

**Pronóstico hidrológico en la cuenca de Misantla
(México) mediante el uso del filtro de Kalman discreto**
Hydrological forecast in the Misantla basin (Mexico)
using the discrete Kalman filter

Ricardo Pérez-Indoval¹, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-7661-8384>

Rabindranarth Romero-López², ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8704-9744>

Rafael Díaz-Sobac³, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0582-0898>

¹Universitat Politècnica de Valencia (UPV), Valencia, Valencia, España/
Universidad de las Américas de Puebla (UDLAP), Cholula, Puebla, México/
Universidad Anáhuac, Xalapa, Veracruz, México, hidroindoval@gmail.com

²Universidad Veracruzana, Xalapa, Veracruz, México, rabromero@uv.mx

³Universidad Veracruzana, Xalapa, Veracruz, México, radiaz@uv.mx

Autores para correspondencia: Ricardo Pérez-Indoval,
hidroindoval@gmail.com y Rabindranarth Romero-López,
rabromero@uv.mx

Resumen

En México, los eventos de precipitación extrema han aumentado en los últimos años, especialmente en el sur, generando cambios abruptos en los caudales de los ríos e inundaciones graves. La información hidrológica es fundamental para gestionar avenidas, presas y desastres. Para predecir los caudales, se utilizan métodos como redes neuronales, inteligencia artificial y técnicas de asimilación de datos, entre ellas el filtro de Kalman discreto (FKD). Este filtro realiza estimaciones estocásticas mediante un algoritmo de corrección; proporciona estimaciones lineales no sesgadas con mínima varianza a partir de datos ruidosos, y actualiza el sistema con cada nueva observación. Su eficacia en hidrología ha sido probada en varios estudios. Este trabajo implementa el FKD en una cuenca del Golfo de México para predecir caudales y evalúa dos funciones de respuesta: el hidrograma unitario instantáneo (HUI) y el modelo de tanque lineal (TL). Durante el análisis de 20 avenidas en 1987, se detectó una avenida extrema en septiembre, con un caudal de $271.6 \text{ m}^3/\text{s}$. Los resultados mostraron que el HUI fue más preciso que el TL, especialmente en las avenidas. Dicho comportamiento se debe tanto a la naturaleza de las funciones de respuesta como a las ecuaciones del filtro de Kalman, que mejoran la estimación de errores y la representación de procesos estocásticos. En conclusión, el FKD con estas funciones es eficiente para la predicción de caudales.

Palabras clave: previsión hidrológica, inundación, escorrentía, modelo matemático, proceso estocástico, México.

Abstract

In Mexico, extreme precipitation events have increased in recent years, especially in the south, causing abrupt changes in river flows and severe flooding. Hydrological information is essential for managing floods, dams, and disasters. To predict river flows, methods like neural networks, artificial intelligence, and data assimilation techniques, including the Discrete Kalman Filter (DKF), are used. This filter performs stochastic estimations through a correction algorithm, providing unbiased linear estimates with minimal variance from noisy data, and updates the system with each new observation. Its effectiveness in hydrology has been proven in several studies. This work implements the DKF in a watershed in the Gulf of Mexico to predict flows, evaluating two response functions: the Instantaneous Unit Hydrograph (IUH) and the Linear Tank Model (TL). During the analysis of 20 flood events in 1987, an extreme flood in September was detected, with a flow of 271.6 m³/s. The results showed that the IUH was more accurate than the TL, especially during flood events. This behavior is attributed to both the nature of the response functions and the Kalman filter equations, which improve error estimation and the representation of stochastic processes. In conclusion, the DKF with these functions is efficient for flow prediction.

Keywords: Hydrological forecasting, floods, Runoff, mathematical models, stochastic processes, Mexico.

Recibido: 15/10/2024

Aceptado: 14/06/2025

Publicado *ahead of print*: 11/07/2025

Versión final: 01/03/2026



Introducción

En los últimos años, a nivel global se ha observado una intensificación de los eventos de precipitación extrema, caracterizada por un incremento significativo en la frecuencia y magnitud de estos fenómenos. En México, especialmente en las zonas sur del país, estos cambios extremos pueden generar cambios repentinos en el caudal de los ríos y provocar inundaciones (Brody, Peacock, & Gunn, 2012; Vargas & Magaña, 2020). Contar con información hidrológica sobre el comportamiento del caudal se convierte en una herramienta necesaria para el control de avenidas, administración de presas y la gestión del riesgo de desastres. Se han utilizado diferentes métodos matemáticos para la predicción de dicho caudal en la hidrología, como las redes neuronales, inteligencia artificial, y los métodos de asimilación de datos, como los filtros del Kalman. En cuanto al filtro de Kalman discreto (FKD), consiste es una herramienta matemática que puede usarse para la estimación estocástica, desarrollado por Kalman (1960).

El filtro de Kalman es un conjunto de ecuaciones matemáticas que calculan de forma recursiva estimaciones lineales no sesgadas y con varianza mínima para el estado de un sistema utilizando datos con ruido (Jazwinski, 1970). La metodología del filtro de Kalman (FKD) se basa en un algoritmo de proyección-corrección, el cual permite pronosticar el nuevo estado del sistema y luego corregir la proyección inicial mediante la incorporación de la medición actualizada Kalman (1960). Este proceso iterativo mejora la precisión de las estimaciones a medida que se reciben nuevas observaciones. El algoritmo consta de dos etapas principales: la predicción, donde se estima el estado futuro del sistema a partir del

modelo dinámico y la información previa, y la corrección, que ajusta esta predicción utilizando la medición obtenida y el cálculo del error de predicción Kalman (1960). A través de tal enfoque, el filtro de Kalman optimiza la estimación del estado del sistema al minimizar el error cuadrático medio entre el estado estimado y el real, lo que lo convierte en una herramienta potente para la estimación estocástica en contextos como el pronóstico de caudales en cuencas hidrográficas (Ahsan & O'Connor, 1994).

Desde que Kalman (1960) describió su técnica de filtración (asimilación), se ha aplicado a muchos fenómenos y sistemas, como a la determinación de órbitas en navegación y en otros usos aeroespaciales; la predicción del tiempo en meteorología; problemas de circulación del océano; en la geomecánica para el análisis de la seguridad en las estructuras, y en las cimentaciones del suelo. Una visión general de las diversas aplicaciones del filtro de Kalman se puede encontrar en los trabajos de Sorenson (1985).

La diversidad de aplicaciones del filtro de Kalman refleja su naturaleza genérica. El punto de vista recursivo lo hace un método dinámico que permite el estudio de cambios en la respuesta del modelo con el tiempo, pues el estado del sistema es actualizado en cada paso de tiempo con la adquisición de nuevas observaciones (Maxwell, Jackson, & McGregor, 2018).

Según Valdés, Velázquez y Rodríguez-Iturbe (1980), en las cuencas hidrográficas, las medidas representativas y los puntos de interés están dinámicamente relacionados con las características físicas y biológicas predominantes del área. Utilizando esta información, se puede modelar el comportamiento de un fenómeno específico para obtener pronósticos de caudal a corto plazo. Por ejemplo, Piadeh, Behzadian y Alani (2022)

destacan que el monitoreo en tiempo real de las cuencas permite mejorar la precisión en los pronósticos hidrológicos. Asimismo, Chen *et al.* (2021) demuestran que el uso de modelos integrados de cuencas, combinados con nuevas tecnologías de recolección de datos, facilita una mejor estimación de los caudales en zonas de alto riesgo.

Así, esta herramienta matemática del filtro de Kalman ha sido empleada en diversos campos de la investigación de la hidrología, desde Europa (Mazzoleni, Alfonso, Chacon-Hurtado, & Solomatine, 2015; Todaro, D’Oria, Tanda, & Gómez-Hernández, 2022) y el Medio Oriente (Gong *et al.*, 2023; Şen, 1991; Sun *et al.*, 2023) hasta llegar a México (Alvarado-Hernández, Ibáñez-Castillo, Ruiz-García, González-Leiva, & Vázquez-Peña, 2020; González-Leiva, Ibáñez-Castillo, & Valdés, 2015; Morales-Velázquez, Aparicio, & Valdés, 2014; Nárvaez-Ortiz, Ibáñez-Castillo, Arteaga-Ramírez, & Vázquez-Peña, 2022), donde los investigadores lo han utilizado ampliamente para la predicción de caudales en cuencas.

El objetivo de este trabajo es aplicar la metodología del filtro de Kalman discreto (FKD) en una cuenca del Golfo de México para la predicción de caudales. La novedad del estudio radica en la implementación de dos funciones de respuesta: el hidrograma unitario instantáneo (HUI) y el modelo de tanque lineal (TL), lo que permitirá evaluar y comparar su desempeño en la estimación de los caudales a corto plazo en esta región.

Materiales y métodos

En este estudio se realizaron una serie de pasos para la conformación del algoritmo del FKD: 1) elegir la zona de estudio; 2) recopilar la información hidrológica (precipitación y gasto de las estaciones de la cuenca); 3) analizar los datos para obtener la lluvia efectiva mediante la construcción de las curvas de índice de infiltración media. Una vez obtenida la información hidrológica de estos dos pasos se procederá a 4) implementar las dos funciones de respuesta que requiere el modelo, para la 5) la conformación del algoritmo del FKD con las ecuaciones de estado y de medición que representan al modelo estocástico. Por último, 6) la validación del modelo a través de coeficiente de Nash-Sutcliffe (Nash & Sutcliffe, 1970), media, desviación estándar y coeficiente de correlación. Para sintetizar la metodología empleada en el estudio, se elaboró un diagrama que se presenta en la Figura 1, el cual ilustra el proceso de conformación del filtro de Kalman discreto en la cuenca de Misantla, México.



Figura 1. Diagrama metodológico.

Zona de estudio

El estudio se llevó a cabo en la cuenca del río Misantla, ubicada en la zona montañosa central del estado de Veracruz, México (Figura 2). Dicha cuenca abarca una extensión de 585 km² y se extiende por 12 municipios en el estado de Veracruz. Se sitúa en las regiones fisiográficas de la sierra de Chiconquiaco, llanuras y lomeríos (INEGI, 2024). La sierra de Chiconquiaco se caracteriza por unidades topográficas abruptas y extensas, que de forma gradual se cambian hacia áreas de lomeríos y colinas redondeadas (Medina-Chena, Salazar-Chimal, & Álvarez-Palacios, 2010). La topografía de la cuenca es altamente variable, con altitudes que oscilan desde el nivel del mar hasta los 2 680 m.s.n.m. (INEGI, 2024).

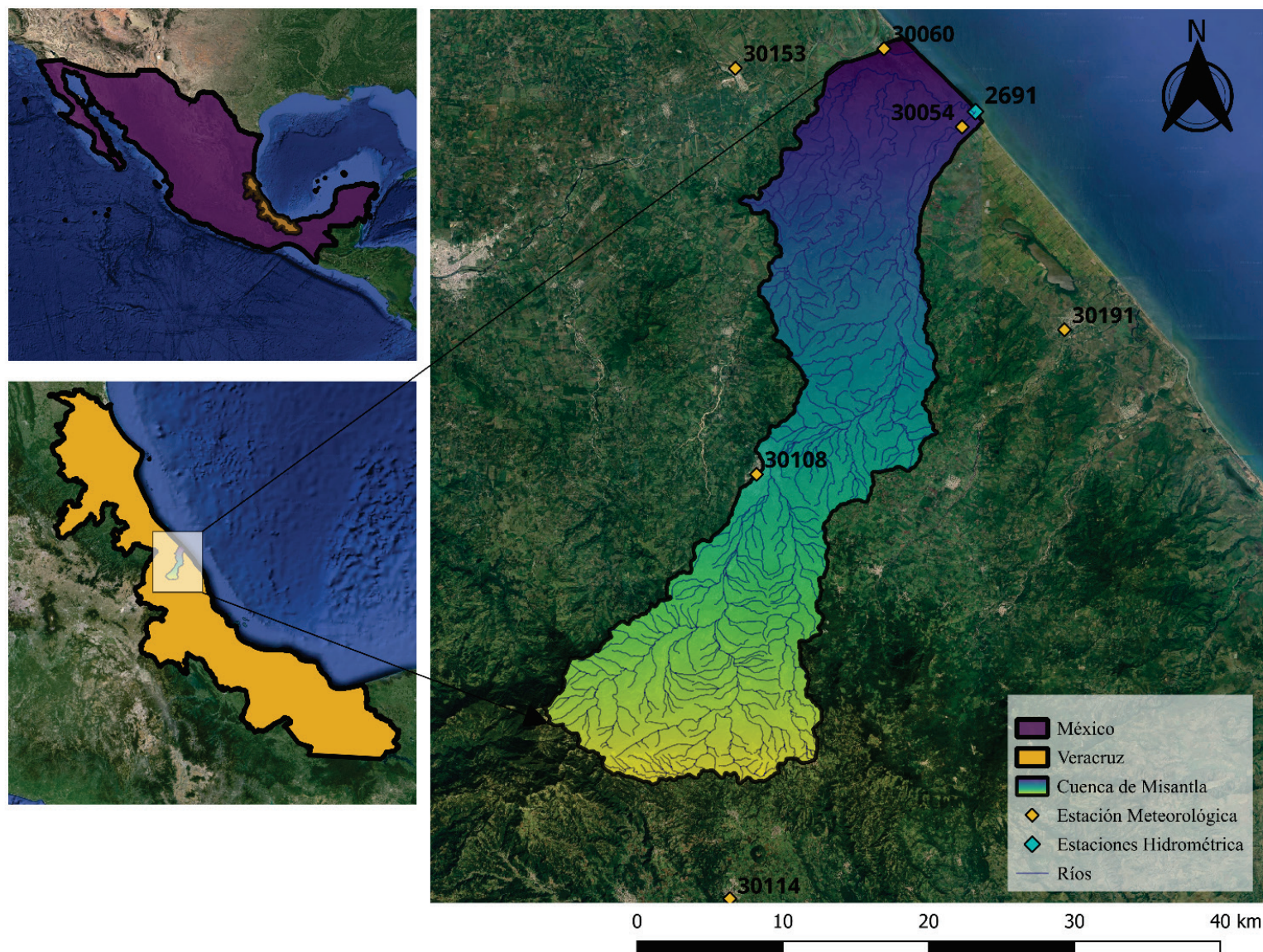


Figura 2. Mapa de la cuenca de Misantla, Veracruz (México), donde se muestran la ubicación de la estación meteorológica y las estaciones hidrométricas utilizadas.

La cuenca está compuesta por diversos ríos y escurrimientos, entre ellos destaca el río Palmas —antes conocido como río Grande— y el río Palchán. Estos dos cuerpos de agua se unen para formar el río Misantla,

el cual da nombre a la cuenca, para finalmente desembocar al Golfo de México a través de Barra de Las Palmas. La temperatura máxima promedio en la región es de 33.0 °C, mientras que la mínima es de 22.8 °C. Además, la precipitación anual acumulada es de 1 662 mm (Conagua, 2024).

Información hidrometeorológica

Una vez recopilada toda la información de las estaciones cercanas a la cuenca de Misantla, se seleccionaron aquellas estaciones que contaban con series de datos completos. Dicha información fue obtenida de las bases de datos de la Comisión Nacional del Agua (Conagua) (Conagua, 2024) y de los boletines publicados de la Comisión Federal de Electricidad (CFE). Estas seis estaciones meteorológicas son las siguientes: El Raudal (30054), Misantla (30108), Naolinco de Victoria (30114), Vega de la Torre (30191), San Rafael (30153) y Fanal de Nautla (30060). Se seleccionó una estación hidrométrica ubicada en el punto de salida de la cuenca de Nautla. Dicha estación hidrométrica es El Raudal (30054). El periodo seleccionado, correspondiente al año 1987, se eligió debido a la coincidencia de los datos disponibles y a que en dicho año la cuenca fue aforada, lo que permitió obtener mediciones precisas y representativas del comportamiento hidrológico de la región; mismo periodo de la simulación. Cabe destacar que 1987 coincidió con un evento del fenómeno El Niño, el cual tuvo un impacto significativo en los patrones climáticos de México. En la Figura 3 se representa la precipitación efectiva calculada y el gasto registrado en la estación hidrométrica (El Raudal). En la Figura 3 se puede observar que existen diferentes avenidas en un plazo de un año. Tales avenidas se analizaron para el posterior análisis hidrológico.

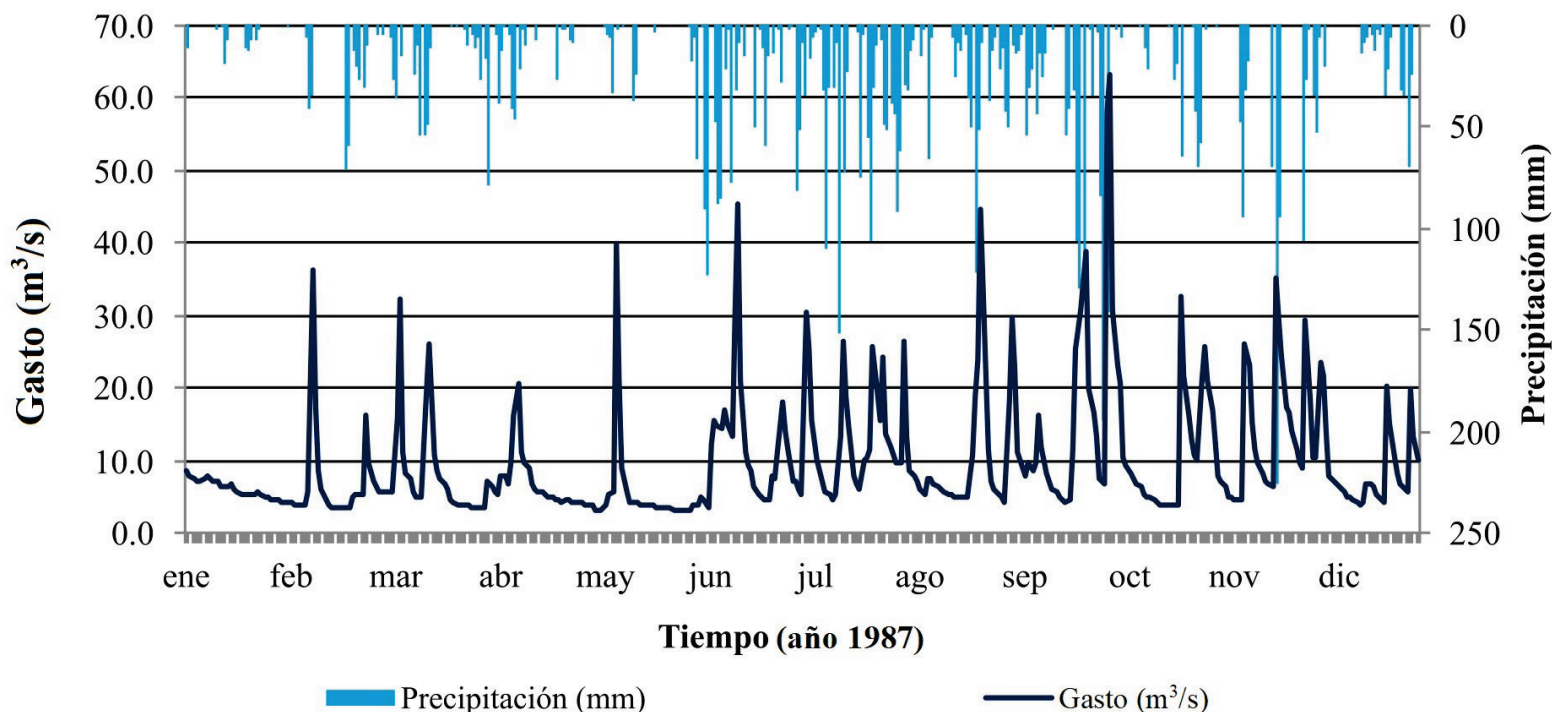


Figura 3. Datos hidrometeorológicos diarios de la cuenca de Misantla en 1987. La línea azul celeste representa las precipitaciones y la línea azul marino el caudal.

Curvas índice vs. índice de infiltración media (Φ)

Para construir las curvas IPA vs. Φ fue necesario detectar las avenidas en el periodo de simulación. Tal detección fue a criterio del incremento del caudal en un determinado tiempo. Se detectaron 26 avenidas en 1987. La Figura 4 representa las curvas IPA vs. Φ , las cuales fueron elaboradas considerando los registros de precipitación efectiva y del escurrimiento en las estaciones hidrométricas. Las consideraciones para la construcción de estas curvas fueron para aquellos casos en los que alguna estación no

registró; la precipitación media se obtuvo con base en un promedio aritmético, mientras que en aquellos casos donde todas las estaciones contaron con registro de precipitación de forma simultánea, se obtuvo por medio de polígonos de Thiessen.

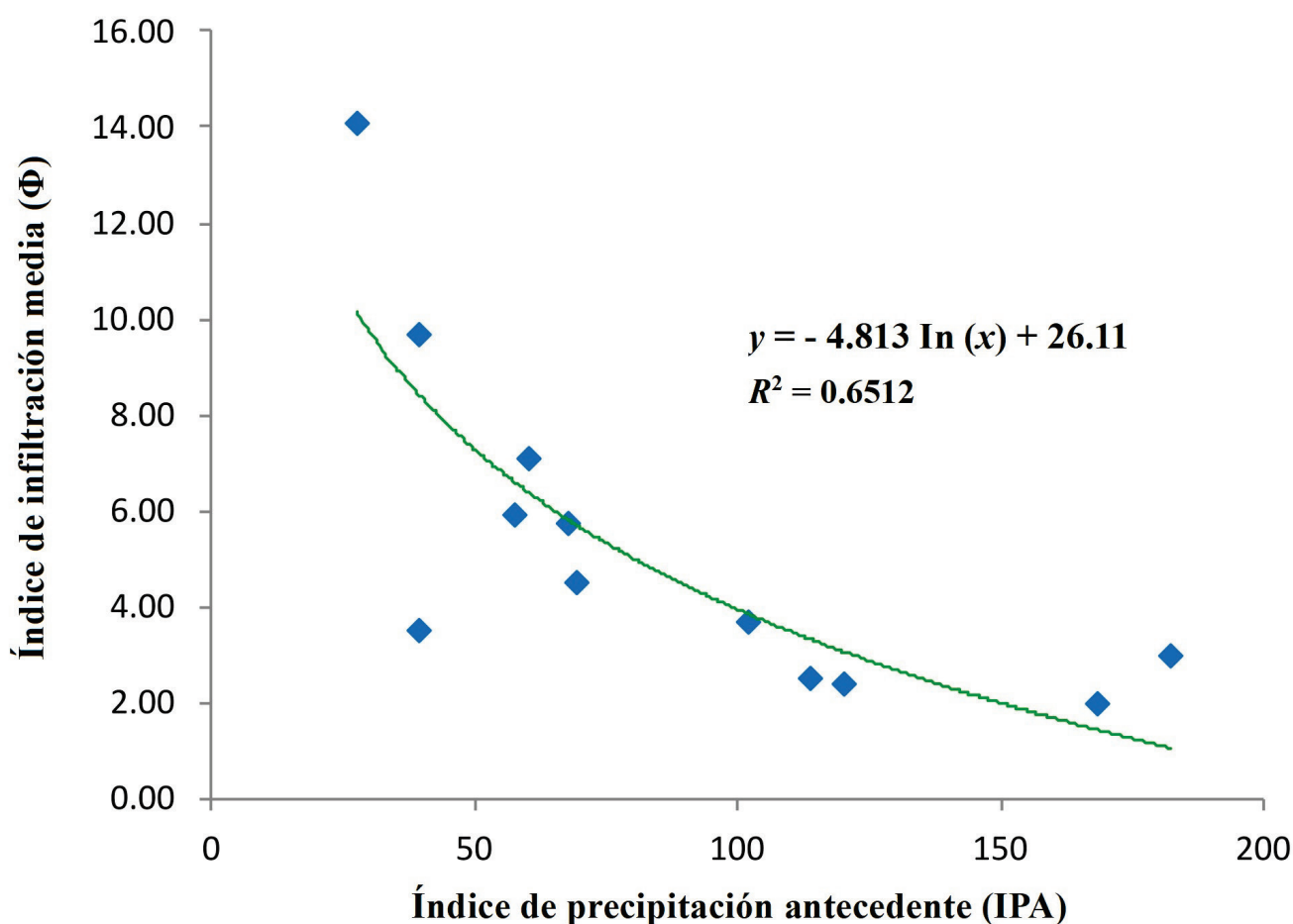


Figura 4. Curvas IPA vs. ϕ de la cuenca de Misantla.

Al calcular la precipitación media en la cuenca, se procede a calcular el IPA correspondiente; este criterio relaciona el índice de infiltración media Φ con las condiciones de humedad del suelo y es útil para

problemas de predicción de avenidas a corto plazo. Las condiciones de humedad del suelo se representan mediante el índice de precipitación antecedente IPA definido en la Ecuación (1)

$$IPA_{j+1} = K \cdot IPA_j + P_j \quad (1)$$

Donde:

P = precipitación total

K = constante que refleja la disminución de la humedad a lo largo del tiempo, cuyo valor se puede asignar como 0.85

Adaptación del algoritmo del filtro de Kalman discreto (FKD) a la hidrología

En una primera fase se optó por emplear la función de respuesta del hidrograma unitario instantáneo (HUI) para calcular los caudales de entrada a la cuenca Misantla, siguiendo el método descrito por Morales-Velázquez *et al.* (2014). Para ilustrar tal metodología, se presenta un hietograma de precipitación efectiva, como se muestra en la Figura 5, el cual genera un hidrograma utilizando el HUI. En el siguiente apartado se explicarán las ecuaciones relacionadas con la conformación del algoritmo del filtro de Kalman discreto. A continuación, se propone utilizar una segunda función de respuesta, conocida como modelo de tanque lineal (TL). Este modelo, propuesto por Masami (Sugawara, 1984), calcula el escurrimiento relacionando el área de almacenamiento del río con un número de recipientes de almacenamiento. La incorporación de estas dos funciones permitirá comprender el funcionamiento del FKD y hacer una

comparación para determinar cuál de las funciones representa mejor los caudales máximos o las avenidas.

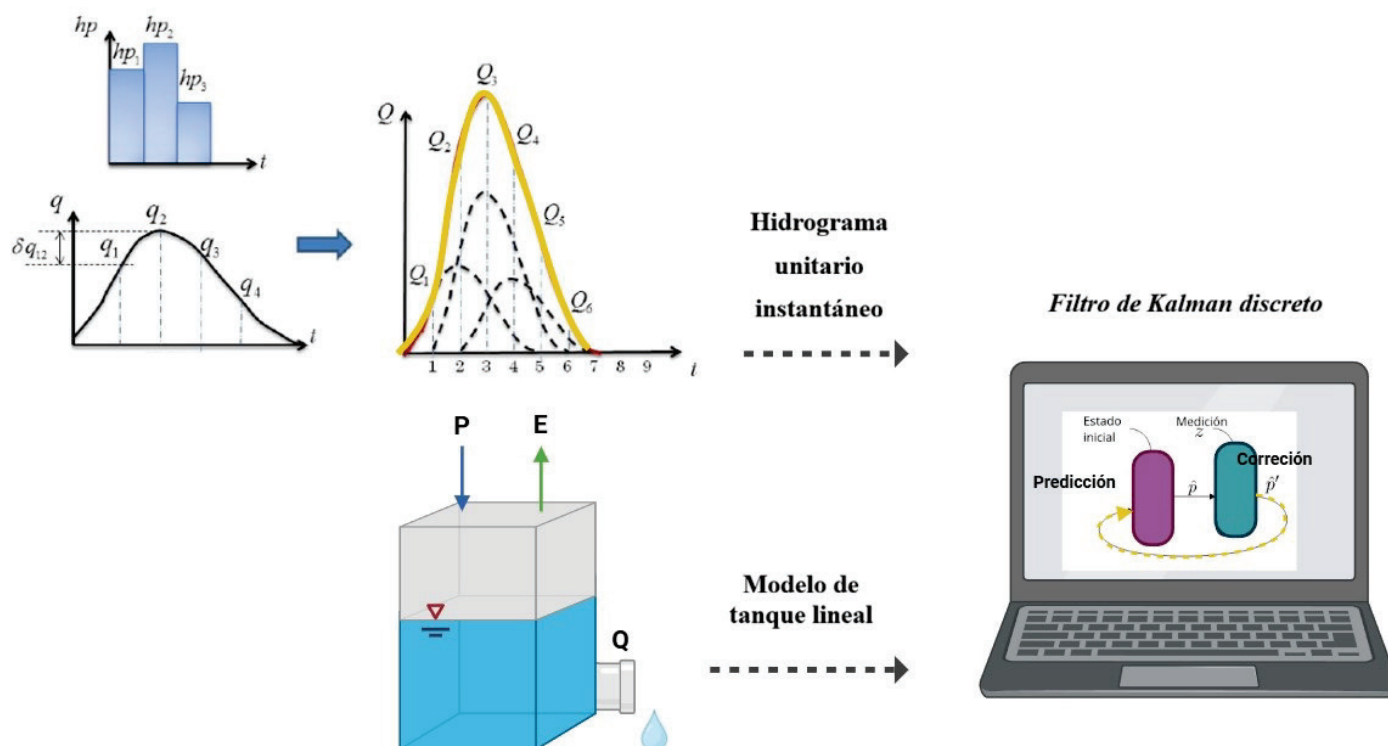


Figura 5. Diagrama que ilustra la conformación de las dos funciones de respuesta utilizadas en el filtro de Kalman discreto (FKD): el hidrograma unitario instantáneo (HUI) y el modelo de tanque lineal (TL).

El propósito de comparar las dos funciones, HUI y TL, es evaluar y seleccionar la función de respuesta más adecuada para modelar los eventos extremos de caudal en la cuenca, lo cual es crucial para mejorar la precisión de las predicciones hidrológicas y la gestión de riesgos asociados con el agua. Es la primera vez que se utilizan estas dos técnicas en conjunto para la evaluación de los caudales en la cuenca de Misantla mediante el filtro de Kalman discreto (FKD).

Adaptación del algoritmo del filtro de Kalman discreto (FKD) a la hidrología

Las variables a estimar mediante la aplicación del algoritmo del FKD serán los incrementos entre las ordenadas de la función de respuesta de la cuenca, en este caso representada por el HUI. El vector que contiene a estos incrementos en la nomenclatura del filtro es conocido como estado, denotado por x_k . Con base en lo anterior, las ecuaciones (2) y (3) tanto de estado como de medición que conforman el filtro de Kalman se representan como:

Ecuación de estado:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_{k-1} \quad (2)$$

Donde:

x_k = estado a estimar en el tiempo k (incrementos entre las ordenadas de la función de respuesta, HUI)

$A[n \times n]$ = matriz identidad que relaciona el estado en el momento $k - 1$ con el que ocurre en k ; sus dimensiones dependen de n

x_{k-1} = estado estimado en un paso anterior

$B[n \times n]$ = matriz que relaciona el control opcional de entradas con el estado. Definida como una matriz identidad con las mismas dimensiones que la matriz A

$u_k[n \times 1]$ = matriz que representa el control opcional de entradas; será considerado como un vector de ceros de dimensiones $n \times 1$ debido a que

el sistema no contiene variables que se puedan controlar y que influyan en su respuesta

w_{k-1} = error en el proceso, absorbido por aquellas precipitaciones que aún no han sido registradas

Ecuación de medición:

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (3)$$

Donde la Ecuación (4):

$$z_k = Q_k - Q_{k-1} \quad (4)$$

Donde:

Q_k y Q_{k-1} = representan el caudal medido en el tiempo k y $k-1$, respectivamente

$H[1 \times n]$ = vector que contiene los valores a convolucionar con los incrementos entre las ordenadas de la función de respuesta, conformado en este caso por las mediciones de precipitación efectiva previas al momento k analizado ($H = [hp_{t-1}, hp_{t-2}, \dots, hp_{t-n}]$)

La matriz de covarianza del error del estado inicial (Ecuación (5)) será:

$$P_0 = N \cdot I \quad (5)$$

Donde:

N = escalar lo suficientemente grande que refleja la incertidumbre de los valores supuestos para el estado inicial, en concordancia con Morales-Velázquez *et al.* (2014) y Valdés *et al.* (1980)

I = matriz identidad de dimensión $n \times n$

Mientras que la Ecuación (6) de la proyección del estado hacia adelante (pronóstico) se define como:

$$\hat{x}_{\bar{k}} = \hat{x}_{k-1} \quad (6)$$

Donde:

$\hat{x}_{\bar{k}}$ = estado estimado *a priori*

$\hat{x}_{k-1}$ = estimación del estado en el tiempo $k - 1$. Esta variable se irá modificando con cada ciclo de pronóstico y actualización. Su valor inicial se supone, en este caso, como un vector nulo

La Ecuación (7) que representa la ecuación de la proyección de la matriz de covarianza del error hacia adelante ($P_{\bar{k}}$):

$$P_{\bar{k}} = P_{k-1} + S \quad (7)$$

Donde:

$S[n \times n]$ = matriz de covarianza de la perturbación del proceso.

Con las ecuaciones anteriores se obtiene el pronóstico del estado, es decir, de los incrementos entre las ordenadas de la función de

respuesta del sistema (HUI), así como de la matriz de covarianza del error.

Una vez obtenidos, el pronóstico de los caudales se calcula como en la Ecuación (8):

$$Q_{est1} = H \cdot \hat{x}_k + Q_{k-1} \quad (8)$$

Donde:

Q_{est1} = pronóstico del caudal de entrada a la cuenca

$\hat{x}_k$ = pronóstico del estado (incrementos entre las ordenadas del HUI)

Q_{k-1} = caudal registrado en el tiempo $k - 1$. Tomado de la serie de gastos

La Ecuación (9) define el cálculo de la ganancia de Kalman (K_k):

$$K_k = P_{\bar{k}} H^T (H P_{\bar{k}} H^T + R)^{-1} \quad (9)$$

Donde:

$P_{\bar{k}}$ = matriz de covarianza del error calculada con anterioridad en las ecuaciones de predicción

R = matriz de covarianza de la perturbación o ruido en la medición

Para el caso del presente trabajo, estará representada por $R = \alpha \cdot Q_{k-1}$, donde α es una constante de proporcionalidad que representa un error constante igual a una fracción α del caudal medido en el tiempo anterior $k - 1$.

Actualización del pronóstico con base en las mediciones actuales Z_k (Ecuación (10)):

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{\bar{k}} + K_k (z_k - H\hat{x}_{\bar{k}}) \quad (10)$$

Donde:

$\hat{x}_k$ = actualización del estado, corregido considerando las nuevas mediciones en el sistema

K_k = ganancia de Kalman que permite realizar la corrección en el nuevo pronóstico (Ecuación (9))

z_k = diferencia entre el caudal "observado" en k con el observado en $k - 1$ ($Q_k - Q_{k-1}$) (Ecuación (4))

Actualización de la matriz de covarianza como se muestra en la Ecuación (11):

$$P_k = (1 - K_k H) P_{\bar{k}} \quad (11)$$

Donde:

P_k = matriz de covarianza corregida, calculada con base en las nuevas mediciones del sistema

$P_{\bar{k}}$ = matriz de covarianza estimada *a priori* en la primera etapa de predicción del FGD

Las matrices de la covarianza del error en el proceso (S) y de la medición (R) utilizados en las ecuaciones de predicción y actualización del sistema se propusieron constantes (Hino, 1973; Valdés *et al.*, 1980).

Para el caso del ensamble de la función de respuesta del modelo de TL, la Ecuación (12) se presenta de la siguiente manera:

$$Q(t + 1) = Q(t)e^{-k\Delta t} + I(t)(1 - e^{-k\Delta t}) \quad (12)$$

Esta ecuación modela el comportamiento dinámico del caudal en un sistema donde se combinan efectos de decaimiento y la influencia de entradas externas. En el contexto del TL, se asume que el sistema se comporta como un tanque con una capacidad y dinámica lineales. El término $Q(t)e^{-k\Delta t}$ refleja la parte del caudal en el tiempo t , que disminuye exponencialmente debido al decaimiento natural o pérdidas del sistema. Aquí, k es la constante de decaimiento, que determina la rapidez con la que el caudal disminuye, mientras que Δt es el intervalo de tiempo en el que se realiza la actualización.

Por otro lado, $I(t)(1 - e^{-k\Delta t})$ representa la contribución de una entrada externa al caudal del sistema. Esta entrada puede ser cualquier factor externo, como el flujo de agua añadido al sistema por precipitaciones o afluencias. La ponderación $(1 - e^{-k\Delta t})$ ajusta la influencia de esta entrada externa y refleja cómo se incorpora al caudal en el próximo intervalo de tiempo $(t + 1)$.

El modelo del TL es útil para representar sistemas donde el caudal se ajusta de forma lineal en respuesta a las entradas y pérdidas. Es especialmente valioso en aplicaciones hidrológicas y de ingeniería para predecir cómo los cambios en el flujo de entrada afectan al caudal a lo largo del tiempo, facilitando una gestión más eficiente de los recursos hídricos, y mejorando la capacidad para anticipar y responder a variaciones en el caudal. Dicho enfoque proporciona una base sólida para

la simulación y el control de sistemas hidráulicos, lo cual permite una evaluación precisa de cómo las dinámicas del sistema influyen en el caudal.

Se utilizó el estadístico de eficiencia de Nash y Sutcliffe (1970) para proporcionar una medida completa del rendimiento del modelo (Bennett *et al.*, 2013).

La eficiencia de Nash-Sutcliffe (NSE) es un estadístico normalizado que determina la magnitud relativa de la varianza residual (ruido) en comparación con la varianza de los datos medidos, como se muestra en la Ecuación (13):

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (13)$$

El indicador NSE oscila entre $-\infty$ y 1 (1 incluido, con NSE = 1 valor óptimo). Los valores entre 0 y 1 corresponden a niveles de rendimiento aceptables; mientras que los valores inferiores a 0 indican un ajuste deficiente.

y_i = i -ésimo valor observado

$\hat{y}_i$ = i -ésimo valor predicho

$\bar{y}$ = media del valor observado

n = tamaño de la muestra

En la aplicación del filtro de Kalman para la estimación de caudales en cuencas hidrográficas se utilizó una métrica compuesta (basada en la eficiencia de Nash-Sutcliffe) para asegurar una evaluación robusta y precisa del rendimiento del modelo. El desempeño del filtro de Kalman se

optimiza integrando una parametrización detallada de los parámetros del sistema, como las características hidrológicas de la cuenca, y ajustando las constantes del modelo de acuerdo con las mediciones observadas, lo que permite una corrección precisa de las predicciones a medida que se reciben nuevos datos (Gong *et al.*, 2023).

Resultados y discusión

Después de integrar las dos funciones en el algoritmo del FKD (HUI y TL), se procedió a calcular los caudales con ambas funciones, en un periodo hidrológico de un año (1987). Los resultados obtenidos se tienen en la Figura 6, la cual muestra el comportamiento de los caudales observados diarios; se puede observar que existen más de 20 avenidas, y una avenida extrema provocada a mediados y finales de septiembre. Esta avenida registró un caudal de 271.6 m³/s. La primera función HUI se comporta similar a la curva de los caudales observados; sin embargo, en el periodo de octubre a diciembre de 1987, la función tiende a sobrestimar los caudales. En la máxima avenida, ocurrida en septiembre de 1987, se observa una sobrestimación del 30 %, en comparación con el caudal observado. La segunda función TL al principio del periodo se comporta similar al caudal observado; esta función casi siempre se mantiene con resultados conservadores y no registra caudales por encima del caudal observado, a diferencia de la función HUI. Para un análisis más detallado se dividió la curva de caudales en cuatro escenarios distintos, lo que permitió visualizar y comprender mejor los resultados obtenidos.

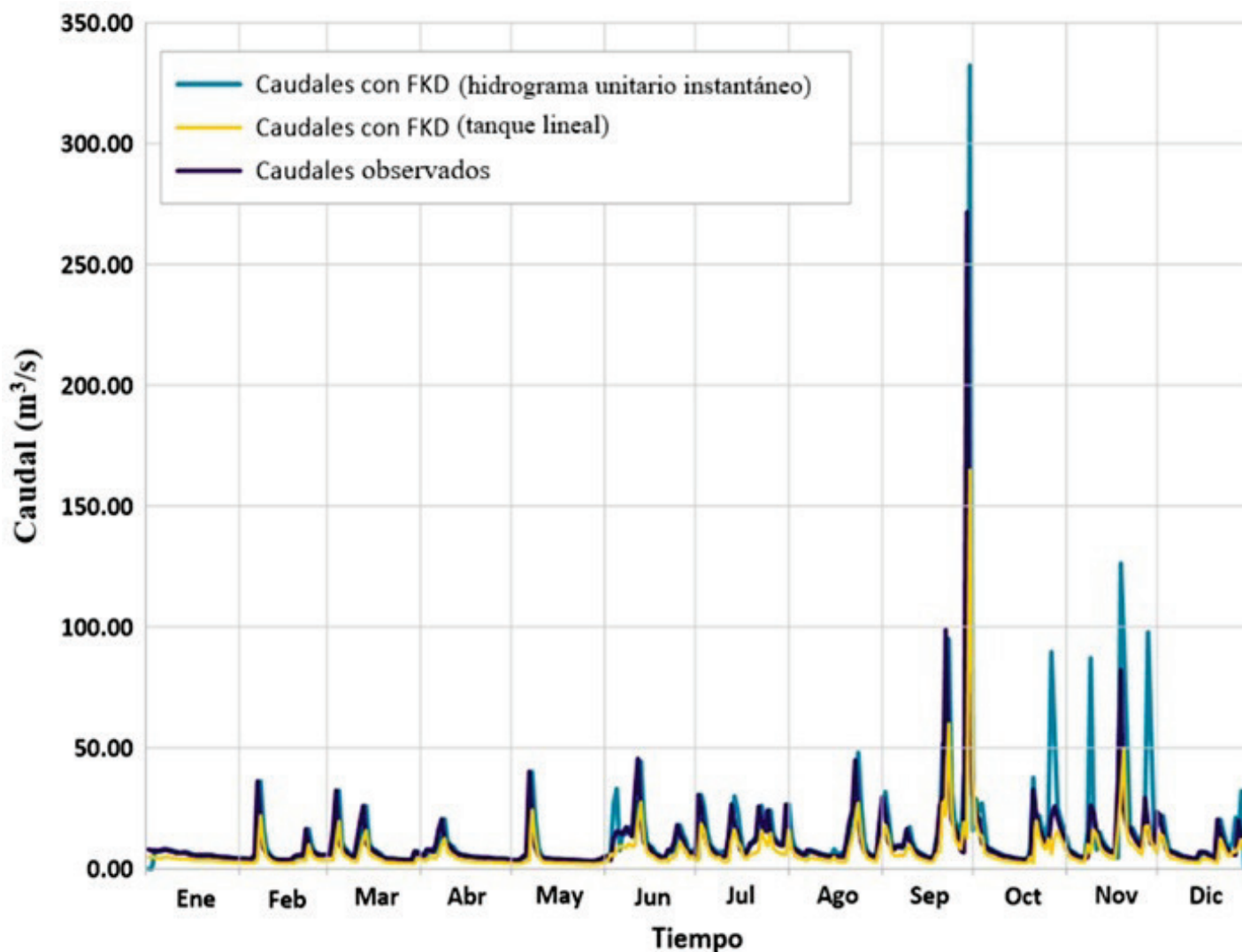


Figura 6. Caudales observados y pronosticados con el filtro de Kalman discreto (FKD) usando las funciones de respuesta HUI y TL. Línea azul para caudales observados; línea naranja para TL; línea azul celeste para HUI.

En el conjunto de avenidas I, durante el periodo de enero a abril, el caudal máximo registrado fue de 36.1 m³/s; en la Figura 7 se observa cómo las dos funciones del FKD covolucionan de modo similar al caudal observado. Se nota que la función del modelo del TL se comporta de forma

conservadora; en todo el escenario registra caudales abajo del caudal observado; mientras que la función HUI reproduce un instante después la avenida observada, pero sus curvas de caudales son similares a los caudales observados. Por otro lado, se aprecia un efecto que puede observarse en el conjunto de avenidas I: el inicio de las curvas. En la curva del hidrograma empieza en el valor cero, mientras que la curva del TL empieza por el valor 5.00. Este comportamiento ocurre por la matriz de covarianza del error. Existen múltiples criterios para determinar el valor de la matriz de covarianza del error en el proceso. Por ejemplo, Welch y Bishop (2006) mencionan que tanto la matriz (S) como la matriz (R) pueden ser consideradas como constantes en la aplicación del FKD debido a la dificultad que representa conocer los errores en la medición y en la representación de un proceso estocástico. Por otro lado, Sunmin, Tachikawa y Takara (2004) afirman que dado que los sistemas hidrológicos son procesos naturales, lo más adecuado es suponer los valores de estas matrices de la manera más razonable posible.

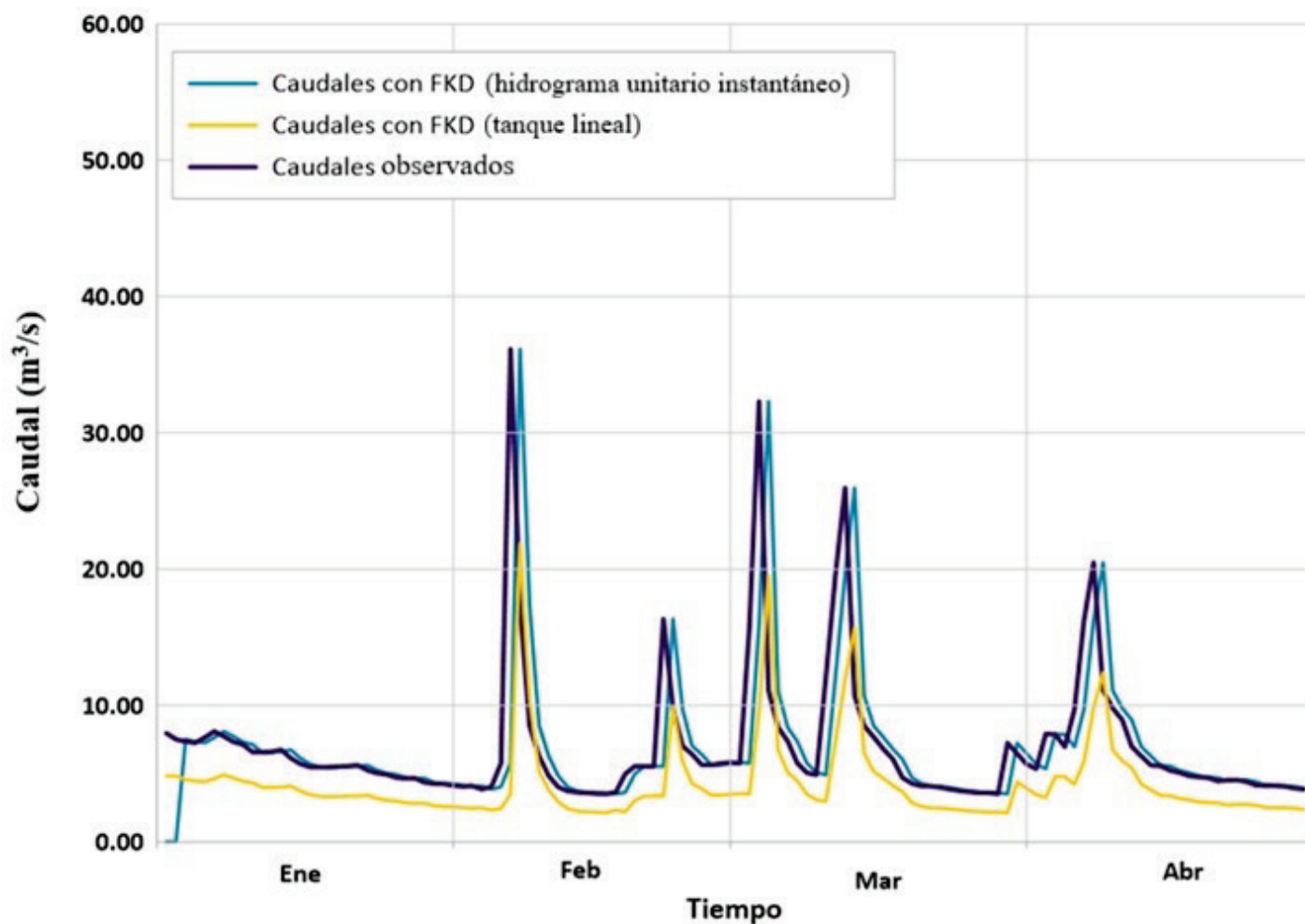


Figura 7. Conjunto de avenidas I, correspondiente a enero-abril de 1987 para la cuenca de Misantla.

En el escenario de conjunto de avenidas II (Figura 8) se observaron seis avenidas en un periodo de tres meses. En la curva de caudales de la función HUI se puede observar que pronóstico una avenida en el mes de mayo que no ocurrió en la curva del caudal observado. Esto posiblemente fue un error del modelo o un error de medición del caudal observado por los operarios; las dos posibles hipótesis suelen ser posibles en la

hidrología. En la avenida registrada al final de junio, el caudal máximo observado fue de 45.4 m³/s, mientras que las funciones del HUI y TL registraron un caudal de 44.4 y 27.5 m³/s, respectivamente. Se puede observar un efecto interesante en el que, a veces, los modelos distribuidos de hidrología fallan al reproducir el comportamiento cíclico de las avenidas, pues ambas funciones lo representan de manera adecuada.

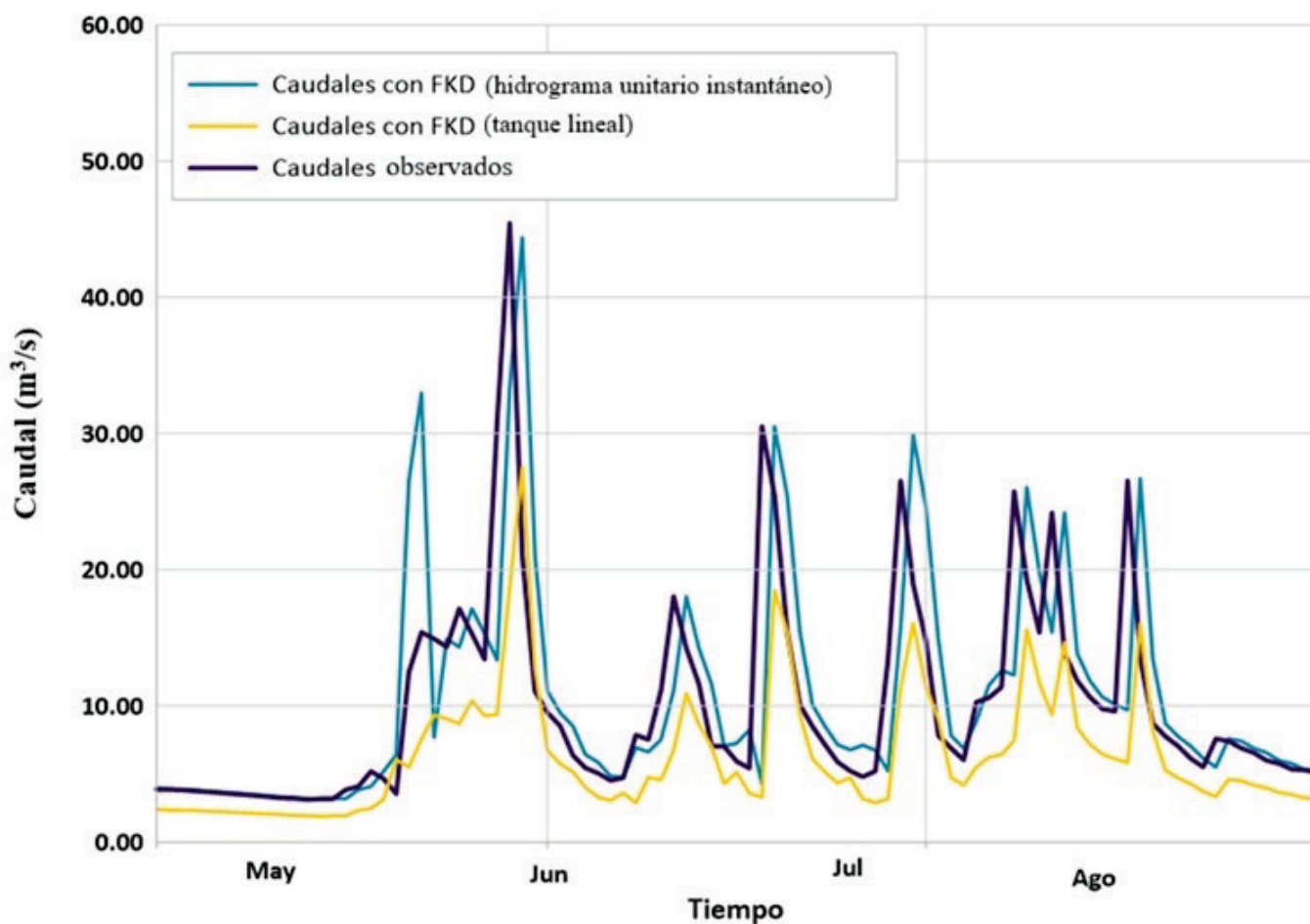


Figura 8. Conjunto de avenidas II, correspondiente a (Mayo - Agosto de 1987) en la cuenca de Misantla.

En el conjunto de avenidas III se observan cuatro avenidas, como se muestra en la Figura 9. En septiembre ocurrió la máxima avenida de todos los escenarios, con un caudal observado de más de $271.6 \text{ m}^3/\text{s}$; esto desafía a las funciones, para ver si son capaces de reproducir este caudal máximo. El registro obtenido de la curva de la función del HUI fue de más de $332.3 \text{ m}^3/\text{s}$, acercándose al valor observado, mientras que la función del modelo del TL dio como resultado un valor cercano de un poco más de $164.9 \text{ m}^3/\text{s}$. Dicha avenida duró 12 días. En la bibliografía literaria se menciona que es preferible sobrestimar una avenida utilizando modelos (Haltas, Yildirim, Oztas, & Demir, 2021), por lo tanto, el cálculo de la avenida utilizando la función del HUI tiende a sobrestimar la avenida máxima ocurrida en septiembre de 1987, lo que dificulta la estimación precisa, en comparación con el cálculo de la avenida mediante la función del modelo de tanque lineal (TL), que subestima la avenida observada. Ambos enfoques generan un intervalo de posibles caudales, estableciendo un límite superior (HUI) y un límite inferior (TL). En consecuencia, ambos resultados deben considerarse de manera integral para una estimación más precisa de las avenidas.

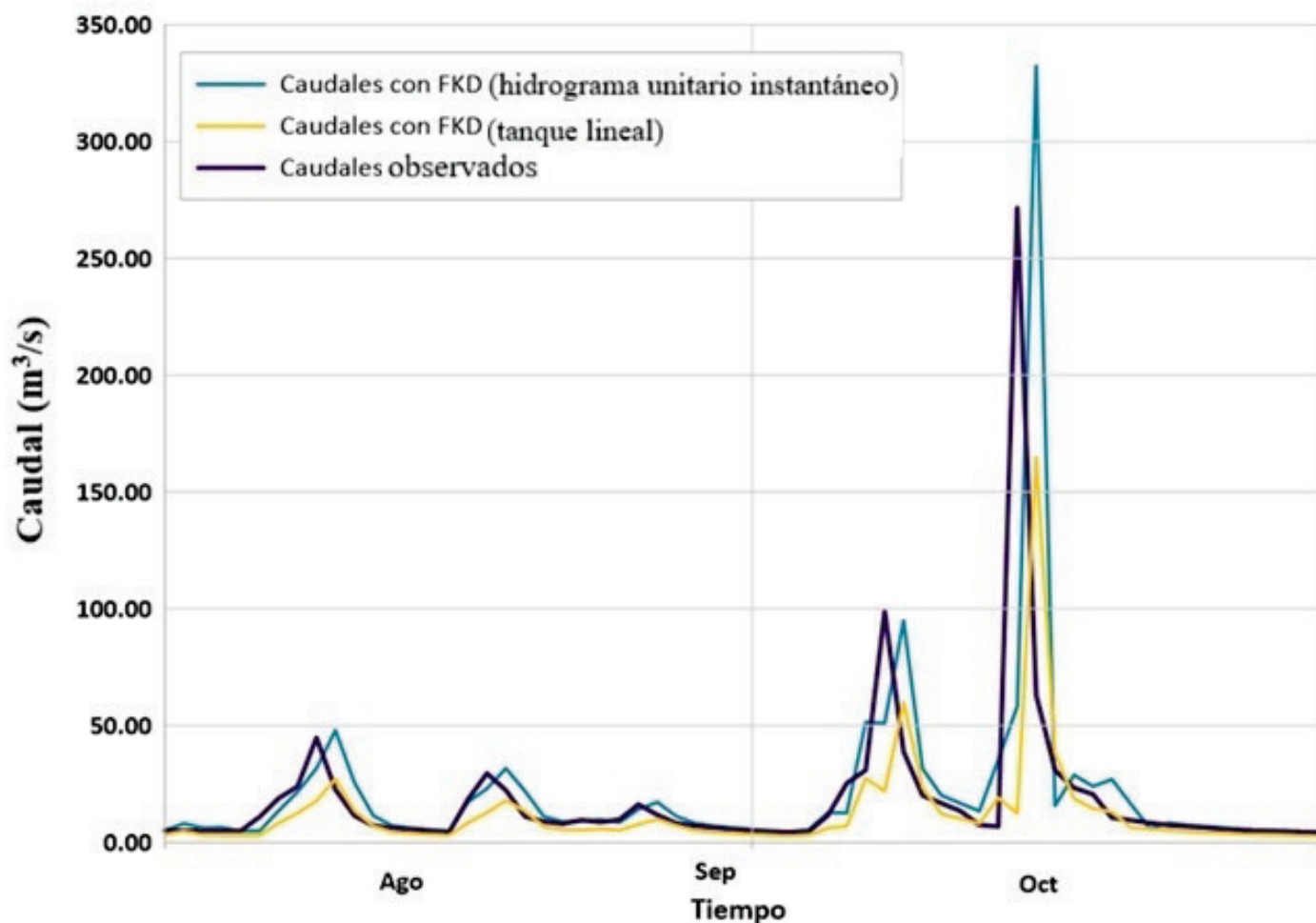


Figura 9. Conjunto de avenidas III, correspondiente a agosto-octubre de 1987 en la cuenca de Misantla.

El último escenario considerado en este análisis de avenidas fue del periodo de octubre a diciembre mostrado en la Figura 10, donde se tienen ocho avenidas con caudales medios observados de 12.5 m³/s. Se observa un comportamiento de la función HUI notablemente diferente a los caudales observados; este efecto se debe que en el escenario III, la función sobrestimó las avenidas. Dicho patrón de sobrestimación se debe al ajuste realizado en el escenario III, lo que provoca que los caudales se

vean sobrestimados a partir de la avenida máxima en el escenario IV. Por otro lado, la función del modelo del TL tiene un comportamiento similar a los caudales observados.

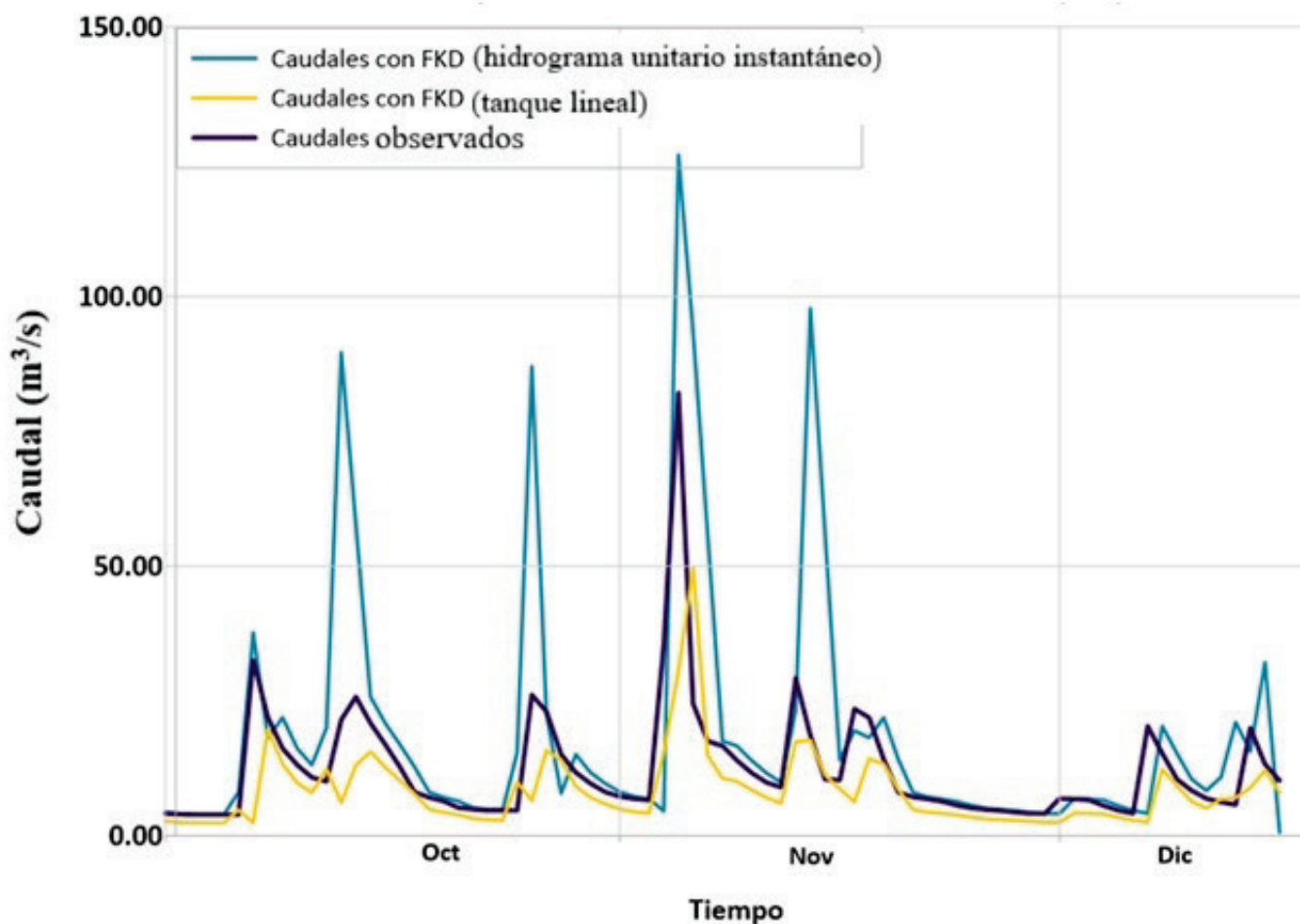


Figura 10. Conjunto de avenidas IV, correspondiente a octubre-diciembre de 1987 en la cuenca de Misantla.

La Tabla 1 compara el desempeño de los métodos hidrograma unitario instantáneo (HUI) y modelo de tanque lineal (TL) en la predicción y actualización de caudales. Ambos métodos tienen desviaciones estándar

similares para los caudales observados, pero el HUI presenta mayor variabilidad en sus caudales pronosticados y actualizados en comparación con el TL. En términos de correlación, el TL muestra una correspondencia significativamente mejor con los caudales observados tanto en pronósticos como en actualizaciones, lo que refleja una mayor precisión. El índice Nash-Sutcliffe también resalta la superioridad del TL, con valores positivos que indican una buena replicación del caudal observado; mientras que el HUI tiene índices negativos y bajos, sugiriendo un ajuste menos preciso. Por último, aunque las medias de los caudales observados son similares entre los dos métodos, el HUI tiende a sobrestimar tanto los caudales pronosticados como los actualizados en comparación con el TL. En resumen, el modelo de TL ofrece una mejor precisión y alineación con los datos observados, mientras que el HUI muestra una mayor variabilidad y menor exactitud en sus predicciones.

Tabla 1. Estadísticos aplicados utilizando el FKD con las funciones de respuesta HUI y TL.

Medición	HUI	TL
Desviación estándar del caudal observado (m^3/s)	17.0236	16.9554
Desviación estándar del caudal pronosticado (m^3/s)	22.2197	10.4467
Desviación estándar del caudal actualizado (m^3/s)	22.5636	13.9581
Correlación entre el caudal observado y el pronosticado (m^3/s)	0.8611	0.9909
Correlación entre el caudal observado y el actualizado (m^3/s)	0.9332	0.9989
Índice de Nash-Sutcliffe del caudal observado y el pronosticado (m^3/s)	-0.5649	0.7836
Índice de Nash-Sutcliffe del caudal observado y el actualizado (m^3/s)	0.1971	0.9553
Media del caudal observado (m^3/s)	10.9587	10.9345
Media del caudal pronosticado (m^3/s)	12.3576	7.0223
Media del caudal actualizado (m^3/s)	12.4625	9.1568

Conclusiones

El ensamblaje del filtro de Kalman discreto (FDK), utilizando las funciones HUI y el modelo de TL, demuestra ser una herramienta efectiva en la hidrología, en especial para el cálculo de avenidas. Los resultados muestran que la función HUI es capaz de replicar de forma adecuada los caudales observados y es muy útil para capturar eventos extremos, aunque tiende a sobrestimar los caudales en algunos casos. Esta sobrestimación puede ser ventajosa para la planificación y preparación ante eventos extremos. Por otro lado, la función TL proporciona estimaciones más conservadoras, por lo general por debajo de los caudales observados. Aunque esta función puede subestimar los eventos extremos, su comportamiento conservador es útil para evitar sobrestimaciones en la gestión de recursos hídricos.

La variabilidad en el desempeño de ambas funciones según diferentes escenarios indica que una estrategia combinada puede ser la más efectiva. La función HUI, con su capacidad para sobrestimar caudales, ofrece un límite superior valioso; mientras que la función TL, al ser más conservadora, proporciona un límite inferior. Tal combinación permite una evaluación más completa y equilibrada de los caudales y eventos de avenidas. Además, el ajuste de la matriz de covarianza del error en proceso, que afecta el inicio de las curvas de caudales, resalta la importancia de ajustar estos parámetros para mejorar la precisión del modelo.

En resumen, el uso del FDK con estas funciones ofrece un enfoque óptimo para la hidrología, al proporcionar una evaluación detallada y adaptativa de los caudales. La integración de las estimaciones de ambas

funciones permite una mejor planificación y gestión de eventos extremos, y facilita una evaluación más completa de las avenidas en distintos escenarios hidrológicos.

Agradecimientos

Después de 12 años tuve la oportunidad de escribir este artículo gracias al apoyo invaluable de Mirce Morales-Velázquez, quien me enseñó el filtro de Kalman en 2013, y al doctor Javier Aparicio Mijares, quien me acogió y guio en Hidrología en la UNAM. El apoyo de ambos fue muy bonito. Aunque mi carrera me llevó a hacer ciencia en Europa, su ayuda marcó un antes y un después, y por ello dedico este artículo a ambos. La ciencia siempre llega, sin importar cuándo. Gracias.

Referencias

- Ahsan, M., & O'Connor, K. M. (1994). A reappraisal of the Kalman filtering technique, as applied in river flow forecasting. *Journal of Hydrology*, 161(1), 197-226. [https://doi.org/10.1016/0022-1694\(94\)90129-5](https://doi.org/10.1016/0022-1694(94)90129-5)
- Alvarado-Hernández, L., Ibáñez-Castillo, L. A., Ruiz-García, A., González-Leiva, F., & Vázquez-Peña, M. A. (2020). Pronóstico horario de caudales mediante filtro de Kalman discreto en el río Huaynamota, Nayarit, México. *Agrociencia*, 54(3), 295-312. <https://doi.org/10.47163/agrociencia.v54i3.1907>

- Bennett, N. D., Croke, B. F. W., Guariso, G., Guillaume, J. H. A., Hamilton, S. H., Jakeman, A. J., Marsili-libelli, S., Newham, L. T. H., Norton, J. P., Perrin, C., Pierce, S. A., Robson, B., Seppelt, R., Voinov, A. A., Fath, B. D., & Andreassian, V. (2013). Characterising performance of environmental models. *Environmental Modelling & Software*, 40, 20. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2012.09.011>
- Brody, S. D., Peacock, W. G., & Gunn, J. (2012). Ecological indicators of flood risk along the Gulf of Mexico. *Ecological Indicators*, 18, 493-500. <https://doi.org/10.1016/j.ecolind.2012.01.004>
- Chen, X., Lee, R. M., Dwivedi, D., Son, K., Fang, Y., Zhang, X., Graham, E., Stegen, J., Fisher, J. B., Moulton, D., & Scheibe, T. D. (2021). Integrating field observations and process-based modeling to predict watershed water quality under environmental perturbations. *Journal of Hydrology*, 602, 125762. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2020.125762>
- Conagua, Comisión Nacional del Agua. (2024). *Estaciones meteorológicas automáticas (EMAS)*. Recuperado de <https://smn.conagua.gob.mx/es/observando-el-tiempo/estaciones-meteorologicas-automaticas-ema-s>
- Gong, J., Weerts, A. H., Yao, C., Li, Z., Huang, Y., Chen, Y., Chang, Y., & Huang, P. (2023). State updating in a distributed hydrological model by ensemble Kalman filtering with error estimation. *Journal of Hydrology*, 620, 129450. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2023.129450>

- González-Leiva, F., Ibáñez-Castillo, L. A., & Valdés, J. B. (2015). Pronóstico de caudales con filtro de Kalman discreto en el río Turbio. *Tecnología y ciencias del agua*, 6(4), 5-24. Recuperado de <https://www.revistatyca.org.mx/index.php/tyca/article/view/1176>
- Haltas, I., Yildirim, E., Oztas, F., & Demir, I. (2021). A comprehensive flood event specification and inventory: 1930-2020 Turkey case study. *International Journal of Disaster Risk Reduction*, 56, 102086. <https://doi.org/10.1016/j.ijdr.2021.102086>
- Hino, M. (1973). On-line prediction of hydrologic systems. *Proceedings of the 15th Congress of the International Association for Hydraulic Research (IAHR)*, 4, 243-250.
- INEGI, Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2024). *Información por entidad, Veracruz de Ignacio de la Llave*. Recuperado de <https://cuentame.inegi.org.mx/monografias/informacion/ver/territorio/clima.aspx?tema=me&e=30>
- Jazwinski, A. H. (1970). Stochastic processes and filtering theory. In: *Mathematics in science and engineering analytical* (Vol. 64). Seabrook, USA: Mechanics Associates, Inc. Recuperado de <https://www.sciencedirect.com/bookseries/mathematics-in-science-and-engineering/vol/64/suppl/C>
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1), 35-45. <https://doi.org/10.1115/1.3662552>
- Maxwell, D. H., Jackson, B. M., & McGregor, J. (2018). Constraining the ensemble Kalman filter for improved streamflow forecasting. *Journal of Hydrology*, 560, 127-140. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2018.03.015>

- Mazzoleni, M., Alfonso, L., Chacon-Hurtado, J., & Solomatine, D. (2015). Assimilating uncertain, dynamic and intermittent streamflow observations in hydrological models. *Advances in Water Resources*, 83, 323-339. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2015.07.004>
- Medina-Chena, A., Salazar-Chimal, T. E., & Álvarez-Palacios, J. L. (2010). *Atlas del patrimonio natural, histórico y cultural de Veracruz*. Veracruz, Méxco: Gobierno del Estado de Veracruz. Recuperado de <https://www.veracruz.gob.mx/atlas-patrimonio>
- Morales-Velázquez, M. I., Aparicio, J., & Valdés, J. B. (2014). Pronóstico de avenidas utilizando el filtro de Kalman discreto. *Tecnología y ciencias del agua*, 5(2), 85-110. Recuperado de <https://revistatyca.org.mx/index.php/tyca/article/view/466>
- Nárvaez-Ortiz, I., Ibáñez-Castillo, L. A., Arteaga-Ramírez, R., & Vázquez-Peña, M. A. (2022). Ensemble Kalman filter for hourly streamflow forecasting in Huaynamota River, Nayarit, Mexico. *Ingeniería e Investigación*, 42(3), e90023. <https://doi.org/10.15446/ing.investig.90023>
- Nash, J. E., & Sutcliffe, J. V. (1970). River flow forecasting through conceptual models. Part I-A Discussion of principles. *Journal of Hydrology*, 10, 282-290. [https://doi.org/10.1016/0022-1694\(70\)90255-6](https://doi.org/10.1016/0022-1694(70)90255-6)
- Piadeh, F., Behzadian, K., & Alani, A. M. (2022). A critical review of real-time modelling of flood forecasting in urban drainage systems. *Journal of Hydrology*, 607, 127476. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2022.127476>

- Şen, Z. (1991). Adaptive prediction of hydrologic series by Walsh-Kalman model. *Journal of Hydrology*, 122(1), 221-234.
[https://doi.org/10.1016/0022-1694\(91\)90179-L](https://doi.org/10.1016/0022-1694(91)90179-L)
- Sorenson, H. W. (1985). *Kalman filtering: Theory and application*. New York, USA: IEEE Press.
- Sugawara, M. (1984). *Tank model with snow component*. Tokio, Japón: National Research Center for Disaster Prevention.
- Sun, Y., Bao, W., Qu, S., Li, Q., Jiang, P., Zhou, Z., & Shi, P. (2023). Development of the consider cubature Kalman filter for state estimation of hydrological models with parameter uncertainty. *Journal of Hydrology*, 625, 130080.
<https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2023.130080>
- Sunmin, K., Tachikawa, Y., & Takara, K. (2004). Embedding Kalman filter into a distributed hydrological model. In: *WSUD2 Proceedings of the WSUD2004* (pp. 278-290). Recuperado de https://hywr.kuciv.kyoto-u.ac.jp/publications/papers/2004WSUD_Kim.pdf
- Todaro, V., D'Oria, M., Tanda, M. G., & Gómez-Hernández, J. J. (2022). GenES-MDA: A generic open-source software package to solve inverse problems via the ensemble smoother with multiple data assimilation. *Computers & Geosciences*, 167, 105210.
<https://doi.org/10.1016/j.cageo.2022.105210>

- Valdés, J. B., Velázquez, J. M., & Rodríguez-Iturbe, I. (1980). Filtros de Kalman en hidrología: predicciones de descargas fluviales para la operación óptima de embalses (Informe Técnico 80-2). Caracas, Venezuela: Universidad Simón Bolívar. Recuperado de https://scholar.google.com/scholar_lookup?title=+Filtros+de+Kalman+en+hidrolog%C3%ADa:+Predicciones+de+descargas+fluviales+para+la+operaci%C3%B3n+%C3%B3ptima+de+embalses&author=VALD%C3%89S+J.B.&author=VEL%C3%81ZQUEZ+J.M.&author=RODR%C3%8DGUEZ-ITURBE+I.&publication_year=1980
- Vargas, N., & Magaña, V. (2020). Climatic risk in the Mexico City metropolitan area due to urbanization. *Urban Climate*, 33, 100644. <https://doi.org/10.1016/j.uclim.2020.100644>
- Welch, G., & Bishop, G. (2006). *An introduction to the Kalman filter*. North Carolina, USA: University of North Carolina at Chapel Hill. Recuperado de https://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/kalman_intro.pdf