mu(\partial^2 U_x/\partial y^2)_{pared}$ es la curvatura del perfil de velocidades del flujo medio (U_x vs. y) cerca de la pared.

El término de la izquierda cumple un rol importante en la dirección del flujo cerca al fondo y la ocurrencia del fenómeno de separación de la capa límite, lo que permite analizar las dos zonas principales en los escalones: separación y readherencia del flujo. Los vectores velocidad en estas dos zonas se ilustran en la Figura 8a para el escalón G en la curva cóncava, y se colorean en función de la relación entre la magnitud de la velocidad (U) y la máxima velocidad en todo el canal (U_{max}). En la Figura

8c se grafica la variación de U_x normalizada por la máxima velocidad positiva en x en el mencionado escalón (U_{x-max}) a lo largo del eje x_l/l . Este último representa la fracción de longitud de la huella, y se calcula como la relación entre la distancia horizontal a la contrahuella (x_l) y la longitud total de la huella. La zona de separación se compone en el tramo inicial de un vórtice de recirculación pequeño (VRP), que se muestra en detalle en la Figura 8b. Allí, U_x/U_{x-max} es positivo en el fondo (ver ampliación en la Figura 8c), y a continuación hay un vórtice grande (VRG) con U_x/U_{x-max} negativo. La zona de readherencia inicia justo aguas abajo del punto de readherencia del flujo (PRF), donde la corriente principal impacta con la huella y continúa hacia aguas abajo en el mismo sentido del eje x_l/l .

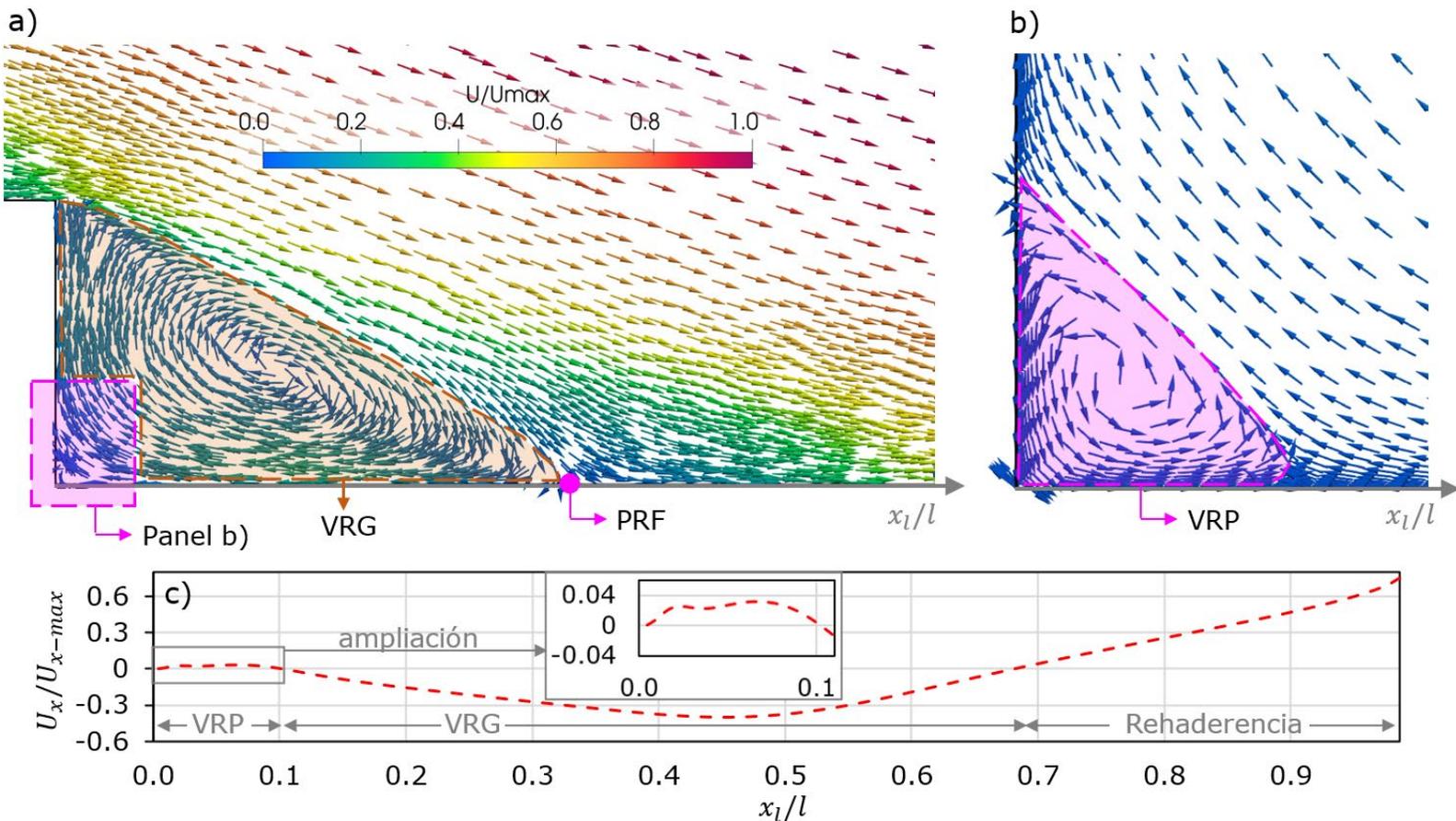


Figura 8. a) Vectores velocidad del flujo; b) detalle del VRP; c) U_x/U_{x-max} a lo largo de la huella, a una distancia del fondo de $2.50E-06$ m. Resultados correspondientes al escalón G.

Las velocidades en la zona de separación son las más bajas, correspondientes a menos del 20 % de U_{max} , y en la de readherencia son mayores aumentando hasta un 40 %. Las máximas velocidades del flujo se dan por encima del pseudofondo en la corriente principal (> 40 % de U_{max}), similar a los resultados de Arjenaki y Sanayei (2020) para un canal escalonado 3D modelado también con RNG $k - \varepsilon$.

La existencia de las zonas de separación y readherencia fue discutida previamente por Chanson (1994) y Llano (2003), quienes identificaron tres subregímenes de flujo rasante. El SK1 para $h/l < 0.27$, en el cual la frontera exterior del VRG impacta en la zona intermedia de la huella y que corresponde al mostrado en la Figura 8. El SK2 para $0.27 < h/l < 0.47$, en el cual los vórtices de recirculación de escalones adyacentes interactúan entre sí y ocupan la totalidad de las huellas (las zonas de readherencia desaparecen). Finalmente, el SK3 para $h/l > 0.47$, en el cual la zona de separación se compone de vórtices más estables y ocupa también todo el escalón, pero sin interactuar con el flujo de escalones vecinos. Los resultados de la Figura 8 concuerdan con los vectores de velocidad reportados por Medhi *et al.* (2019) para el VRG, sin embargo, estos no reportan el VRP. En la Figura 8a se evidencia la proximidad de este a la pared, por lo que la resolución de la malla cerca al escalón, $y^+ \sim 1$ en este estudio vs. $30 < y^+ < 300$ en el de Medhi *et al.* (2019) es una posible explicación de las condiciones numéricas necesarias para capturarlo. Wang, Wu y Zhu (2019) mostraron la existencia de este vórtice experimentalmente mediante velocimetría de imagen de partículas (PIV), y encontraron un buen ajuste numérico mediante simulación numérica directa y LES, pero un vórtice más pequeño mediante $k - \varepsilon$. Por lo tanto, el modelo de turbulencia seleccionado también puede influir en la representación adecuada y captura de este fenómeno del flujo.

Para la totalidad de los escalones seleccionados (A-G en la Figura 4), en las Figuras 9a y 9b se muestra la variación de $(\partial P / \partial x)_{pared}$ y de la tasa de disipación de energía cinética turbulenta (ε_{pared}),

respectivamente, a lo largo de x_l/l . Lo anterior, para analizar la fracción de los escalones ocupada por la región de vórtices vs. la de flujo readherido, y la diferencia en la distribución de la disipación en esas regiones, haciendo énfasis en la comparación de dichas características entre la curva convexa, el tramo recto y la curva cóncava. En la Figura 9a, para los menores valores de x_l/l se observa un primer gradiente de presión favorable ($(\partial P/\partial x)_{pared} < 0$), identificado como la zona de influencia del vórtice pequeño (ZI-VRP). El sentido positivo del flujo en la huella respecto al eje x_l/l , que hace que el VRP gire en sentido antihorario (ver Figura 8b), se debe al signo del gradiente de presión y se extiende desde la contrahuella hasta aproximadamente el punto de $(\partial P/\partial x)_{pared}$ mínimo de la ZI-VRP. Como referencia, nótese que para G esto es en $x_l/l \approx 0.1$, valor hasta el que efectivamente U_x/U_{x-max} es positivo en la Figura 8c. Aguas abajo, el tramo restante del gradiente favorable es el responsable de que el flujo cerca del fondo del VRG disminuya su velocidad en el sentido negativo de x_l/l . En la región intermedia de la huella se encuentra el gradiente de presión adverso ($(\partial P/\partial x)_{pared} > 0$), identificado como la zona de influencia del vórtice grande (ZI-VRG). El signo del gradiente de presión produce un sentido del flujo en la pared contrario al eje x_l/l y el consecuente giro del VRG en sentido horario.

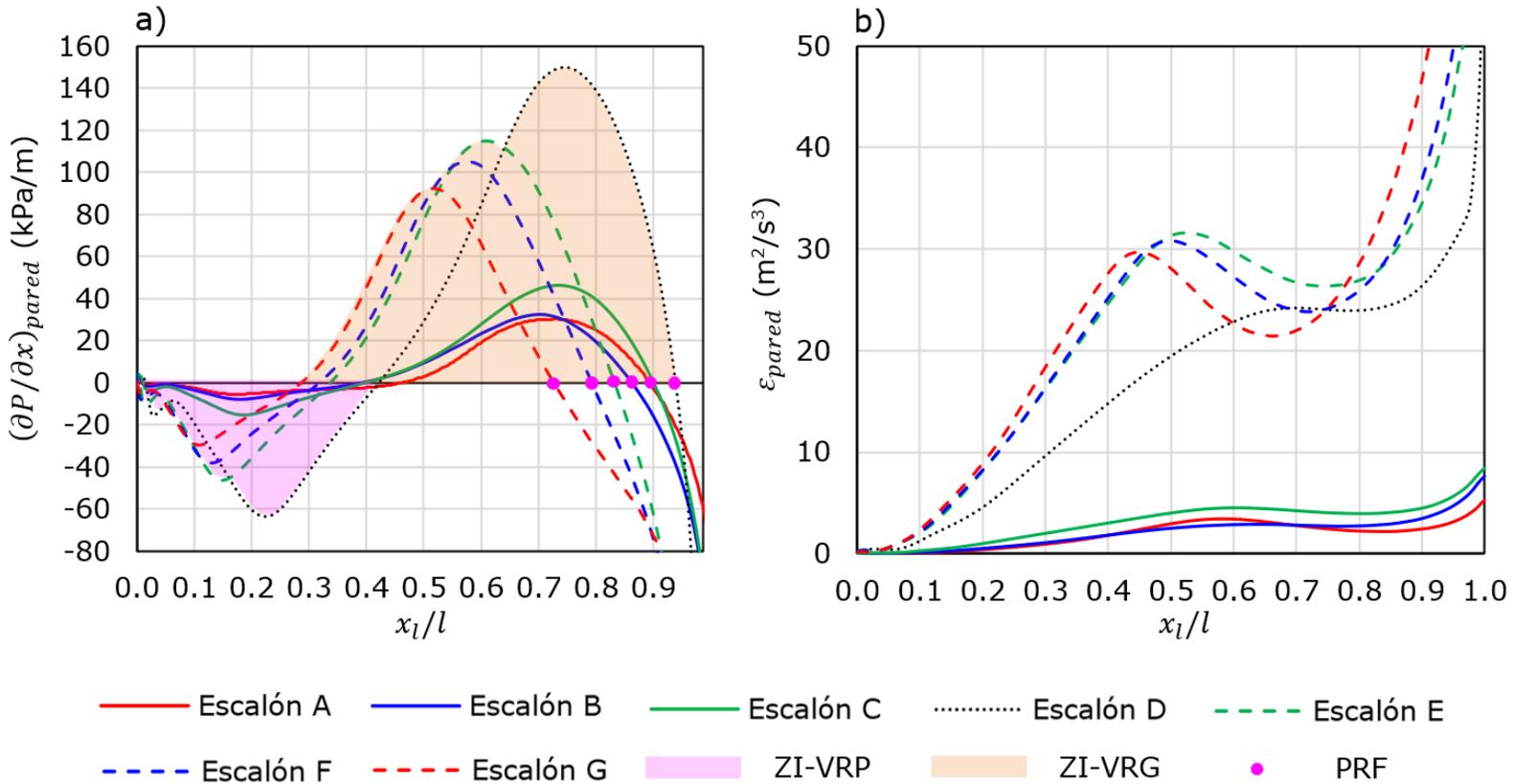


Figura 9. Variación a lo largo de la huella de: a) gradiente de presión, b) disipación. Curva convexa (escalones A, B y C), tramo recto (escalón D) y curva cóncava (escalones E, F y G).

La unión de la ZI-VRP y la ZI-VRG conforma la zona de separación del flujo, que se extiende aproximadamente hasta que $\partial P/\partial x_{pared}$ cruza el eje x_1/l por segunda vez en el PRF. Como referencia, nótese que para G esto es en $x_1/l \approx 0.7$, valor en el que efectivamente U_x/U_{x-max} se hace cero en la Figura 8c. El cambio del gradiente de adverso a favorable produce un punto de estancamiento del flujo, y el inicio de la zona de readherencia que va hasta $x_1/l = 1$. Los resultados de la Figura 9a coinciden con los de Zhan *et al.* (2016) y de Saqib *et al.* (2022), quienes también encontraron

valores de presión decreciente en el sentido de x_l/l en ambos extremos de la huella, y creciente en la zona intermedia. Los primeros autores, así como el presente estudio, asociaron el punto de máxima presión en la huella (que coincide con el segundo cruce de $(\partial P/\partial x)_{pared}$) con la ubicación aproximada del PRF.

En la Tabla 2 se presenta un análisis comparativo de la ocupación de los escalones en las curvas verticales y en el tramo recto por los vórtices de la zona de separación y por la zona de readherencia.

Tabla 2. Análisis comparativo de las zonas de separación y readherencia del flujo en las curvas verticales y el tramo recto.

Escalones A, B y C (región curva convexa)	Escalón D (región tramo recto)	Escalones E, F y G (región curva cóncava)
Zona de separación del flujo		
Los valores mínimo y máximo de $(\partial P/\partial x)_{pared}$ aumentan en el sentido del flujo (A→B→C). Además, son los menores respecto a las otras dos regiones	Zona con los mayores valores mínimo y máximo de $(\partial P/\partial x)_{pared}$.	Los valores mínimo y máximo de $(\partial P/\partial x)_{pared}$ disminuyen en el sentido del flujo (E→F→G). Sus magnitudes son intermedias respecto a las otras dos regiones.
Aproximadamente del 15 al 20 % de la huella es ocupada por el VRP. Su ocupación aumenta en el sentido A → B → C	Un poco más del 20 % de la huella es ocupada por el VRP. Ocupa una mayor fracción que en las curvas verticales	Aproximadamente del 10 al 15 % de la huella es ocupada por el VRP (menor que en las otras dos regiones). Su ocupación disminuye en el sentido E → F → G
El PRF se sitúa aproximadamente del 85 al 90 % de la huella. En el sentido A → B → C, la distancia relativa a la contrahuella, x_l/l , parece variar de forma aleatoria	El PRF se sitúa aproximadamente en el 95% de la huella. x_l/l es mayor que en las curvas verticales	El PRF se sitúa aproximadamente del 70 % a un poco más del 80 % de la huella; x_l/l es la menor respecto a las otras dos regiones, aproximándose más a la contrahuella en el sentido E → F → G
Zona de readherencia del flujo		
Ocupa aproximadamente del 10 al 15 % de la huella	Ocupa aproximadamente el 5 % de la huella. Su ocupación es la menor	Ocupa aproximadamente del 20 al 30 % de la huella. Su ocupación es la mayor

El escalón D con h/l de 1 corresponde, según Llano (2003), a un subrégimen SK3. Corresponde con lo presentado en la Tabla 2, ya que la zona de separación ocupa aproximadamente la totalidad de la huella, pero sin interferir con el vórtice del escalón subsiguiente. La relación h/l de los escalones en la curva convexa A, B y C es 0.32, 0.43 y 0.53, respectivamente, igual a la de los escalones correspondientes en la curva cóncava G, F y E. Según Llano (2003), corresponden a subregímenes SK2 y SK3. Sin embargo, los resultados numéricos corresponden a un SK1, con una zona de readherencia claramente diferenciada. Se demuestra que los rangos de los subregímenes propuestos en la literatura originalmente para tramos rectos se ven afectados en curvas verticales por la forma de las líneas de corriente. En la curva cóncava, las fuerzas dinámicas producidas en el fondo por la reducción de la pendiente comprimen la zona de separación de forma progresiva de un escalón a otro en el sentido $E \rightarrow F \rightarrow G$, generando las menores fracciones de ocupación del VRG y del VRP. El efecto contrario ocurre en la curva convexa en la que las líneas de corriente tienen una tendencia a alejarse del fondo, produciendo una mayor ocupación de la zona de separación y sus vórtices.

El comportamiento de las líneas de corriente también incide en la tasa de disipación turbulenta. En la Figura 9b se muestra que su distribución a lo largo de la huella presenta menor magnitud en la curva convexa, y aumenta aguas abajo conforme el flujo ejerce mayores fuerzas dinámicas en los escalones (es mayor en el tramo recto y finalmente máxima en la curva cóncava). La disipación de energía en el flujo rasante está asociada con las zonas de separación y readherencia. Los vórtices en la primera zona se mantienen por la transferencia de esfuerzos cortantes

turbulentos desde la corriente sobre el pseudofondo, y son los primeros responsables de extraer energía al flujo. En la segunda zona, la fricción del flujo readherido con la pared genera la disipación de energía (Chanson, 1994). Las distribuciones de ε_{pared} en la Figura 9b concuerdan con esto. Todas las curvas empiezan en un valor mínimo en la zona del VRP que no aporta a la disipación y crecen en el sentido del eje x_l/l hasta un primer máximo, cuya ubicación coincide aproximadamente con la del máximo gradiente adverso de presión (Figura 9a) en la región intermedia del VRG. Finalmente, para el valor de x_l/l correspondiente al PRF, ε_{pared} comienza a crecer a una mayor tasa, y en el borde del escalón alcanza los valores máximos en toda la huella. Esto demuestra que cerca al fondo la mayor disipación turbulenta se da en la zona de readherencia.

Ashoor y Riazi (2019) encontraron resultados similares para la comparación de un canal escalonado cóncavo y uno convexo. La mayor disipación en el primero la asociaron solo con los vórtices de recirculación. Al respecto, aunque en el presente estudio también se obtiene que los VRG con mayor ε_{pared} son los de la curva cóncava, se resalta además el aporte de la máxima disipación debida a la fricción con el fondo en el tramo final de las huellas. Nótese que en el sentido $E \rightarrow F \rightarrow G$, ε_{pared} máximo en el VRG disminuye, mientras que en la zona de readherencia la disipación aumenta escalón a escalón.

Para completar el análisis de la distribución de las variables a lo largo de la huella, se presentan a continuación perfiles en secciones perpendiculares a esta. Se seleccionan para comparación los escalones A y G de igual geometría en las curvas 1 y 2. En estos, la sección perpendicular 1 (S_1) se ubica en x_l/l del mínimo $\partial P / \partial x_{pared}$ en la ZI-VRP;

la sección 2 (S_2), en x_l/l del máximo $\partial P/\partial x_{pared}$ en la ZI-VRG, y la sección 3 (S_3) está en x_l/l del segundo cruce de $\partial P/\partial x_{pared}$ (aproximadamente en el PRF). En las Figuras 10a, 10b y 10c se muestran los perfiles de magnitud de velocidad, presión y disipación en S_1 , S_2 y S_3 , respectivamente.

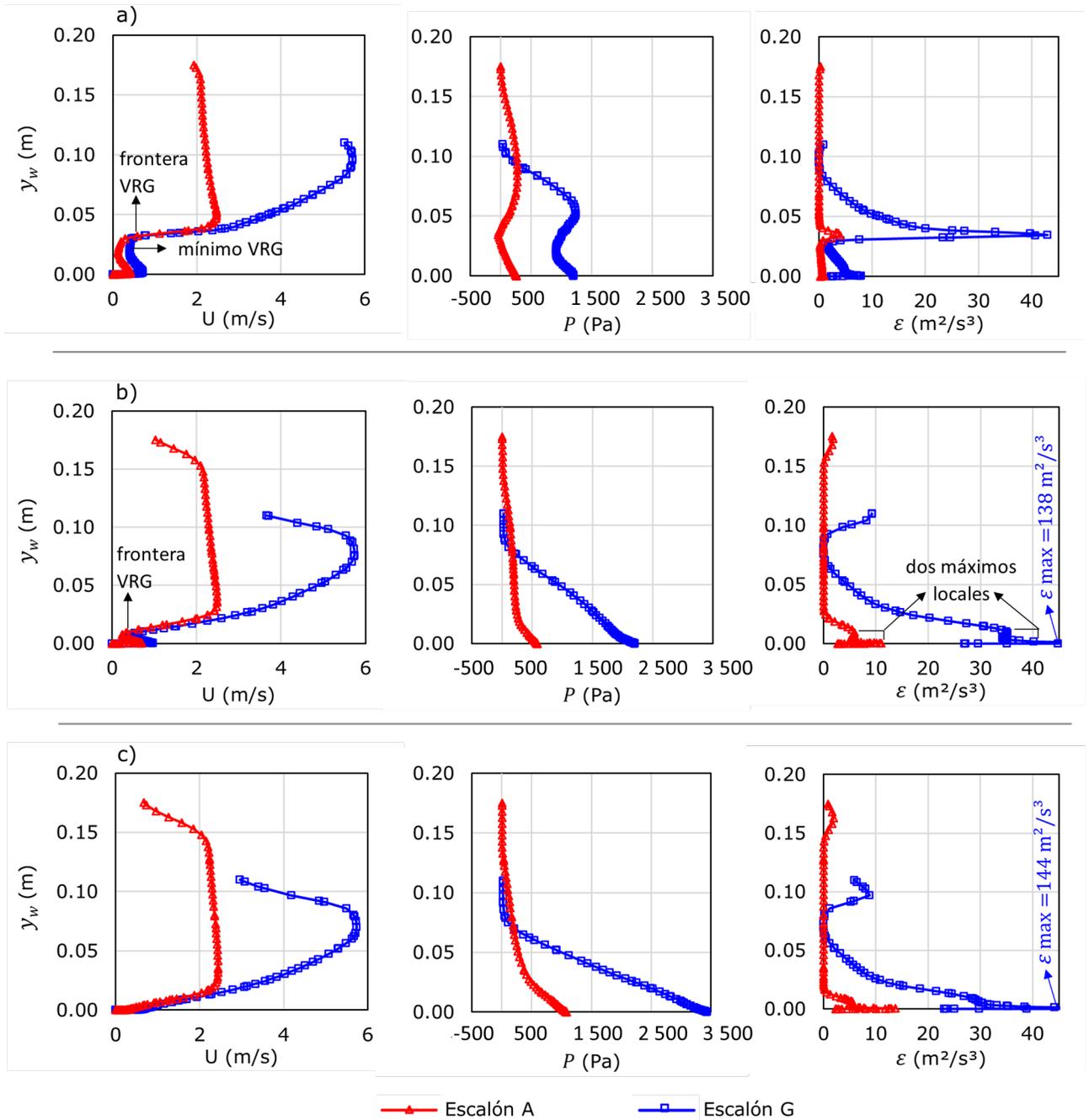


Figura 10. Comparación entre la curva convexa (escalón A) y la cóncava (escalón G) de los perfiles de magnitud de velocidad, presión estática y tasa de disipación en: a) S1, b) S2 y c) S3.

En la Tabla 3 se presentan los valores de x_l/l en los que se generaron los perfiles verticales, junto con un diagrama de referencia para mayor comprensión de su ubicación.

Tabla 3. Localización x_l/l en los escalones A y G de las secciones S1, S2 y S3.

Escalones	x_l/l de S1	x_l/l de S2	x_l/l de S3
Escalón A	0.20	0.70	0.90
Escalón G	0.10	0.52	0.73

Los perfiles de magnitud de velocidad en la zona de separación tanto en la ZI-VRP (Figura 10a) como en la ZI-VRG (Figura 10b) presentan dos máximos locales. El primero, de menor magnitud, ocurre cerca de la huella donde el flujo recirculante se mueve paralelo al fondo. Posteriormente, la velocidad comienza a aumentar a una mayor tasa en la frontera de la zona de separación con la corriente principal sobre el pseudofondo (“frontera VRG” en la Figura 10a y 10b). La distancia y_w a

esta frontera es menor en S_2 que en S_1 , ya que el VRG se va achatando a mayor proximidad al PRF. El segundo máximo, de mayor magnitud, tiene lugar en la corriente principal y ocurre más cerca de la zona de separación en la curva convexa (escalón A), mientras que más cerca de la superficie libre en la curva cóncava (escalón G). Este comportamiento se asocia con la ubicación de las curvas 1 y 2, pues en la primera la capa límite no ha interceptado la superficie libre, por lo que el flujo de la corriente principal presenta un perfil aproximadamente uniforme. En la segunda sí la intercepta, por lo que la velocidad continúa creciendo a mayor distancia y_w , y decrece finalmente en la superficie libre por la fricción con el aire atmosférico.

Iniciando la zona de readherencia (Figura 10c) solo se presenta el valor máximo de magnitud de velocidad asociado con la corriente sobre el pseudofondo, pues desaparece el asociado con la zona de vórtices. Cabe resaltar que la magnitud de la velocidad es mayor en toda la altura del flujo en la curva cóncava para S_1 , S_2 y S_3 debido a que se encuentra más cerca de la descarga final, donde la energía potencial del flujo en la cresta del canal se ha convertido en energía cinética. Al comparar con los campos de velocidad reportados por Ashoor y Riazi (2019) hay múltiples coincidencias. Dichos autores mostraron también el máximo local en la zona de separación cerca a la huella y luego un mínimo en el centro del VRG ("mínimo VRG" en la Figura 10a del presente estudio). Además, en sus modelaciones, el máximo local cerca de la superficie libre también aparece en el tramo final del canal escalonado.

En la Figura 10a se presentaron dos valores máximos de la presión para los peldaños de ambas curvas: el primero en el fondo del canal en

la zona de separación y el segundo en la corriente principal a mayor distancia y_w para el escalón A que para el G. Ambos máximos son mayores en la curva cóncava. Esta forma de los perfiles fue reportada también experimental y numéricamente por Saqib *et al.* (2022). Por otro lado, en la curva convexa se presentan valores negativos de presión manométrica, que coinciden con la esquina superior de la contrahuella $y_w \sim (h = 0.038 \text{ m})$. Las presiones de succión en los bordes de los escalones han sido también reportadas por Sarkardeh *et al.* (2015). Nótese que en esta misma ubicación el mínimo local en la curva cóncava dista de ser negativo. En S_2 (Figura 10b) no hay presiones de succión y el mínimo local en la zona de separación es imperceptible en ambos escalones, para desaparecer por completo en la zona de readherencia (Figura 10c). En general, las mayores presiones en el escalón G en toda la profundidad del flujo están asociadas con el comportamiento descrito previamente de las líneas de corriente en las curvas verticales: tienden a alejarse del fondo en la convexa, pero a comprimirlo en la cóncava.

Por último, los tres perfiles verticales de disipación en la curva cóncava son mayores que en la convexa, lo cual confirma los resultados de la Figura 9b. La geometría de la curva vertical correspondiente al escalón G, sumado a que recibe el flujo a gran velocidad que ha caído por la rampa escalonada, propicia el aumento de los esfuerzos cortantes entre el flujo y el fondo, y entre las mismas capas de fluido. Este incremento en la tasa de disipación a medida que el flujo avanza por los escalones hasta lograr los valores máximos en las abscisas finales del canal también se evidenció en el campo de disipación reportado por Bombardelli *et al.* (2011).

En la Figura 10a, en la ZI-VRP se observan dos máximos locales de ε en cada perfil, uno menor cerca al fondo debido a los gradientes de velocidad entre el flujo recirculante y la pared, y otro mayor que coincide con la frontera superior del VRG, y que se debe a los gradientes de velocidad entre el vórtice y la corriente sobre el pseudofondo. En S_2 , donde el vórtice de recirculación se achata y su frontera se acerca a la pared, los dos máximos de cada perfil están tan cercanos que parecen fusionarse en uno solo (“dos máximos locales” en la Figura 10b). El máximo de ε a lo largo de la frontera de la zona de separación con el flujo principal se observa en los mencionados resultados de Bombardelli *et al.* (2011), quienes, sin embargo, reportaron una disipación nula cerca del fondo. Teniendo en cuenta que los autores utilizaron funciones de pared como condición de frontera para la turbulencia, las cuales permiten modelar el flujo a partir de la zona logarítmica, esto puede sugerir la importancia de modelar la región más cercana de la capa límite, a fin de capturar los máximos valores de ε debidos a la fricción con la huella. Aun así, se recomienda profundizar la investigación al respecto.

Iniciando en la zona de readherencia, la disipación máxima se logra solo por la fricción con el fondo sólido, lo que evidencia un único máximo en ambos escalones. Nótese que tanto en esta zona (Figura 10c) como en la de máximo gradiente adverso de presión (Figura 10b), los valores máximos de disipación para el escalón G son 144 y 138 m^2/s^3 , respectivamente; sin embargo, las gráficas se interrumpen en 45 m^2/s^3 para lograr una mejor visualización de los máximos del escalón A. Cabe resaltar que para los tres perfiles en los escalones A y G, los máximos

locales de ε cerca de la superficie libre del flujo son producidos por los gradientes de velocidad presentes en la interfase agua-aire.

Vorticidad y energía cinética turbulenta en el canal con curvas verticales escalonadas

La magnitud de la vorticidad ($|\omega_i|$) se calcula considerando solo la componente en la dirección z (ω_z), ya que por tratarse de un modelo 2D, $\omega_x = \omega_y = 0$. Se utiliza entonces la Ecuación (14):

$$|\omega_i| = \sqrt{\omega_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2} \quad (14)$$

La Figura 11a presenta el campo de $|\omega_i|$ en todo el canal escalonado, para comparar su comportamiento en la zona de separación y readherencia de las curvas cóncava y convexa, y del tramo recto. En general, las zonas de máxima vorticidad coinciden con la superficie libre y con el pseudofondo. La primera corresponde a los gradientes de velocidad entre el flujo de agua y el aire; la segunda, a los gradientes entre la corriente principal y las zonas de recirculación en las cavidades de los escalones. La Figura 11b muestra una ampliación del campo en la curva convexa con un detalle del escalón A. En la zona de separación de este último, la máxima vorticidad se observa alrededor de la línea de corriente en la frontera del vórtice de recirculación grande (línea punteada FVRG) con el flujo principal, que intercepta la huella en el PRF. Esta zona de altos gradientes es responsable de la producción de turbulencia y de

los máximos de disipación mostrados previamente en los paneles correspondientes de las Figuras 10a y 10b. En la zona del VRP se observa otra región de alta vorticidad, correspondiente a los gradientes de velocidad en la frontera con el VRG que gira en sentido contrario. Aguas abajo del PRF, la zona de alta vorticidad se da por los gradientes generados por la fricción del flujo con la huella; allí se encuentra la máxima vorticidad en los escalones, la cual se extiende hasta aguas abajo del extremo derecho de la huella en el inicio de la zona de separación del escalón subsiguiente. Este comportamiento coincide con los resultados experimentales de Amador, Sánchez-Juny y Dolz (2006), quienes aplicaron una técnica de velocimetría de imagen de partículas para obtener el campo de flujo en un canal escalonado con pendiente 1V:0.8H. Los máximos valores de vorticidad reportados en ese estudio ocurren también justo aguas abajo de los bordes exteriores de los escalones, en una región de bajo espesor relativo. Este fenómeno es atribuido, según los mencionados autores, a la aparición rápida de vórtices de pequeña escala que se desprenden de estas esquinas.

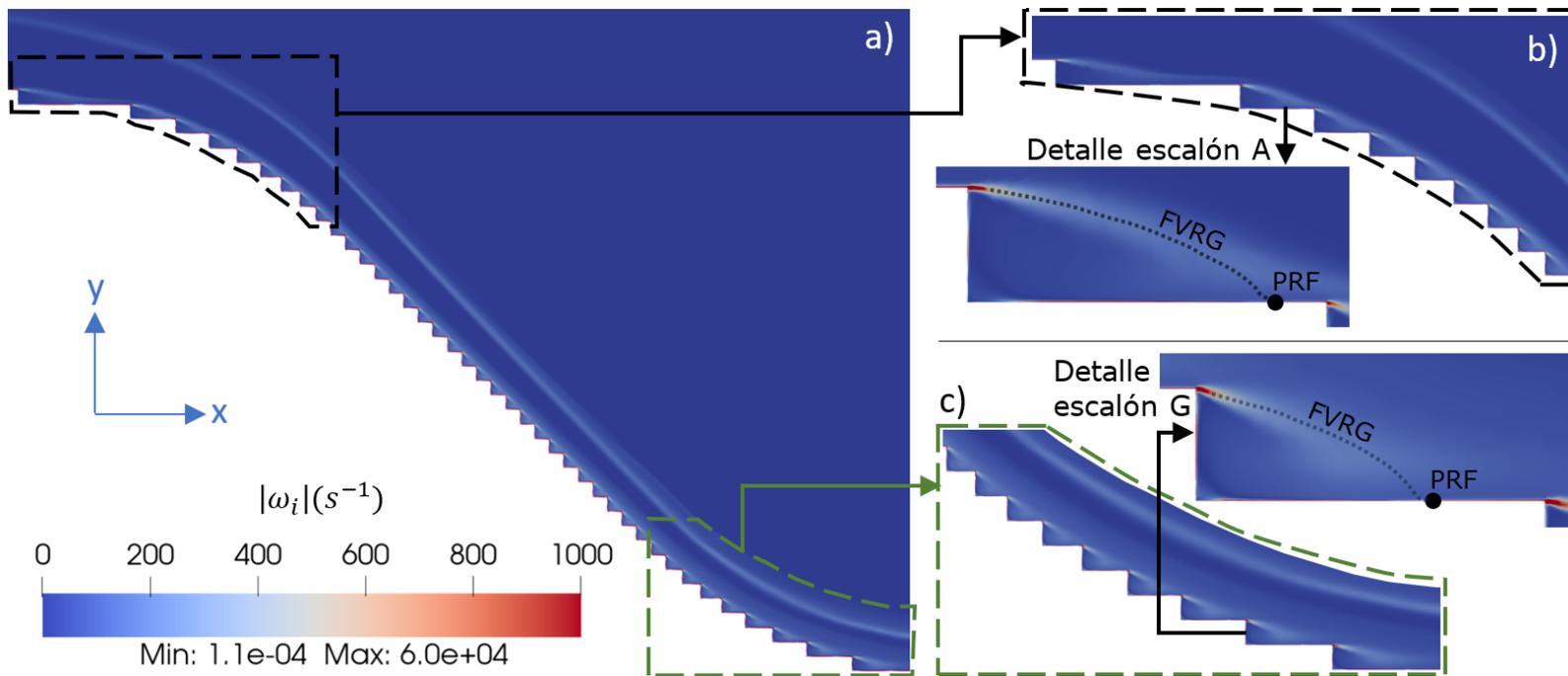


Figura 11. Campo de magnitud de la vorticidad $|\omega_i|$ en: a) todo el canal con curvas verticales; b) la curva convexa con detalle del escalón A; c) la curva cóncava con detalle del escalón G.

El patrón del campo de vorticidad descrito para las cavidades de la curva 1 se replica en las del tramo recto y en las de la curva 2. La principal diferencia radica en la ubicación de la intersección con la huella de la zona de alta $|\omega_i|$ alrededor de la FVRG. En la rampa recta, los máximos niveles de vorticidad se extienden entre bordes externos de escalones consecutivos, similar a los resultados de Amador *et al.* (2006). Esto se atribuye a la pendiente, correspondiente a un subrégimen SK3, con la zona de separación que ocupa aproximadamente la totalidad de la huella. La Figura 11c muestra una ampliación de la curva cóncava con un detalle del escalón G. La principal diferencia con la curva convexa es que la zona

de alta $|\omega_i|$ intercepta en el PRF más aguas arriba, lo cual se debe a una menor ocupación de la zona de separación. Sumado a lo anterior, la máxima vorticidad de todo el canal en los bordes exteriores se da en esta curva final y es aproximadamente $6.0e + 04s^{-1}$ (nótese que este máximo se especifica bajo la leyenda de barra de colores de la Figura 11, que se interrumpe en $1\ 000\ s^{-1}$ para una mejor visualización del campo).

La Figura 12a presenta el campo de k en todo el canal escalonado. En general, los máximos niveles de turbulencia se dan cerca del pseudofondo, lo cual confirma el rol de los altos gradientes de velocidad que se evidenciaron en el campo de vorticidad alrededor de la FVRG, como una zona de alta producción de k . La región ocupada por los máximos valores de k se expande hacia la superficie libre en la dirección del flujo, similar a lo evidenciado en los resultados de Amador *et al.* (2006) y Bombardelli *et al.* (2011), quienes lo atribuyeron al desarrollo de la capa límite. Esto se puede confirmar en la Figura 11a, en la que se observa la expansión aguas abajo de la zona de máximos gradientes de velocidad, haciendo que a mayor distancia de la cresta del canal aumente la fracción de la profundidad del flujo que contribuye a la producción de turbulencia. Al comparar los detalles de las curvas convexa y cóncava, en las Figuras 12b y 12c, respectivamente, se observan los mayores valores de k en la segunda. Respecto a la diferencia entre las zonas de separación y readherencia, en ambas curvas está la mayor turbulencia en la zona de impacto de la corriente principal con la fracción final de la huella.

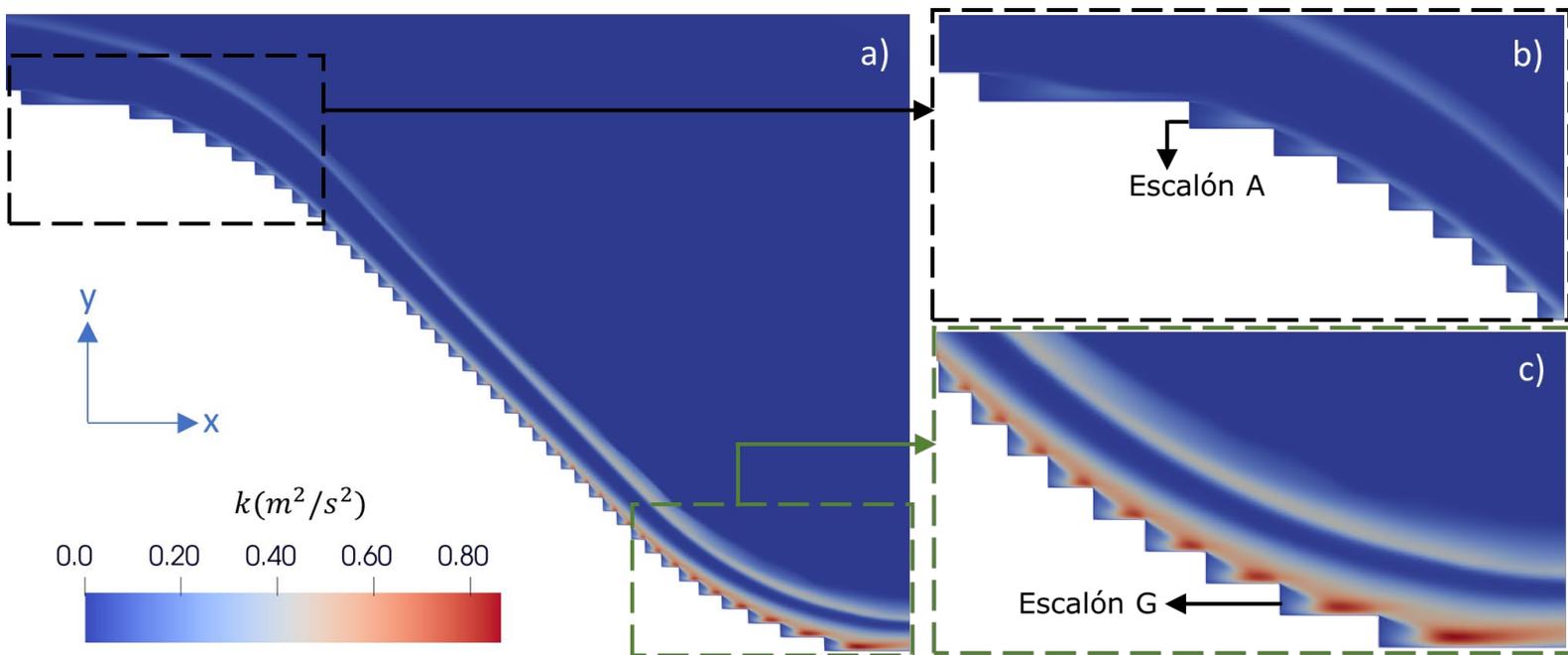


Figura 12. a) Campo de energía cinética turbulenta k en todo el canal con curvas verticales, b) detalle de la curva convexa, c) detalle de la curva cóncava.

Conclusiones

El modelo RNG $k - \varepsilon$ captura de forma adecuada los perfiles experimentales de velocidad en la zona de flujo no aireado, obteniéndose un error promedio máximo por perfil de 5 %. Aguas abajo del punto de inyección de aire —aunque los perfiles numéricos capturan la forma de los experimentales— el error promedio es mayor y la calidad del ajuste disminuye en la dirección del flujo. Cerca del fondo —en una capa de espesor aproximado de 26 % de h — se subestiman las mediciones de velocidad, mientras que más lejos se sobrestiman. El aumento del error en esta región está relacionado con que el modelo numérico no captura

el fenómeno de aireación. En la literatura se encuentra que la mejor opción para modelar el atrapamiento de aire por la perturbación turbulenta de la superficie libre es aplicar el modelo de turbulencia LES. Se recomienda profundizar la investigación utilizando dicha técnica de simulación, por ejemplo en una curva cóncava escalonada que por ubicarse en la descarga del canal es más propensa a coincidir con el flujo aireado.

Los objetivos propuestos para este estudio buscaban establecer la fracción de los escalones ocupada por la región de vórtices y de flujo readherido, y definir la diferencia en la distribución de la velocidad, la presión, la vorticidad y las estadísticas de la turbulencia en dichas zonas. Lo anterior, con el fin de comparar la hidrodinámica del flujo en los tres tramos del canal: curva convexa, rampa recta y curva cóncava. A continuación se enumeran las conclusiones derivadas de los resultados de este trabajo y que dan por cumplidos los objetivos:

1. Mediante la modelación numérica del presente estudio en el canal con curvas verticales se lograron capturar dos zonas principales en cada escalón: la de separación y la de readherencia. En la primera se observan dos vórtices de recirculación: uno grande girando en sentido horario y uno pequeño en la esquina interior de los escalones girando en sentido antihorario. En la zona de readherencia, el flujo principal impacta en la fracción final de la huella y fluye hasta el siguiente escalón. En la curva cóncava, las velocidades obtenidas en la zona de separación son más bajas, correspondientes a menos del 20 % de la velocidad máxima en el canal, y en la de readherencia son mayores y se elevan hasta un 40 %.

2. El vórtice pequeño ocupa una fracción menor de la huella en la curva cóncava que en la convexa, y mientras que en la primera la fracción de ocupación disminuye escalón a escalón en el sentido del flujo en la curva, en la segunda aumenta. Por otro lado, el punto de readherencia está más cerca de la contrahuella en la cóncava, por lo que la zona de readherencia ocupa una mayor fracción del escalón. Lo anterior es porque en la salida del canal, las fuerzas dinámicas producidas en el fondo por la reducción de la pendiente comprimen la zona de separación. El efecto contrario ocurre en la curva a la entrada del canal, en la que las líneas de corriente tienen una tendencia a alejarse del fondo.
3. En la zona de separación cercana a la contrahuella de los escalones de las curvas cóncava y convexa se encuentran dos máximos locales de presión: uno cerca del fondo en la zona de recirculación, y otro en la corriente principal por encima del pseudofondo. En el medio se presenta un mínimo local, negativo solo en la curva convexa y ubicado aproximadamente a la altura de la esquina superior de la contrahuella. En la zona de separación cercana al punto de readherencia y en la zona de readherencia, este mínimo local desaparece en ambas curvas escalonadas, lo que resulta en una presión máxima en el fondo del canal, que disminuye en función de la distancia a la pared. Los perfiles analizados mostraron en general que en toda la profundidad del flujo la presión es mayor en la curva cóncava que en la convexa.
4. Respecto a la disipación de energía cinética turbulenta, se evidencia que el vórtice pequeño no genera un aporte significativo a esta

variable en ningún escalón del canal. Cerca del fondo, la disipación ocurre sobre todo en el vórtice de recirculación grande y en la zona de readherencia. En esta última es mayor a lo largo de todo el canal y es producida por la fricción del flujo con el último tramo de cada escalón. Similar a lo concluido para la presión, en la dirección perpendicular a la huella de ambas curvas verticales, en la zona de separación se encuentran dos máximos locales de disipación. Un máximo cerca del fondo debido a los gradientes de velocidad entre el flujo recirculante y la pared, y otro mayor que coincide con la frontera superior de la zona de separación, y que se debe a los gradientes de velocidad entre el vórtice y la corriente sobre el pseudofondo. Estos dos máximos se aproximan hasta fundirse en uno solo conforme el vórtice grande se achata cerca al punto de readherencia. Por último, los perfiles analizados mostraron en general que en toda la profundidad del flujo la disipación turbulenta es mayor en la curva cóncava que en la convexa.

5. La máxima vorticidad en la zona de separación de los escalones se da alrededor de las fronteras entre la corriente principal y el vórtice grande, y entre este último y el vórtice pequeño. En la zona de flujo readherido, la magnitud es mayor y se da por los gradientes de velocidad generados por la huella. Allí, la zona de máximos se extiende aguas abajo hasta el inicio de la zona de separación del escalón subsiguiente. La magnitud de la vorticidad aumenta en la dirección del flujo, y los valores máximos están cerca de las esquinas exteriores de los escalones de la curva cóncava.

6. Las zonas de alta vorticidad asociadas con altos gradientes en el flujo se correlacionaron con regiones de producción de energía cinética turbulenta. Los máximos niveles de k se localizaron entonces alrededor del pseudofondo para la zona de separación, y sobre la huella para la zona de readherencia, siendo mayores en esta última. Tanto la magnitud de k como la fracción de la profundidad abarcada por altos niveles de turbulencia aumentaron en la dirección del flujo y encontraron sus máximos valores en la curva cóncava a la salida del canal.

Referencias

- Amador, A., Sánchez-Juny, M., & Dolz, J. (2006). Characterization of the nonaerated flow region in a stepped spillway by PIV. *Journal of Fluids Engineering*, 128(6), 1266. DOI: 10.1115/1.2354529
- Ansys Inc. (2022). *ANSYS Fluent User's Guide* (Vol. 2022 R2).
- Arjenaki, M. O., & Sanayei, H. R. Z. (2020). Numerical investigation of energy dissipation rate in stepped spillways with lateral slopes using experimental model development approach. *Modeling Earth Systems and Environment*, 6(2), 605-616. DOI: 10.1007/S40808-020-00714-Z/METRICS
- Ashoor, A., & Riazi, A. (2019). Stepped spillways and energy dissipation: A non-uniform step length approach. *Applied Sciences*, 9(23), 5071. DOI: 10.3390/app9235071

- Attari, J., & Sarfaraz, M. (2012). Transitional steps zone in steeply sloping stepped spillways. *9th International Congress on Civil Engineering*, 9. Recuperado de <https://civilica.com/doc/165678/certificate/print/>
- Boes, R. M., & Hager, W. H. (2003). Two-phase flow characteristics of stepped spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, 129(9), 661-670. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(2003)129:9(661)
- Bombardelli, F. A., Meireles, I., & Matos, J. (2011). Laboratory measurements and multi-block numerical simulations of the mean flow and turbulence in the non-aerated skimming flow region of steep stepped spillways. *Environmental Fluid Mechanics*, 11(3), 263-288. DOI: 10.1007/S10652-010-9188-6/METRICS
- Bureau of Reclamation. (1987). *Design of small dams* (3rd ed.). Washington, DC: US Government Printing Office. Recuperado de <https://www.usbr.gov/tsc/techreferences/mands/mands-pdfs/SmallDams.pdf>
- Casa, E., Hidalgo, X., Castro, M., Ortega, P., & Vera, P. (2018). Modelación numérica del flujo rasante en una rápida escalonada aplicando la dinámica de fluidos computacional (CFD) mediante el uso de Flow-3D. *Revista Politécnica*, 41(2), 53-64. Recuperado de https://revistapolitecnica.epn.edu.ec/ojs2/index.php/revista_politecnica2/article/view/823
- Chahed, J., Roig, V., & Masbernat, L. (2003). Eulerian-Eulerian two-fluid model for turbulent gas-liquid bubbly flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 29(1), 23-49. DOI: 10.1016/S0301-9322(02)00123-4

- Chanson, H. (1994). Hydraulics of skimming flows over stepped channels and spillways. *Journal of Hydraulic Research*, 32(3), 445-460. DOI: 10.1080/00221689409498745
- Chanson, H. (2001). Hydraulic design of stepped spillways and downstream energy dissipators. *Dam Engineering*, 11(4), 205-242.
- Chanson, H., & Toombes, L. (2004). Hydraulics of stepped chutes: The transition flow. *Journal of Hydraulic Research*, 42(1), 43-54.
- Cheng, X., Luo, L., Zhao, W., & Li, R. (2004). Two-phase flow simulation of aeration on stepped spillway. *Progress in Natural Science*, 14(7), 626-630. DOI: 10.1080/10020070412331344051
- Chinnarasri, C., & Wongwises, S. (2006). Flow patterns and energy dissipation over various stepped chutes. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 132(1), 70-76. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9437(2006)132:1(70)
- Cifani, P., Michalek, W. R., Priems, G. J. M., Kuerten, J. G. M., van der Geld, C. W. M., & Geurts, B. J. (2016). A comparison between the surface compression method and an interface reconstruction method for the VOF approach. *Computers & Fluids*, 136, 421-435. DOI: 10.1016/J.COMPFLUID.2016.06.026
- Dalili-Khanghah, K., & Kavianpour, M. R. (2020). Numerical investigation of the effect of CEDEX profile on the hydraulic parameters in the stepped spillway and the performance of this profile in various chute slopes. *Iranian Journal of Science and Technology - Transactions of Civil Engineering*, 44(4), 1247-1254. DOI: 10.1007/S40996-019-00313-8/FIGURES/8

- Escue, A., & Cui, J. (2010). Comparison of turbulence models in simulating swirling pipe flows. *Applied Mathematical Modelling*, 34(10), 2840-2849. DOI: 10.1016/J.APM.2009.12.018
- Gonzalez, C. A. (2005). *An experimental study of free-surface aeration on embankment stepped chutes*. Recuperado de <https://espace.library.uq.edu.au/view/UQ:158019>
- Greenshields, C. (2022). *OpenFOAM v10 User Guide*. London, UK: The OpenFOAM Foundation. Recuperado de <https://doc.cfd.direct/openfoam/user-guide-v10>
- Greenshields, C., & Weller, H. (2022). *Notes on computational fluid dynamics: General principles*. Reading, UK: CFD Direct Ltd. Recuperado de <https://doc.cfd.direct/notes/cfd-general-principles/index/>
- Henrique-Povh, P., & Junji-Ota, J. (2019). Transition stretch of spillways with bevelled steps. *38th IAHR World Congress - 'Water: Connecting the World'*, 38, 1520-1528. DOI: 10.3850/38WC092019-1065
- Hirt, C. W. (2003). Modeling turbulent entrainment of air at a free surface. *Technical Note 61(FSi-03-TN61)*. Pasadena, USA: Flow Science Inc.
- Hirt, C. W., & Nichols, B. D. (1981). Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39(1), 201-225. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90145-5

- Hunt, S., & Kadavy, K. (2010a). Energy dissipation on flat sloped stepped spillways: Part 1. Upstream of the inception point. *Transactions of the American Society of Agricultural and Biological Engineers*, 53(1), 103-109.
- Hunt, S., & Kadavy, K. (2010b). Energy dissipation on flat sloped stepped spillways: Part 2. Downstream of the inception point. *Transactions of the American Society of Agricultural and Biological Engineers*, 53(1), 111-118.
- Kundu, P. K., Cohen, I. M., & Dowling, D. R. (2012). *Fluid Mechanics* (5th ed.). Oxford, UK: Elsevier Inc. DOI: 10.1016/C2009-0-63410-3
- Llano, S. (2003). *Hydraulics of Stepped structures - importance of flow regimes on stepped chutes and practical application in developing countries*. Delft, Netherlands: IHE Delft Institute for Water Education.
- Matos, J., Frizell, K. H., André, S., & Frizell, K. W. (2002). On the performance of velocity measurement techniques in air-water flows. In: *Hydraulic measurements and experimental methods 2002* (pp. 1-11). Reston, USA: American Society of Civil Engineers. DOI: 10.1061/40655(2002)58
- Medhi, B. J., Singh, A., Thokchom, A. K., & Mahapatra, S. (2019). Experimental and computational study on flow over stepped spillway. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 33(5), 2101-2112. DOI: 10.1007/S12206-019-0116-5/METRICS

- Nikseresht, A. H., Talebbeydokhti, N., & Rezaei, M. J. (2013). Numerical simulation of two-phase flow on step-pool spillways. *Scientia Iranica*, 20(2), 222–230. DOI: 10.1016/j.scient.2012.11.013
- Orszag, S. A., Yakhot, V., Flannery, W. S., & Boysan, F. (1993). Renormalization group modeling and turbulence simulations. On *near-wall turbulent flows*. *Near-wall turbulent flows: Proceedings of the International Conference on Near-Wall Turbulent Flows*, Tempe, Arizona, USA, 15-17 March 1993, Elsevier Publishing Company.
- Saqib, N. U., Akbar, M., Pan, H., Ou, G., Mohsin, M., Ali, A., & Amin, A. (2022). Numerical analysis of pressure profiles and energy dissipation across stepped spillways having curved risers. *Applied Sciences* 2022, 12(1), 448. DOI: 10.3390/APP12010448
- Sarkardeh, H., Marosi, M., & Roshan, R. (2015). Stepped spillway optimization through numerical and physical modeling. *International Journal of Energy and Environment*, 6(6), 597-606. Recuperado de <https://www.ijee.ieefoundation.org/>
- Sotelo-Ávila, G. (2002). *Hidráulica de Canales*. México, DF, México: Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Tabbara, M., Chatila, J., & Awwad, R. (2005). Computational simulation of flow over stepped spillways. *Computers & Structures*, 83(27), 2215-2224. DOI: 10.1016/j.compstruc.2005.04.005
- Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (2007). *An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method*. Harlow, England: Pearson Education Ltd.

- Wang, F. F., Wu, S. Q., & Zhu, S. L. (2019). Numerical simulation of flow separation over a backward-facing step with high Reynolds number. *Water Science and Engineering*, 12(2), 145-154. DOI: 10.1016/J.WSE.2019.05.003
- Wilcox, D. C. (2006). *Turbulence modeling for CFD* (3rd ed.). La Cañada, California: DCW Industries, Inc.
- Yakhot, V., Orszag, S. A., Thangam, S., Gatski, T. B., & Speziale, C. G. (1992). Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Physics of Fluids A*, 4(7), 1510-1520. DOI: 10.1063/1.858424
- Zare, H. K., & Doering, J. C. (2012). Effect of rounding edges of stepped spillways on the flow characteristics. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 39(2), 140-153. DOI: 10.1139/L11-121
- Zhan, J., Zhang, J., & Gong, Y. (2016). Numerical investigation of air-entrainment in skimming flow over stepped spillways. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 6(3), 139-142. DOI: 10.1016/J.TAML.2016.03.003
- Zuhaira, A. A., Al-Hamd, R. K. S., Alzabeebee, S., & Cunningham, L. S. (2021). Numerical investigation of skimming flow characteristics over non-uniform gabion-stepped spillways. *Innovative Infrastructure Solutions*, 6(4). DOI: 10.1007/S41062-021-00579-W