

# PRONÓSTICO DE AVENIDAS UTILIZANDO EL FILTRO DE KALMAN DISCRETO

• Mirce Ivón Morales-Velázquez\* • Javier Aparicio •  
*Universidad Nacional Autónoma de México*

\*Autor de correspondencia

• Juan B. Valdés •  
*Universidad de Arizona*

## Resumen

MORALES-VELÁZQUEZ, M.I., APARICIO, J. & VALDÉS, J.B. Pronóstico de avenidas utilizando el filtro de Kalman discreto. *Tecnología y Ciencias del Agua*. Vol. V, núm. 2, marzo-abril de 2014, pp. 85-110.

Se evalúa la utilidad y aplicabilidad del algoritmo del filtro de Kalman discreto en la predicción de caudales a corto plazo. El algoritmo se aplica a la cuenca propia de la presa Ángel Albino Corzo (Peñitas), parte del Sistema Hidroeléctrico Grijalva, y a la estación hidrométrica Sayula. El algoritmo se utiliza para determinar la función de respuesta en la cuenca y con ello pronosticar los caudales de entrada al embalse. Para esto se usan tanto los registros de caudal y de precipitación provenientes de las estaciones climatológicas ubicadas en la cuenca como los caudales calculados con el tránsito inverso en el vaso. En el análisis se evalúan varios intervalos de tiempo de pronóstico, así como diferentes tipos de función de respuesta y parámetros asociados. Los resultados son evaluados por medio del coeficiente de Nash-Sutcliffe, obteniéndose valores muy aceptables, de manera que el filtro se considera aplicable al pronóstico de avenidas a corto plazo, destacando su utilidad como una herramienta de apoyo en el desarrollo de políticas de operación y control de los embalses.

**Palabras clave:** pronóstico de avenidas a corto plazo, filtro de Kalman, Peñitas, recursivo.

## Introducción

A lo largo de la historia y en particular en años recientes, se han presentado importantes inundaciones en México y otros lugares en el mundo. Por ejemplo, en el sureste mexicano destacan las ocurridas en Chiapas en 1998; en Quintana Roo, Chiapas y Veracruz en 2005, como consecuencia de los huracanes *Emily*, *Stan* y *Wilma*; y las de Tabasco en 2003, 2010 y 2007 (Salas y Jiménez, 2004). Esta última, en particular,

## Abstract

MORALES-VELÁZQUEZ, M.I., APARICIO, J. & VALDÉS, J.B. Flood Forecasting Using the Discrete Kalman Filter. *Water Technology and Sciences (in Spanish)*. Vol. V, No. 2, March-April, 2014, pp. 85-110.

This study evaluates the usefulness and applicability of the discrete Kalman filter algorithm for predicting short-term floods. The algorithm is applied to the basin of the Ángel Albino Corzo (Peñitas) dam, which is part of the Grijalva Hydroelectric System, as well as to the Sayula Hydrometric Station. It is used to determine the response function for the basin and thus forecast flows into the reservoir. To that end, both flow data and precipitation recorded at weather stations located in the study area are used, as well as calculated inflows to the basin. This analysis evaluates multiple time increments and different response functions, as well as their associated parameters, using the Nash-Sutcliffe coefficient. Highly acceptable values were obtained, such that the filter is found to be useful for short-term flow forecasting, highlighting its usefulness as a tool to support policy development and the operational control of reservoirs.

**Keywords:** Kalman Filter, Peñitas, predicting short-term flows, recursive.

provocó el aumento de los niveles del agua en el sistema de ríos de la cuenca del Grijalva, causando inundaciones muy significativas en la mayor parte del estado de Tabasco y en Chiapas (Aparicio *et al.*, 2009; Rivera-Trejo *et al.*, 2009).

Para hacer frente a estos episodios de inundaciones mediante sistemas de alerta y criterios de operación de la infraestructura de control es importante contar con sistemas confiables y precisos de pronóstico de avenidas. El propósito del presente trabajo es evaluar la utilidad del

algoritmo del filtro de Kalman discreto para el pronóstico de avenidas a corto plazo, tomando como caso de estudio la cuenca propia de la presa Ángel Albino Corzo (Peñitas) (figura 1).

### Metodología

Se utilizará el filtro de Kalman (Kalman, 1960) para identificar la función de respuesta de la cuenca y con ella los gastos de entrada al vaso de la C.H. Peñitas mediante la convolución de dicha función de respuesta con las precipitaciones, o con los gastos y precipitaciones registrados en un lapso anterior al tiempo analizado.

El filtro de Kalman (Kalman, 1960) describe una solución recursiva para el problema del filtrado lineal de datos discretos. El filtro trata de estimar el estado  $x \in \mathcal{R}^n$  (espacio  $n$ -dimensional de los números reales) en el tiempo  $k\Delta t$  (en adelante  $k$ ) de un proceso controlado en tiempo discreto, descrito por la ecuación matricial diferencial lineal estocástica (Welch y Bishop, 2001):

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_{k-1} \quad (1)$$

con una medición  $z \in \mathcal{R}^m$ , que está representada por:

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (2)$$

La matriz  $A_{n \times n}$  en la ecuación (1) relaciona el estado en el tiempo previo  $k-1$  al estado que ocurre en el momento  $k$ ; esta matriz puede cambiar en el tiempo, pero habitualmente se considera constante (Welch y Bishop, 2001). La matriz  $B_{n \times l}$  relaciona el control opcional de entradas  $u \in \mathcal{R}^l$  con el estado  $x$  y la matriz  $H_{m \times n}$  en la ecuación (2) relaciona el estado con la medición  $z_k$ . En la práctica en hidrología,  $B_{n \times l}$  por lo general también se considera constante (*Ibid.*).

Por otra parte, las variables aleatorias  $w_k$  y  $v_k$  en las ecuaciones (1) y (2) representan el ruido en el proceso y el ruido en la medición, respectivamente. Se acepta que estas variables son independientes una de otra, que son ruido blanco (es decir, sus valores de señal en dos tiempos diferentes no guardan correlación estadística) y que tienen una función de distribución de probabilidad normal (Drécourt, 2003; Kottegoda, 1980; Kim et al., 2004):

$$p(w) \sim N(0, S) \quad (3)$$

$$p(v) \sim N(0, R) \quad (4)$$

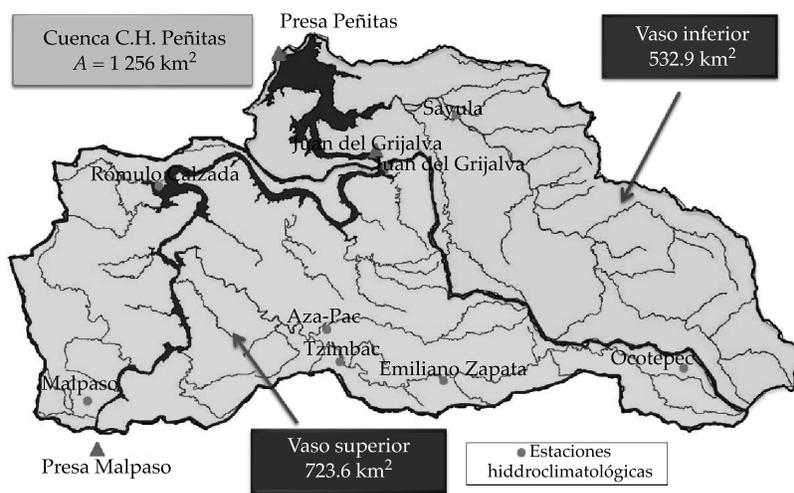


Figura 1. Cuenca de la C.H. Peñitas (Aguilar et al., 2009).

$S$  representa la *matriz de covarianza de la perturbación del proceso* y  $R$  la *matriz de covarianza de la perturbación de la medición*. Ambas matrices podrían cambiar en el tiempo; sin embargo, por simplicidad, en la práctica también se suelen suponer constantes y pueden ser representadas a su vez de la siguiente manera (Simon, 2001):

$$S = E[w_k w_k^T] \quad (5)$$

$$R = E[v_k v_k^T] \quad (6)$$

donde  $E[\bullet]$  es la esperanza matemática. Estas matrices representan, respectivamente, la variación de los errores o perturbaciones en las estimaciones del proceso o sistema analizado, y de las mediciones del mismo con respecto a la media del proceso.

El filtro de Kalman utiliza un control de retroalimentación, ya que estima el proceso en un momento en el tiempo y entonces obtiene la retroalimentación por medio de la medición de los datos observados (Welch y Bishop, 2001).

Desde este punto de vista, las ecuaciones que se utilizan para derivar el filtro de Kalman se dividen en dos grupos (*Ibid.*):

- Ecuaciones de actualización en el tiempo o ecuaciones de predicción.
- Ecuaciones de actualización con los datos observados.

Las del primer grupo son responsables de proyectar hacia adelante en el tiempo el estado actual, tomando como referencia el estado en el momento previo  $k - 1$ , así como de actualizar las estimaciones de la covarianza del error, para obtener las estimaciones *a priori* del estado para el próximo paso en el tiempo. El segundo grupo de ecuaciones es responsable de la retroalimentación, es decir, de incorporar nueva información dentro de la estimación anterior, con lo cual se llega a una estimación mejorada del estado *a posteriori*. Así, el filtro de Kalman constituye un algoritmo de *proyección-corrección* al pronosticar el nuevo estado y su incertidumbre, y corregir la proyección con la nueva medición.

La aplicación del filtro de Kalman podría resumirse en los siguientes pasos (Welch y Bishop, 2001), mostrados en la figura 2; el acento circunflejo indica estimación y el superíndice  $-$ denota que la estimación es *a priori*:

1. Generar un pronóstico del estado hacia adelante en el tiempo, tomando en cuenta toda la información disponible hasta ese momento, partiendo de la proposición inicial del estado y de la matriz de covarianza del error  $P_k^-$ .
2. Corregir la proyección del estado (proceso de actualización con las mediciones). La primera tarea dentro de esta etapa es el cálculo de la *ganancia de Kalman*,  $K_k$ . Este factor de ponderación o ganancia se selecciona de tal forma que minimice la covarianza del error de la nueva estimación del estado, teniendo en cuenta tanto el error probable de las mediciones como la incertidumbre sobre la representación del estado del sistema.
3. Medir el proceso para obtener  $z_k$  y entonces generar una nueva estimación del estado, incorporando la nueva medición.
4. Obtener una nueva estimación de la matriz de covarianza del error, para después valorar de nuevo el estado.

Después de cada par de actualizaciones, tanto del estado como de la medición, el proceso se repite, partiendo de las nuevas estimaciones del estado y de la covarianza del error. Esta naturaleza recursiva es una de las características más importantes del filtro de Kalman.

### Aplicación del filtro de Kalman discreto (FKD) a la cuenca propia de la C.H. Peñitas

Para la predicción de los caudales es necesario contar con hietogramas de precipitación efectiva. Para esto se obtienen las curvas que relacionan el índice de precipitación antecedente (IPA) y el índice de infiltración media ( $\varphi$ ) (Aparicio,

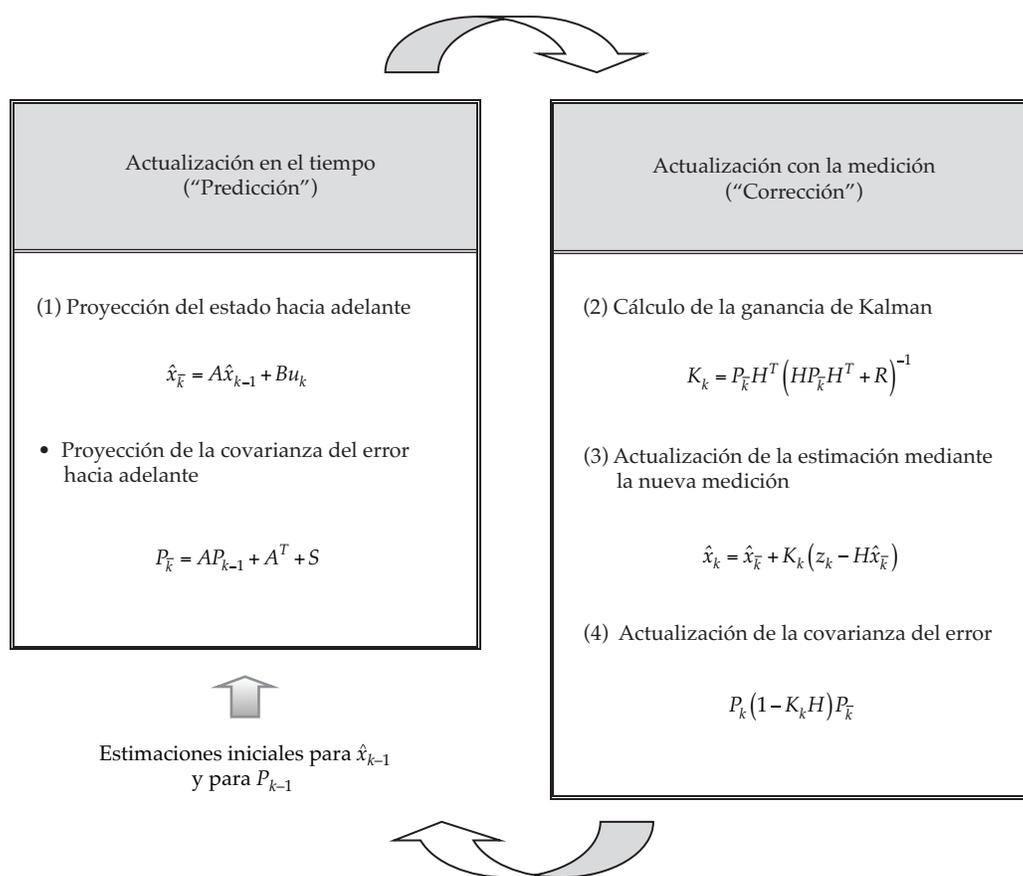


Figura 2. Diagrama completo de la operación del filtro de Kalman (Welch y Bishop, 2001, p. 24).

2011). Esta relación permite deducir, a partir de la lámina de lluvia real, la lluvia efectiva que actuará como estímulo en la cuenca, produciendo los escurrimientos de entrada.

En este trabajo, el análisis se realiza considerando los registros de precipitación y de escurrimiento en las estaciones ubicadas en la cuenca inferior (cuadro 1). El periodo analizado es del 31 de octubre de 2005 a las 24:00 h al 13 de febrero de 2012 a las 24:00 horas.

Para la construcción de la relación *IPA vs.*  $\varphi$ , la precipitación es la media  $\overline{hp}$  obtenida mediante polígonos de Thiessen, mientras que los gastos son los registrados en la estación hidrométrica Sayula. La curva *IPA vs.*  $\varphi$  resultante es (ver figura 3):

$$\varphi = -4.213 \ln(IPA) + 24.877 \quad (7)$$

Con la ecuación (7) se calculó la lluvia efectiva  $hp_{\text{efectiva}}$  de la siguiente manera:

$$\text{Si } \varphi > \overline{hp} \rightarrow hp_{\text{efectiva}} = 0 \quad (8)$$

$$\text{Si } \varphi < \overline{hp} \rightarrow hp_{\text{efectiva}} = \overline{hp} - \varphi \quad (9)$$

No existen suficientes estaciones hidrométricas disponibles en la cuenca de la C.H. Peñitas para determinar el caudal real de entrada al embalse. Como se verá más adelante, el filtro se evaluó utilizando los caudales medidos en la estación hidrométrica Sayula y, para el pronóstico de caudales en la C.H. Peñitas, se utiliza como alternativa el tránsito inverso modificado en vasos o antitránsito, mediante el cual, conociendo las salidas totales en la cuenca, así como la evolución de los

Cuadro 1. Estaciones climatológicas e hidrométricas utilizadas.

	Climatológicas							Hidrométricas	
<b>Cuenca superior</b>	Zapata	Tzimbac	Rómulo Calzada	Ocoatepec	Malpaso	Juan del Grijalva Superior	Aza-Pac	Tzimbac	Aza-Pac
<b>Cuenca inferior</b>	Peñitas	Ocoatepec	Zapata	Sayula	Juan del Grijalva Superior			Sayula	

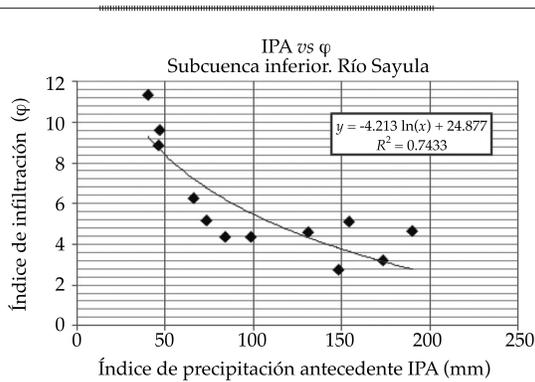


Figura 3. Curva IPA vs φ.

niveles en el vaso, se estiman los volúmenes o gastos totales de entrada al mismo (Aldama y Aguilar, 1996). Los cálculos del antitránsito para la cuenca inferior se considerarán, dentro del contexto del FGD, como las mediciones de los ingresos a la C.H. Peñitas para los efectos de este trabajo, ya que contienen implícitamente el comportamiento de toda la cuenca (figura 4).

El cálculo del antitránsito presenta oscilaciones significativas en las entradas, situación común en este tipo de análisis (Aldama y Aguilar, 1996). Para lograr una señal con menos ruido, se aplican promedios móviles de los cinco últimos valores medidos (Aguilar et al., 2009).

**Algoritmo del FGD utilizando el hidrograma unitario instantáneo como función de respuesta**

En esta modalidad, el cálculo de los caudales se hizo mediante la aplicación del hidrograma unitario instantáneo (HUI) como función de

respuesta. Para ejemplificar el proceso de cálculo, supóngase que se tiene un hietograma de precipitación efectiva como el mostrado en la figura 5a, el cual produce un hidrograma como el mostrado en la figura 5c a través del hidrograma unitario instantáneo presentado en la figura 5b.

Durante el pronóstico de una avenida, las barras del hietograma no son conocidas en su totalidad, pero se sabe la función de respuesta; es decir, el HUI, cuyas ordenadas se pueden representar como un incremento entre el gasto en un instante y el siguiente (como en el caso de  $\delta q_{12}$  en la figura 5b); los gastos del hidrograma de escurrimiento directo estarán representados como:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= hp_1 q_1 \\
 Q_2 &= Q_1 + hp_1 \delta q_{12} + hp_2 q_1 \\
 &\vdots \\
 Q_6 &= Q_5 + hp_1 \delta q_{65} + hp_2 \delta q_{54} + hp_3 \delta q_{43} + hp_4 \delta q_{32} \\
 &\quad + hp_5 \delta q_{21} + hp_6 \delta q_1
 \end{aligned}$$

Si se desea predecir cada uno de los caudales con base en lo registrado en  $k - 1$ , los valores resaltados en negritas en el sistema anterior representan un error en la predicción de los mismos, debido a que aún no se registra la precipitación correspondiente al tiempo  $k$ .

Con base en lo anterior, y de forma generalizada, los caudales pueden representarse como:

$$Q_t = Hx_t + Q_{t-1} + \varepsilon \tag{10}$$

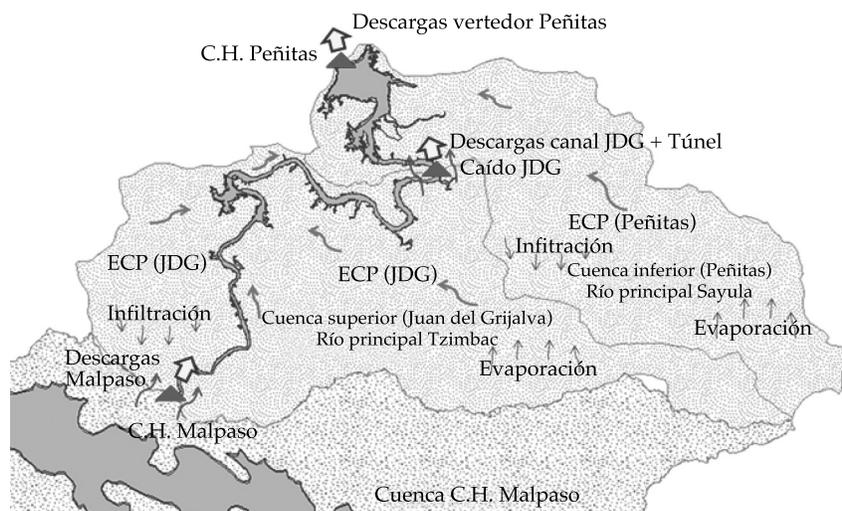


Figura 4. Funcionamiento de vaso de la C.H. Peñitas.

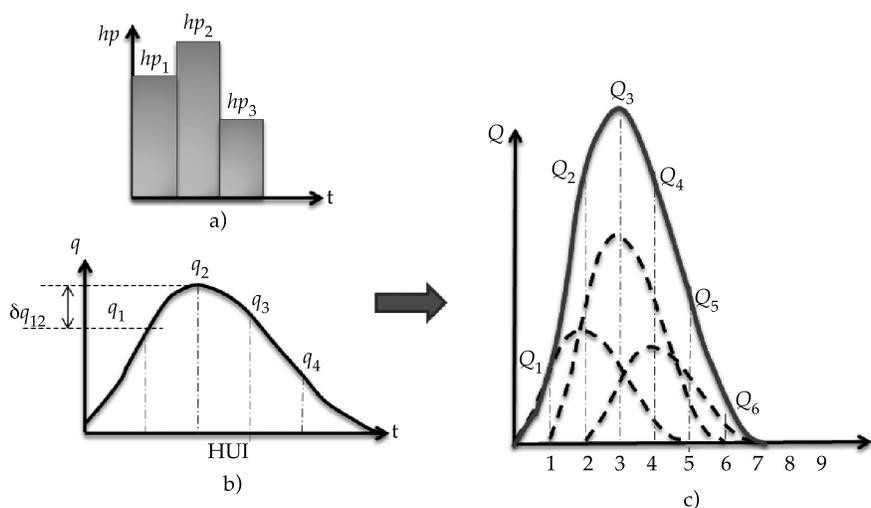


Figura 5. Hidrograma unitario instantáneo. Ejemplo.

$$H = [hp_{t-1}, hp_{t-2}, \dots, hp_{t-n}]; x_t = \begin{bmatrix} \delta q_{n-i-1, n-i} \\ \vdots \\ \delta q_{n-2, n-1} \\ \delta q_{n-1, n} \\ \delta q_{n, n+1} \end{bmatrix}$$

donde:

$Q_t$  = caudal registrado en el momento  $t$ .

$x_t$  = vector que contiene los incrementos entre ordenadas sucesivas del HUI.

$H$  = vector con las precipitaciones anteriores al tiempo analizado, disponibles en el hietograma de precipitación efectiva.

$n$  = cantidad de barras en el hietograma de precipitación efectiva.

$\epsilon$  = error al predecir el caudal, absorbido por la parte en la convolución en la que

intervienen las precipitaciones que aún no son registradas.

La variable a estimar mediante la aplicación del algoritmo del FKD con base en lo desarrollado, serán los incrementos entre las ordenadas de la función de respuesta de la cuenca; en este caso, representada por el HUI. Estos incrementos son entendidos en la nomenclatura del filtro por el término *estado*, denotado por  $\hat{x}_k$ .

Debido a que no se conoce con exactitud el valor que tomará el estado inicial, su valor esperado se considera de manera arbitraria como un vector nulo  $[0]_{n \times 1}$  de dimensión  $n$ , donde  $n$  representa el número de barras del hietograma de precipitación efectiva anteriores al tiempo analizado, consideradas en la convolución con los incrementos entre las ordenadas de la función de respuesta para obtener los caudales de entrada:

$$\hat{x}_{k-1} = [0]_{n \times 1} \quad (11)$$

mientras que la matriz de covarianza del error del estado inicial será:

$$P_{k-1} = \eta I \quad (12)$$

donde  $\eta$  es un escalar lo suficientemente grande que refleja la incertidumbre de los valores supuestos para el estado inicial, en concordancia con Valdés *et al.* (1980);  $I$  es la matriz identidad de dimensiones  $n \times n$ .

### Ecuaciones de pronóstico del estado

*Proyección del estado hacia adelante (pronóstico):*

$$\hat{x}_{\bar{k}} = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k \dots \quad (13)$$

$A_{n \times n}$  es una matriz identidad que relaciona el estado en el momento  $k - 1$  con el que ocurre en  $k$ ;  $\hat{x}_{k-1}$  es el estado estimado a priori;  $B_{n \times n}$  estará definida como una matriz identidad con las mismas dimensiones que la matriz  $A$ ; mientras

que  $u_k$  que representa el control opcional de entradas, será considerado como un vector de ceros de dimensiones  $n \times 1$  debido a que el sistema no contiene variables que se puedan controlar y que influyan en su respuesta.

*Proyección de la matriz de covarianza del error hacia adelante ( $P_{\bar{k}}$ ):*

$$P_{\bar{k}} = AP_{k-1}A^T + S \dots \quad (14)$$

$S$  es la matriz de covarianza de la perturbación del proceso de dimensiones  $n \times n$ . En este apartado se considera de tres formas distintas (como una matriz de ceros, una matriz cuya diagonal principal depende de los errores entre el estado pronosticado y actualizado, o bien como un valor muy pequeño cercano a cero), como se verá más adelante.

Con las ecuaciones anteriores es posible obtener el primer pronóstico del estado, así como de la matriz de covarianza del error. Una vez obtenida la función de respuesta, el *pronóstico de los caudales de entrada al vaso de la C.H. Peñitas* se calcula como sigue:

$$Q_{est1} = H \cdot \hat{x}_{\bar{k}} + Q_{k-1} \quad (15)$$

Donde  $\hat{x}_{\bar{k}}$  contiene los incrementos entre las ordenadas ( $q$ ) del HUI, obtenidas con el FKD;  $Q_{est1}$  es el caudal pronosticado en la cuenca propia de la C.H. Peñitas;  $Q_{k-1}$  es el caudal registrado en el tiempo  $k - 1$ , y  $H_{1 \times n} = [Hp_{t-1}, Hp_{t-2}, \dots, Hp_{t-n-1}]$  es un vector que contiene los valores a convolucionar con la función de respuesta, conformado por las mediciones de precipitación efectiva previas al momento  $k$  analizado.

### Actualización o corrección del pronóstico

*Cálculo de la ganancia de Kalman ( $K_k$ )*

Para el caso del presente trabajo, la matriz de covarianza de la perturbación de la medición  $R$  (paso 2 de la figura 2) será  $R = \alpha \cdot Q_{k-1}$  donde  $\alpha$  es una constante de proporcionalidad que

representa un error constante igual a una fracción del caudal medido en el tiempo anterior  $k-1$  (Valdés *et al.*, 1980). En la actualización del pronóstico con base en las mediciones actuales (paso 3 de la figura 2),  $z_k$  será, con base en la ecuación (10), el caudal real medido en  $k$  menos el caudal medido en  $k-1$ , tomado directamente del cálculo del antitránsito o del registro de la estación hidrométrica, según sea el caso.

Una vez llevada a cabo la actualización del pronóstico de la función de respuesta en la cuenca, se actualiza el pronóstico de los caudales de entrada al vaso de la C.H. Peñitas de la siguiente manera:

$$Q_{est2} = H \cdot \hat{x}_k + Q_{k-1} \quad (16)$$

donde  $\hat{x}_k$  son los incrementos entre las ordenadas de la función de respuesta corregidos o bien actualizados.

Dentro de la rutina de aplicación del FKD, se obtuvieron los siguientes estadísticos que permiten medir de forma cuantitativa la precisión del pronóstico:

- Coeficiente de Nash-Sutcliffe (Nash y Sutcliffe, 1970).
- Media y desviación estándar tanto para la serie de caudales originales como para los caudales pronosticados y actualizados.
- Coeficientes de correlación entre la serie original de los caudales de entrada a la C.H. Peñitas, calculados con el antitránsito y la serie de caudales pronosticados y actualizados con el FKD.

#### *Pronóstico de caudales en la cuenca completa de la C.H. Peñitas, utilizando el HUI como función de respuesta*

Con fines experimentales, se evaluaron tres diferentes formas de cálculo de la matriz de covarianza de la perturbación o ruido en el proceso  $S$ . En cada una de ellas se probaron diferentes valores de  $n$ ,  $\alpha$  y  $N$ , pero por razones de espacio sólo se presentan los resultados

obtenidos con la mejor combinación, usando un intervalo de pronóstico de 1 h con fines de evaluación.

#### *Aplicación del FKD usando $S = [0]_{n \times n}$*

Para este caso, la matriz  $S$  se obtuvo considerando que está conformada por una matriz nula de dimensiones  $n \times n$ . Los mejores resultados fueron obtenidos considerando 3 h previas de precipitación efectiva en la matriz  $H$ . En la figura 6a se muestra la precipitación efectiva media calculada y en la figura 6b se tienen los caudales observados (calculados con antitránsito) y pronosticados (FKD). La línea horizontal entre las  $1.026 \times 10^4$  y  $1.796 \times 10^4$  h indica ausencia de registros de caudal. En la figura 7 se presentan los gastos pronosticados contra los observados. La línea diagonal a  $45^\circ$  representa una coincidencia perfecta. La relación entre gastos observados contra actualizados (no presentado en este trabajo) resulta similar. En las figuras 8, 9 y 10 se presentan algunas avenidas específicas dentro del lapso analizado para una comparación detallada. Se usó un solo valor de gasto anterior para el pronóstico, observándose una coincidencia notable en los hidrogramas mencionados, en particular en los gastos máximos.

En el cuadro 2 se resumen los estadísticos utilizados para evaluar cuantitativamente la precisión de los pronósticos tomando  $\alpha = 0.3$ ,  $N = 1\,000$ ,  $n = 3$ .

La media y desviación estándar de los caudales observados fueron  $759.26 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $428.79$ , respectivamente, mientras que esos valores para los gastos pronosticados fueron de  $760.04$  y  $429.58 \text{ m}^3/\text{s}$ . Se observa que se preservan de forma razonable estos estadísticos.

#### *Aplicación del FKD considerando $S \approx 0$*

Con el objeto de realizar un análisis de sensibilidad, se probaron valores diferentes de cero, pero pequeños para las componentes de la diagonal principal de la matriz  $S$ , manteniendo

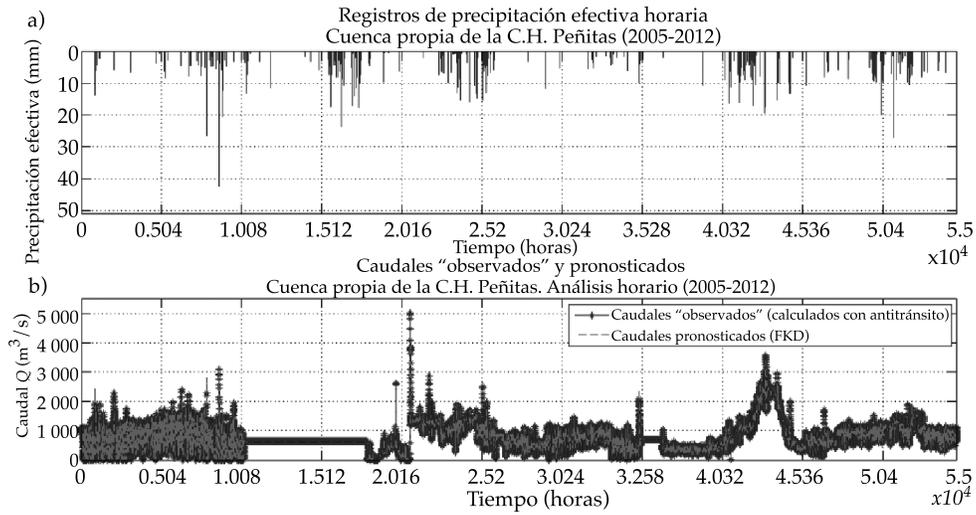


Figura 6. Registros de precipitación y caudal utilizados en el análisis de la cuenca propia de la C.H. Peñitas y pronóstico de caudales con 1 h de anticipación.

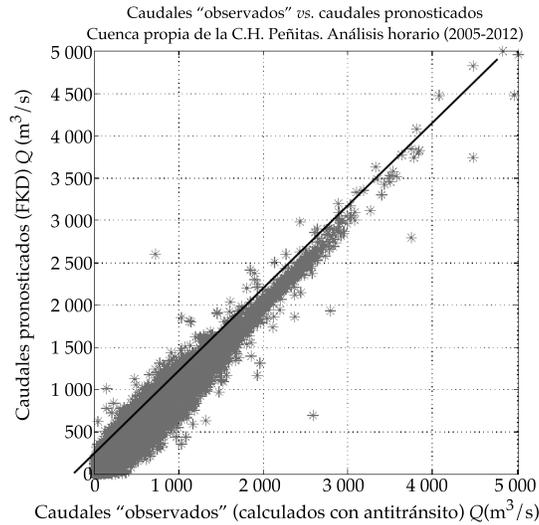


Figura 7. Caudales observados *versus* pronosticados en la cuenca propia de la C.H. Peñitas, considerando el HUI como función de respuesta y  $S = [0]$ .

la ecuación (3). La respuesta fue evaluada considerando los mismos valores de  $\alpha$ ,  $N$  y  $n$ , que en el análisis anterior. Los resultados se muestran en el cuadro 3. Se observa una mejoría marginal entre los resultados. Por lo anterior, no se recomienda usar esta opción.

#### Aplicación del FKD considerando $S = X_f - X_u$

Una alternativa adicional fue obtener el valor de  $S$  como una diferencia entre las ordenadas de la función de respuesta pronosticada  $X_f$  y actualizada  $X_u$ , como se describe en Kim et al.,

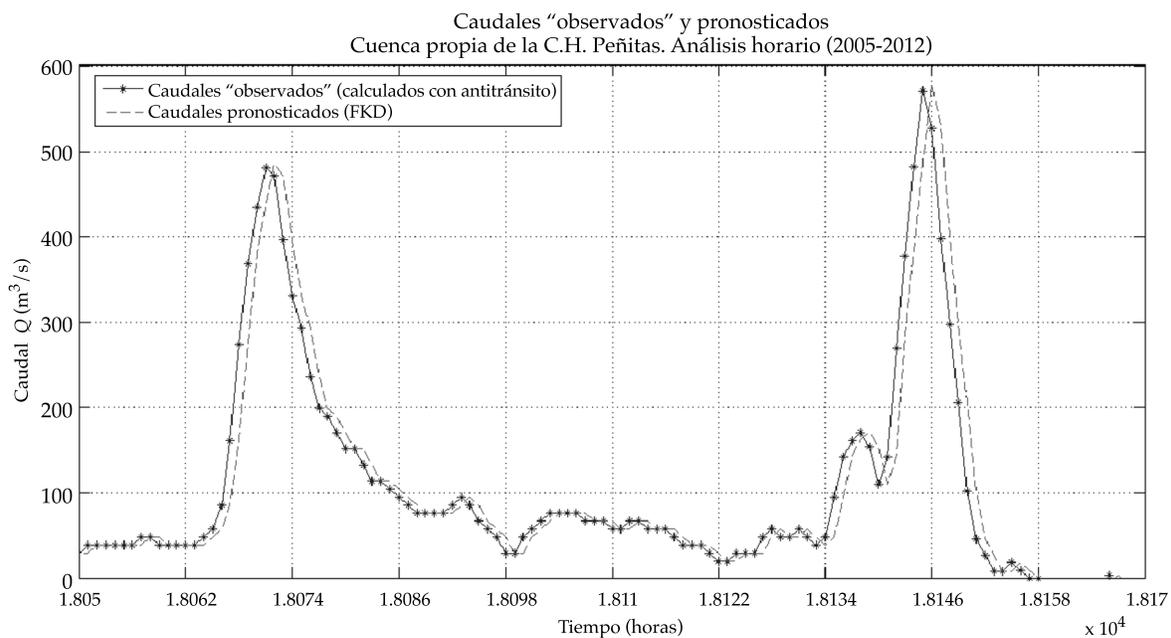


Figura 8. Caudal observado y pronosticado con el FKD (avenida A del 23/11/2007 01:00 h al 28/11/2007 01:00 h), aplicado a la cuenca propia de la C.H. Peñitas, considerando el HUI como función de respuesta y  $S = [0]$ .

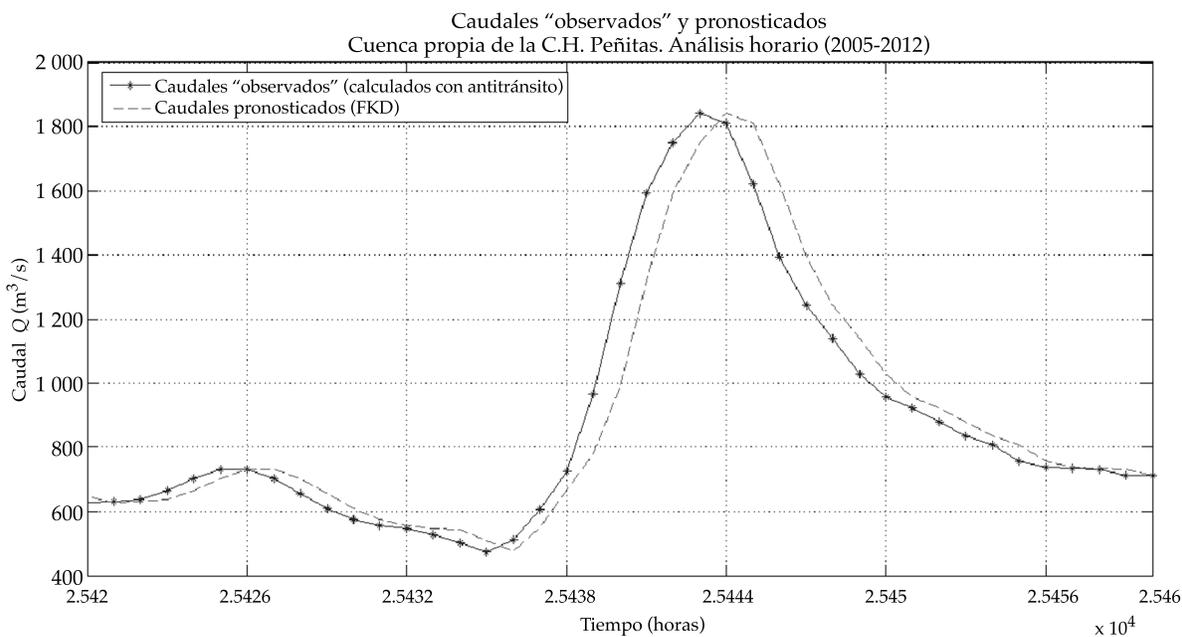


Figura 9. Caudal observado y pronosticado con FKD (Avenida B del 25/09/2008 03:00 h al 26/09/2008 19:00 h), aplicado a la cuenca propia de la C.H. Peñitas, considerando el HUI como función de respuesta y  $S = [0]$ .

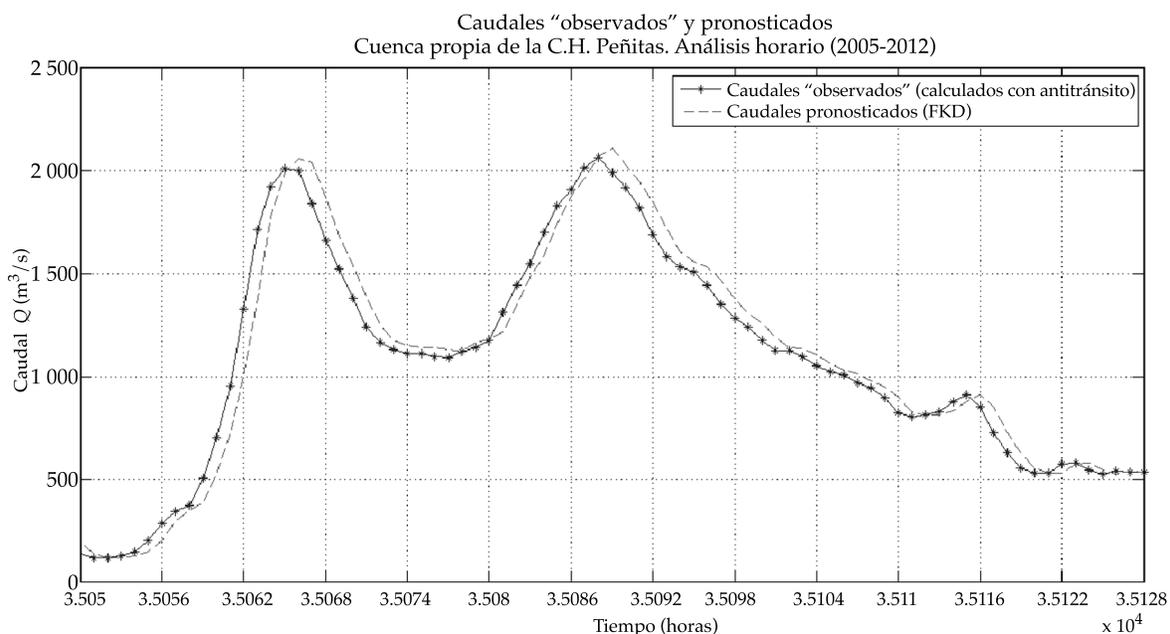


Figura 10. Caudal observado y pronosticado con FKD (Avenida C del 31/10/2009 9:00 h al 03/11/2009 15:00 h), aplicado a la cuenca propia de la C.H. Peñitas, considerando el HUI como función de respuesta y  $S = [0]$ .

Cuadro 2. Resumen de estadísticos para la aplicación del FKD, considerando como función de respuesta el HUI y  $S = [0]$

Concepto	Valor
Nash-Sutcliffe ( $Q$ "observado" - $Q$ pronosticado)	0.977353
Nash-Sutcliffe ( $Q$ "observado" - $Q$ actualizado)	0.977534
Correlación ( $Q$ "observado" - $Q$ pronosticado)	0.99727
Correlación ( $Q$ "observado" - $Q$ actualizado)	0.99729

Cuadro 3. Resumen de estadísticos para la aplicación del FKD, considerando como función de respuesta el HUI y  $S \approx 0$ .

Errores alrededor de	Nash-Sutcliffe ( $Q$ "observado" - $Q$ pronosticado)	Nash-Sutcliffe ( $Q$ "observado" - $Q$ actualizado)
0.1	0.977031	0.978011
0.001	0.977389	0.977709
0.0001	0.977412	0.977633
0.00001	0.977389	0.977581
0.0000001	0.977354	0.977535

2004. Entonces la matriz  $S$  estará compuesta en su diagonal principal por la desviación de las diferencias entre los incrementos de las ordenadas de la función de respuesta pronos-

ticada y la actualizada, acumuladas en un lapso anterior  $\Delta t$ . Los mejores resultados fueron obtenidos considerando 3 h previas de precipitación efectiva en la matriz  $H$  y un

lapso acumulado de los errores en la función de respuesta de 16 pronósticos previos. En la figura 11 se muestran los caudales observados contra los pronosticados. Se observan, en este caso, algunas diferencias importantes, así como también en la figura 12, donde se manifiesta una mayor dispersión respecto a los casos anteriores. Estas diferencias se aprecian también en las avenidas aisladas de las figuras

13, 14 y 15. Por consecuencia, los valores del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los coeficientes de correlación son menores, como se muestra en el cuadro 4.

La media y desviación estándar de los caudales observados fueron de 759.26 y 428.79 m<sup>3</sup>/s, respectivamente, mientras que esos valores para los gastos pronosticados fueron de 760.35 y 432.24 m<sup>3</sup>/s.

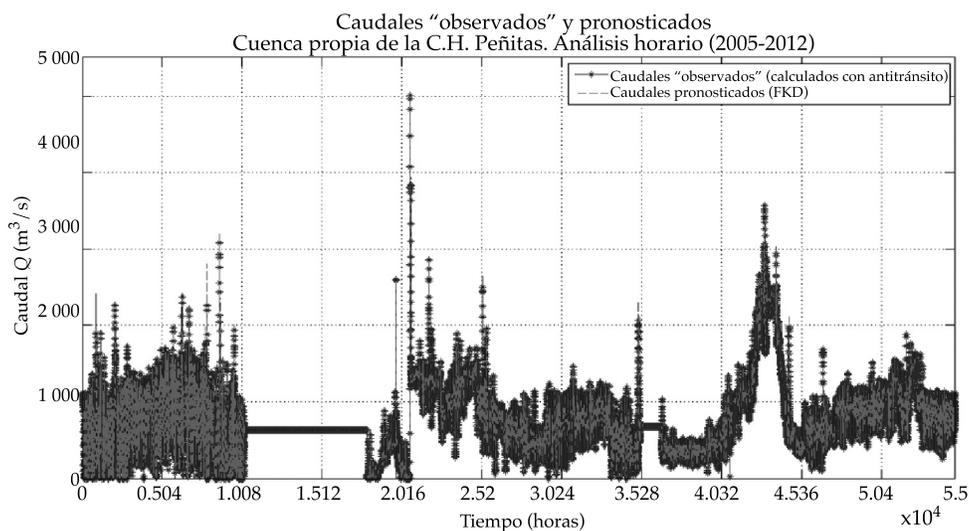


Figura 11. Caudales observados y pronosticados en la cuenca de la C.H Peñitas, considerando el HUI como función de respuesta y  $S = X_f - X_u$ .

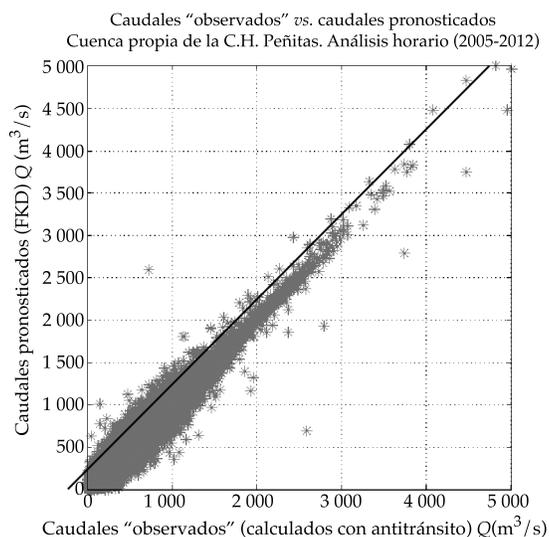


Figura 12. Caudales observados *versus* pronosticados en la cuenca de la C.H Peñitas, considerando el HUI como función de respuesta y  $S = X_f - X_u$ .

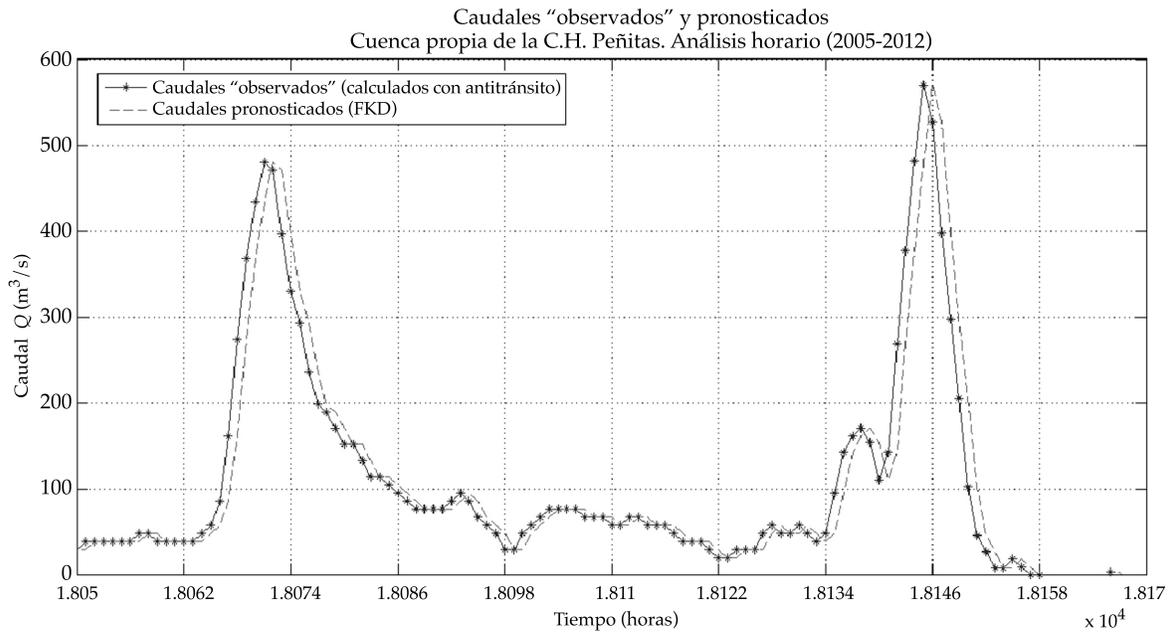


Figura 13. Caudal observado y pronosticado con FKD (avenida A del 23/11/2007 01:00 h al 28/11/2007 01:00 h), aplicado a la cuenca propia de la C.H. Peñitas, considerando el HUI como función de respuesta y  $S = X_j - X_u$ .

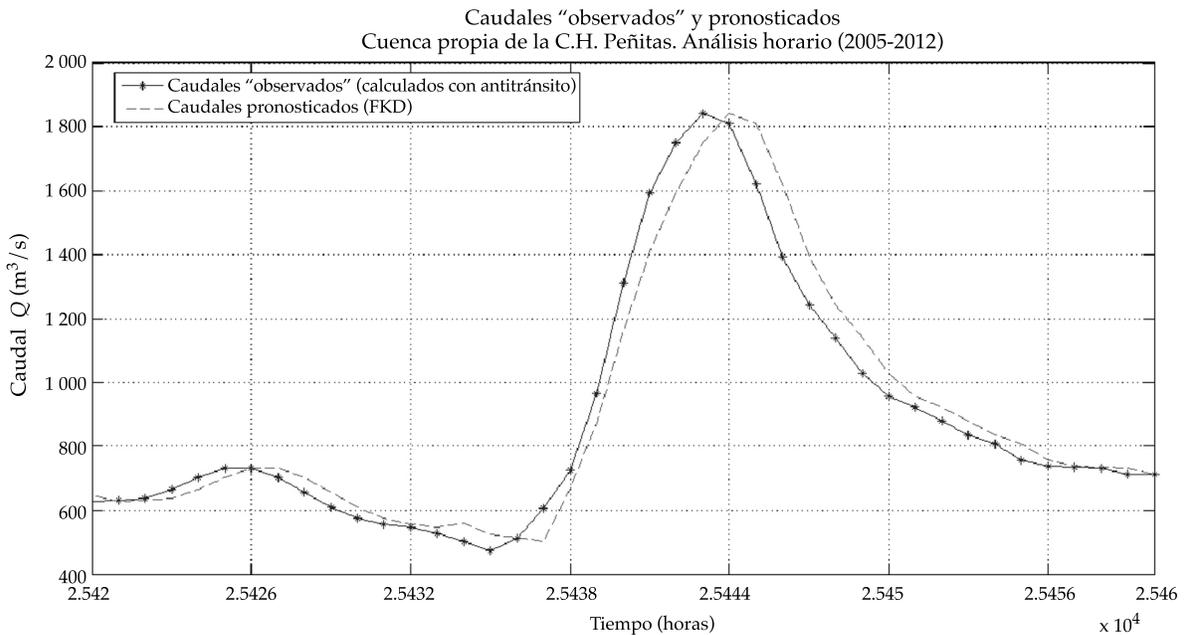


Figura 14. Caudal observado y pronosticado con FKD (avenida B del 25/09/2008 03:00 h al 26/09/2008 19:00 h), aplicado a la cuenca propia de la C.H. Peñitas, considerando el HUI como función de respuesta y  $S = X_j - X_u$ .

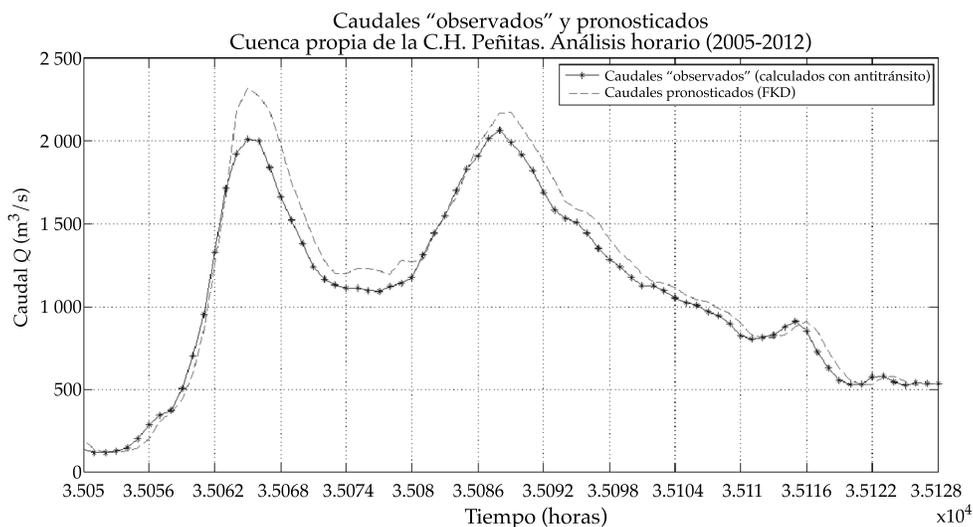


Figura 15. Caudal observado y pronosticado con FKD (avenida C del 31/10/2009 09:00 h al 03/11/2009 15:00 h), aplicado a la cuenca propia de la C.H. Peñitas, considerando el HUI como función de respuesta y  $S = X_f - X_u$ .

Cuadro 4. Resumen de estadísticos aplicando el FKD a la cuenca propia de la C.H. Peñitas, considerando como función de respuesta el HUI y  $S = X_f - X_u$  acumulado de 16 pronósticos previos.

Concepto	Valor
Nash-Sutcliffe ( $Q$ "observado" - $Q$ pronosticado)	0.977298
Nash-Sutcliffe ( $Q$ "observado" - $Q$ actualizado)	0.977709
Correlación ( $Q$ "observado" - $Q$ pronosticado)	0.99726
Correlación ( $Q$ "observado" - $Q$ actualizado)	0.99731

## Discusión de resultados

Al evaluar las tres diferentes alternativas de cálculo de la matriz  $S$ , se observa que cuando la matriz  $S$  es nula, los valores del coeficiente de Nash-Sutcliffe son muy aceptables ( $NS = 0.97735$ ), lo que significa que el pronóstico se realiza con buena aproximación. Al usar la matriz  $S$ , compuesta por números cercanos a cero, el valor del coeficiente de Nash-Sutcliffe ( $NS = 0.97741$ ) mejora sólo de modo marginal. Si dicha matriz se conforma con los errores entre la función de respuesta pronosticada y actualizada, los resultados son menos satisfactorios. Por lo tanto, la mejor alternativa de cálculo es cuando  $S = [0]$ , por lo que ésta será utilizada en lo subsecuente.

## Algoritmo del FKD usando una función de respuesta modificada

Hasta aquí, el FKD se ha aplicado considerando que la función de respuesta predicha estaría representada por el hidrograma unitario instantáneo y se usó exclusivamente la precipitación efectiva en la convolución con la función de respuesta. En lo que sigue, se evalúa una segunda alternativa, que incluye, además de la precipitación efectiva, los caudales medidos en un lapso anterior al tiempo analizado en la matriz  $H$ . El periodo de análisis considerado es el mismo que en el pronóstico anterior, es decir, del 31 de octubre de 2005 a las 24:00 h al 13 de febrero de 2012 a las 24:00 h.

Las variables incluidas en la aplicación del algoritmo del FKD representan básicamente lo descrito en el apartado anterior, salvo que en este caso las dimensiones de las matrices  $A$ ,  $H$ ,  $S$ , etc., son  $n + nQ$ , en lugar de  $n$  donde  $n$  y  $nQ$  son el número de episodios de precipitación efectiva y de caudales, respectivamente, considerados en la convolución realizada con la función de respuesta. Una vez obtenida la función de respuesta con la aplicación del FKD, el pronóstico de los caudales de entrada al vaso de la C.H. Peñitas se hace a través de la ecuación:

$$Q_{est1} = H \cdot \hat{x}_k \quad (17)$$

donde  $\hat{x}_k$  son las ordenadas de la función de respuesta pronosticada y  $H_{n+nQ,1} = [Q_{t-1}, Q_{t-2}, \dots, Q_{t-nQ}, Hp_{t-1}, Hp_{t-2}, \dots, Hp_{t-n}]$  será un vector que contiene los valores de caudal  $nQ$  y precipitación efectiva  $n$  utilizadas en la convolución con la función de respuesta pronosticada para obtener los caudales de entrada al vaso.

Una vez llevada a cabo la actualización del pronóstico de la función de respuesta en la cuenca (ecuaciones de actualización), siguiendo el proceso descrito con anterioridad, se actualiza el pronóstico de los caudales de entrada al vaso de la C.H. Peñitas en la forma:

$$Q_{est2} = H \cdot \hat{x}_k \quad (18)$$

donde  $\hat{x}_k$  es la función de respuesta corregida o bien actualizada.

#### *Pronóstico de caudales en la estación hidrométrica Sayula usando la función de respuesta modificada*

Con el objeto de evaluar la aplicabilidad del FKD con la función de respuesta modificada, se usaron los registros de caudal en la estación hidrométrica Sayula (figura 1), considerando un periodo de análisis del 01/01/2010 al 14/02/2012.

Los mejores resultados se obtuvieron considerando 48 h previas de lluvia efectiva y 1 h de medición previa de caudal, con un

intervalo de pronóstico de 1 h. En la figura 16a se muestra la precipitación efectiva media registrada en la estación hidrométrica Sayula, mientras que en la figura 16b se presentan los caudales observados y pronosticados mediante la aplicación del FKD. En la figura 17 se presentan los gastos pronosticados contra los "observados". La línea a 45° representa una coincidencia perfecta, pudiéndose notar que en algunos de los casos el caudal pronosticado es subestimado y en otros sobreestimado, pero en general los resultados son muy satisfactorios. La relación entre gastos observados contra actualizados no presentados aquí resulta similarmente satisfactoria. Las figuras 18, 19, 20 y 21 presentan algunas avenidas aisladas dentro del periodo de estudio para un mejor análisis.

En el cuadro 5 se presentan los estadísticos utilizados para evaluar cuantitativamente la precisión de esta alternativa de aplicación del FKD. Los valores de  $\alpha = 0.3$  y  $N = 1\ 000$  son iguales a los utilizados en los análisis anteriores y el valor de la matriz  $S = 0$  corresponde al mejor resultado obtenido de la evaluación de las alternativas de cálculo de  $S$ .

La media y desviación estándar de los caudales observados fueron de 21.51 y 24.37 m<sup>3</sup>/s, respectivamente, mientras que esos valores para los gastos pronosticados fueron de 21.53 y 24.61 m<sup>3</sup>/s. De nuevo se preservan razonablemente bien estos estadísticos.

#### **Discusión de resultados**

Los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo del FKD a la estación hidrométrica Sayula son muy aceptables. Se encontró que el intervalo de 48 h previas de precipitación representa la mejor combinación en el pronóstico de los caudales.

#### *Pronóstico de caudales en la C.H. Peñitas usando la función de respuesta modificada*

Se presentan los resultados de la aplicación del filtro con la función de respuesta modificada

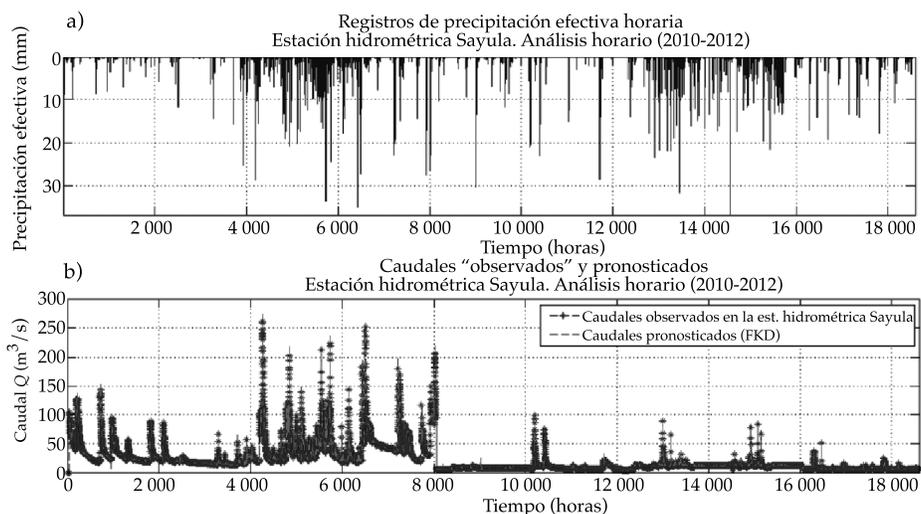


Figura 16. Registros de precipitación y caudal utilizados en el análisis para la estación hidrométrica Sayula, incluyendo pronóstico de caudales, considerando la función de respuesta modificada.

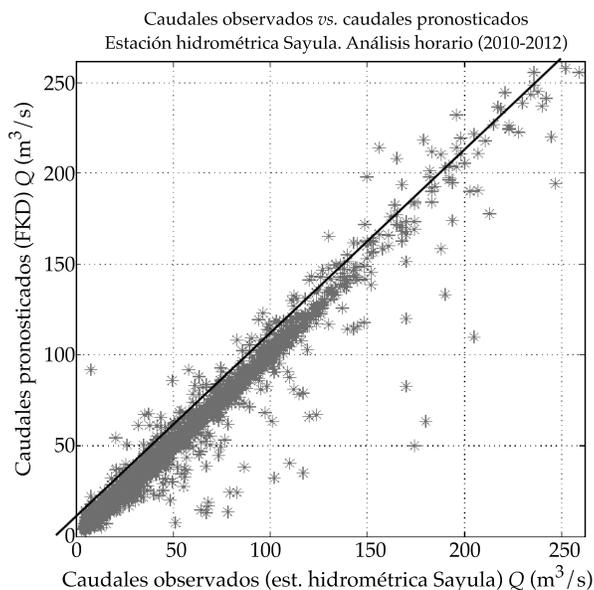


Figura 17. Caudales observados *versus* caudales pronosticados de la estación hidrométrica Sayula, considerando la función de respuesta modificada.

usando como medición los caudales calculados con antitránsito para intervalos de pronóstico de 1 y 24 h. El lapso utilizado fue del 31 de octubre de 2005 al 13 de febrero de 2012.

#### Análisis horario

Los mejores resultados se logran conformando la matriz  $H$  por las mediciones de 12 h previas

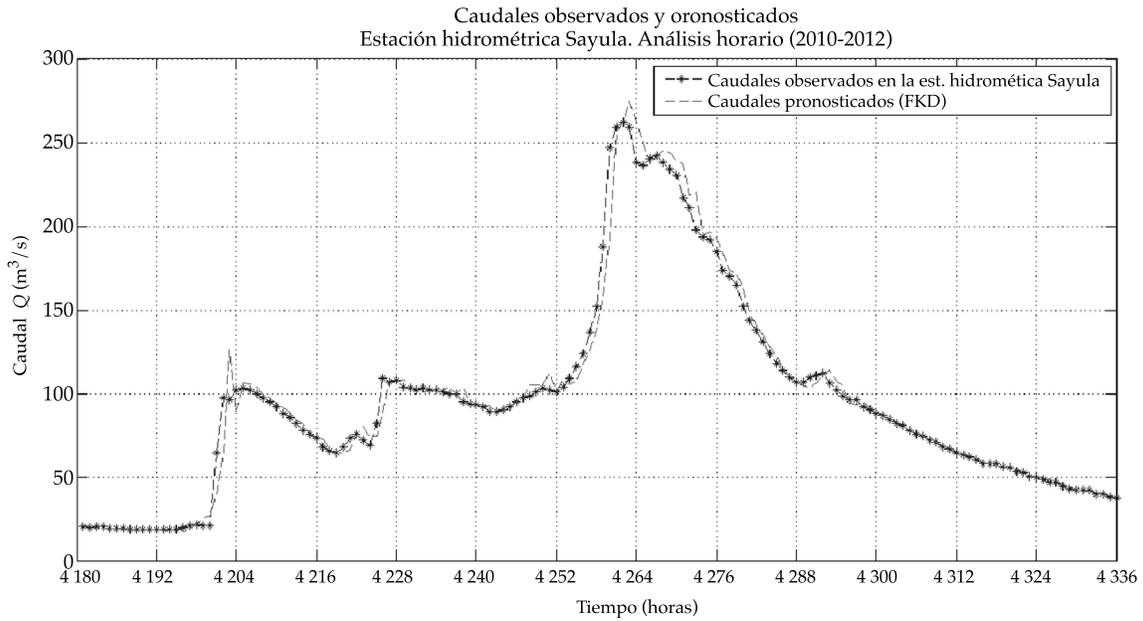


Figura 18. Caudal observado y pronosticado con FKD (avenida A del 24/06/2010 al 30/06/2010) para la estación hidrométrica Sayula, considerando la función de respuesta modificada.

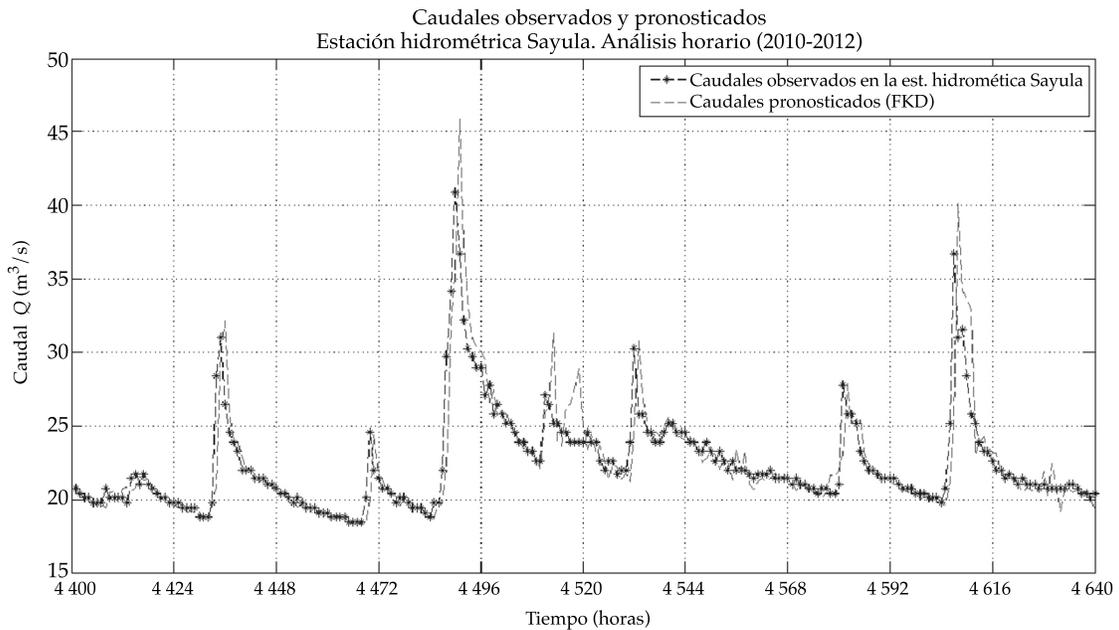


Figura 19. Caudal observado y pronosticado con FKD (avenida B del 3/07/2010 al 13/07/2010 coincide con el huracán Alex) para la estación hidrométrica Sayula, considerando la función de respuesta modificada.

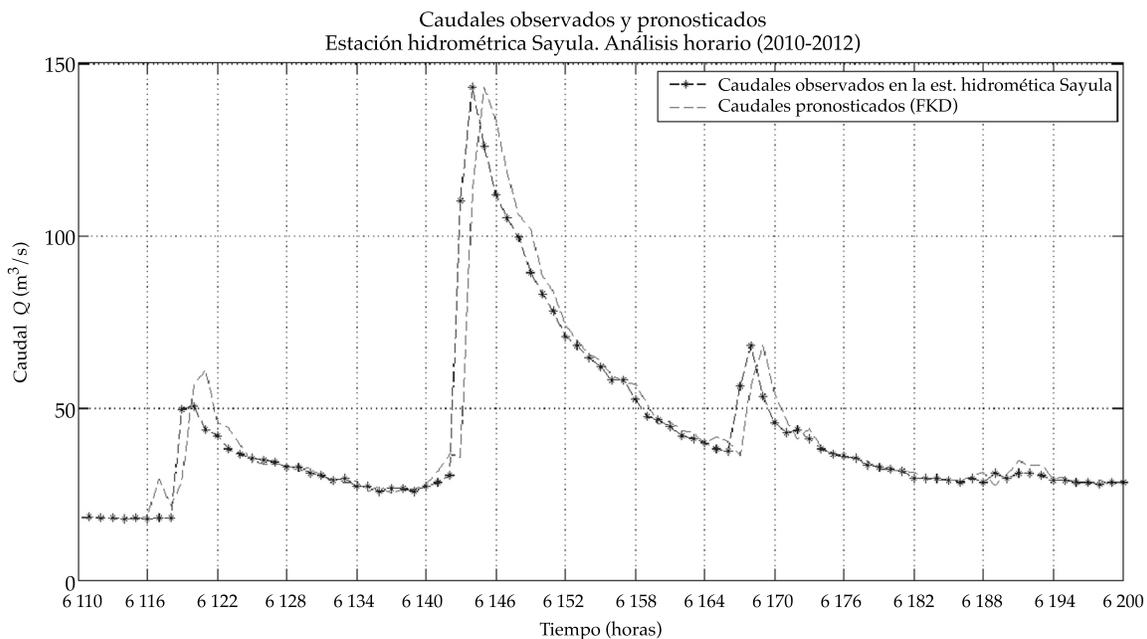


Figura 20. Caudal observado y pronosticado con FKD (avenida C del 16/09/2010 al 12/09/2010 coincide con el huracán Karl) para la estación hidrométrica Sayula, considerando la función de respuesta modificada.

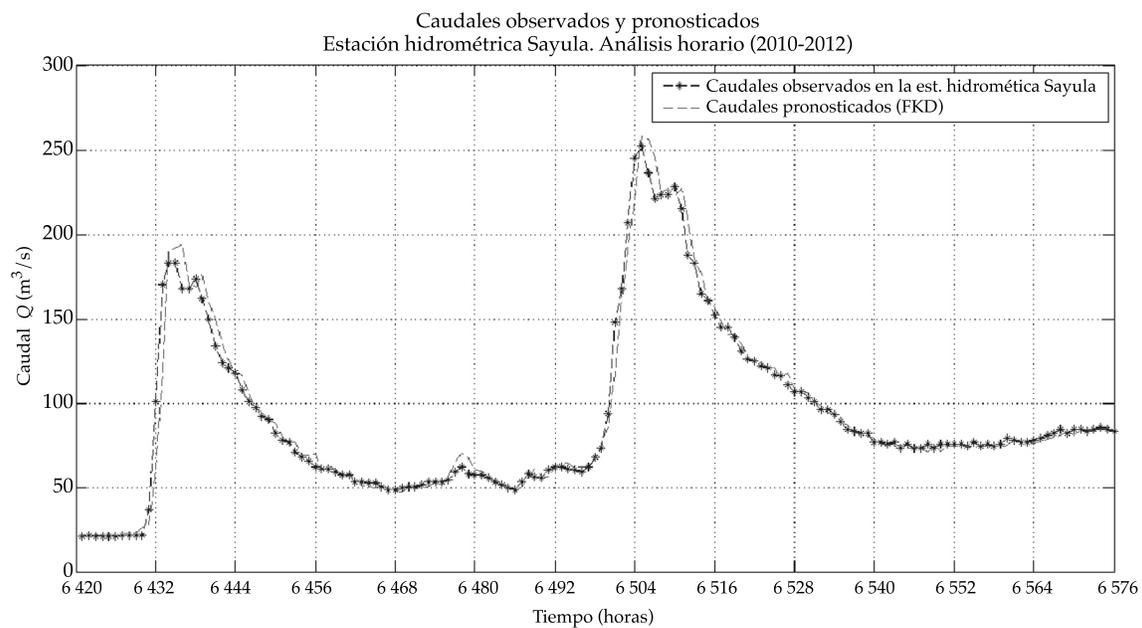


Figura 21. Caudal observado y pronosticado con FKD (avenida D del 25/09/2010 al 02/10/2010) para la estación hidrométrica Sayula, considerando la función de respuesta modificada.

Cuadro 5. Resumen de estadísticos aplicando el FKD a la estación hidrométrica Sayula, considerando la función de respuesta modificada.

Concepto	Valor
Nash-Sutcliffe ( $Q$ observado - $Q$ pronosticado)	0.9775
Nash-Sutcliffe ( $Q$ observado - $Q$ actualizado)	0.9808
Correlación ( $Q$ observado - $Q$ pronosticado)	0.9988
Correlación ( $Q$ observado - $Q$ actualizado)	0.9986

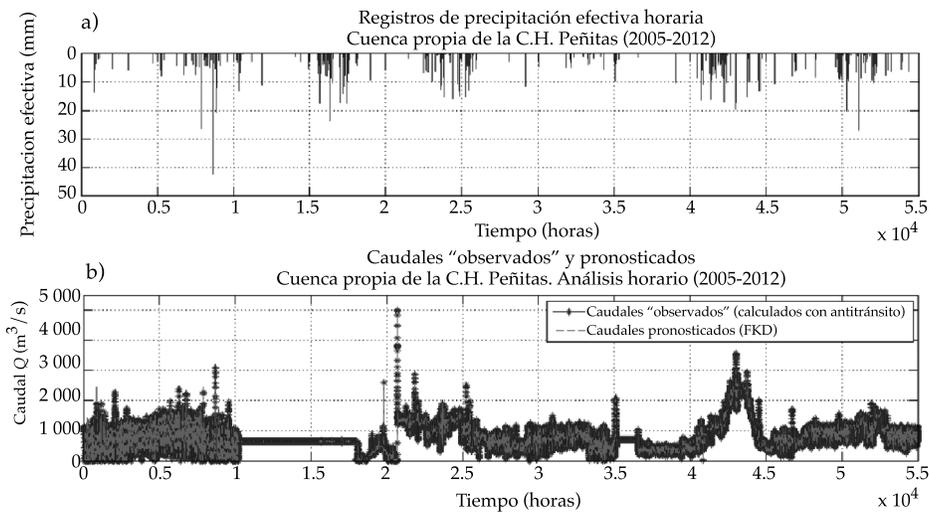


Figura 22. Registros de precipitación y caudal utilizados en el análisis de la cuenca propia de la C.H. Peñitas, incluyendo pronóstico de caudales con 1 h de anticipación, utilizando la función de respuesta modificada.

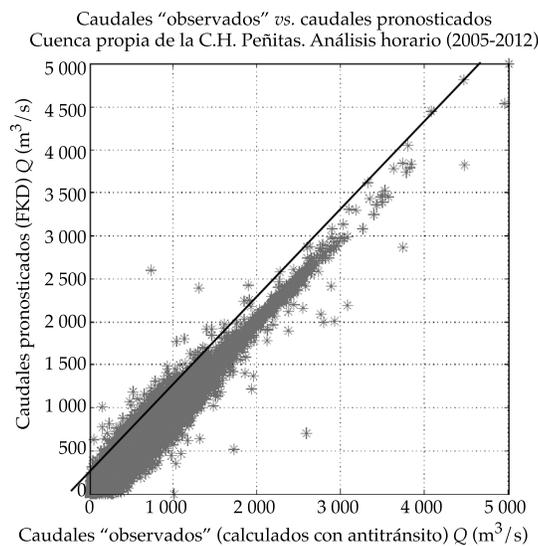


Figura 23. Caudales “observados” versus pronosticados en la cuenca propia de la C.H. Peñitas, considerando la función de respuesta modificada.

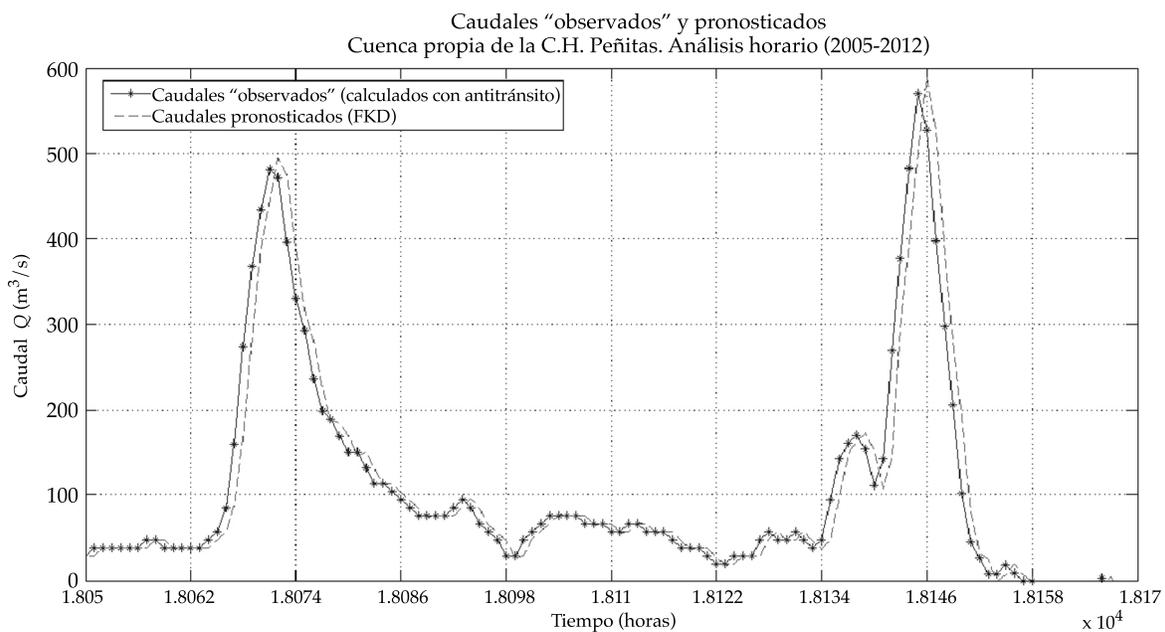


Figura 24. Caudal "observado" y pronosticado con el FKD (avenida A del 23/11/2007 01:00 h al 28/11/2007 01:00 h), aplicado a la cuenca propia de la C.H. Peñitas, considerando la función de respuesta modificada.

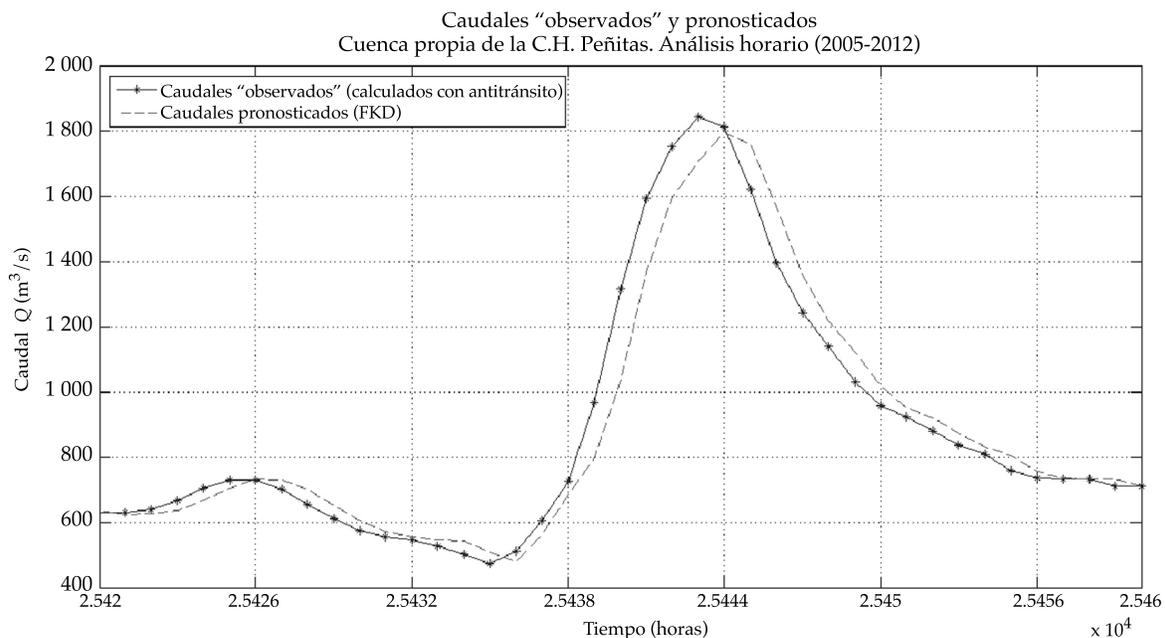


Figura 25. Caudal observado y pronosticado con el FKD (avenida B del 25/09/2008 03:00 h al 26/09/2008 19:00 h), aplicado a la cuenca propia de la C.H. Peñitas, considerando la función de respuesta modificada.

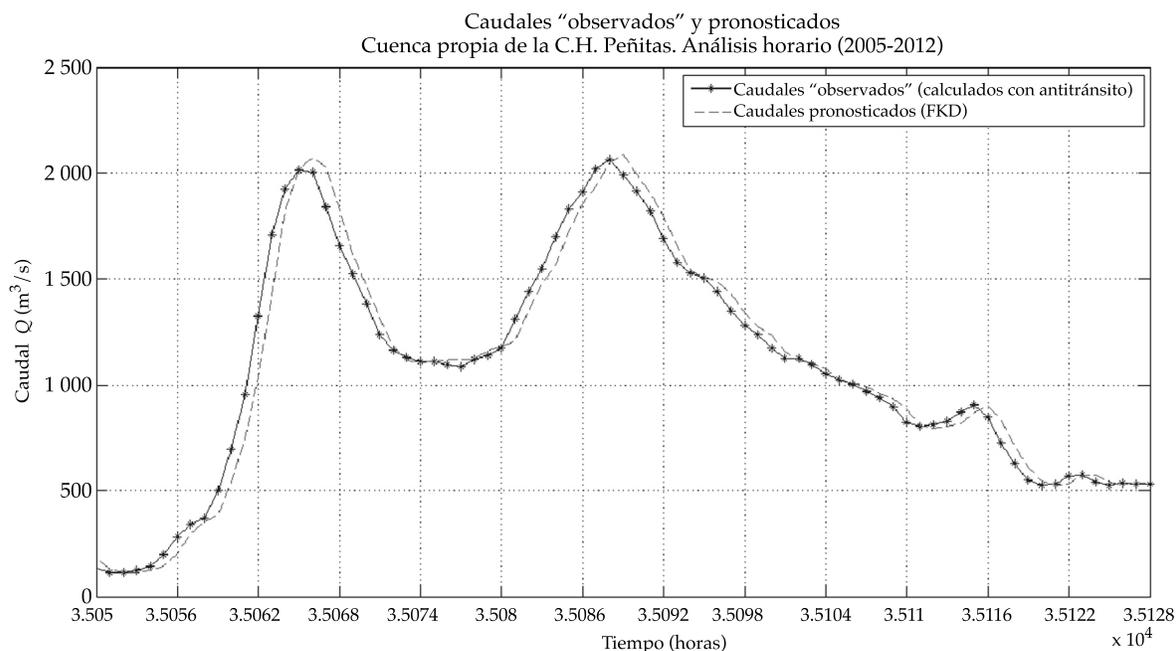


Figura 26. Caudal observado y pronosticado con FKD (avenida C del 31/10/2009 09:00 h al 03/11/2009 15:00 h), aplicado a la cuenca propia de la C.H. Peñitas, considerando la función de respuesta modificada.

Cuadro 6. Resumen de estadísticos aplicando el FKD a la cuenca propia de la C.H. Peñitas, considerando la función de respuesta modificada con pronóstico de 1 h.

Concepto	Valor
Nash-Sutcliffe ( $Q$ "observado" - $Q$ pronosticado)	0.97805
Nash-Sutcliffe ( $Q$ "observado"- $Q$ actualizado)	0.97887
Correlación ( $Q$ "observado"- $Q$ pronosticado)	0.99964396
Correlación ( $Q$ "observado"- $Q$ actualizado)	0.99970262

de precipitación y 2 h anteriores de caudal, calculado con el antitránsito con respecto al tiempo  $k$  analizado. Los valores de  $\alpha$  y  $N$  se conservan iguales a los utilizados en los análisis realizados anteriormente (figuras 22 a 26 y cuadro 6).

La media y desviación estándar de los caudales observados fueron de 759.22 y 428.82  $m^3/s$ , respectivamente, mientras que esos valores para los gastos pronosticados fueron prácticamente los mismos, de 758.97 y 429.61  $m^3/s$ .

### Análisis diario

Los mejores resultados de este análisis se obtuvieron considerando dos días previos de lluvia efectiva y un día de caudal medido dentro de la matriz  $H$  (figuras 27 a 31 y cuadro 7).

La media y desviación estándar de los caudales observados fueron de 16 972.13 y 10 246.86  $m^3/s$ , respectivamente, mientras que esos valores para los gastos pronosticados fueron de 16 920.24 y 10 304.58  $m^3/s$ . Se

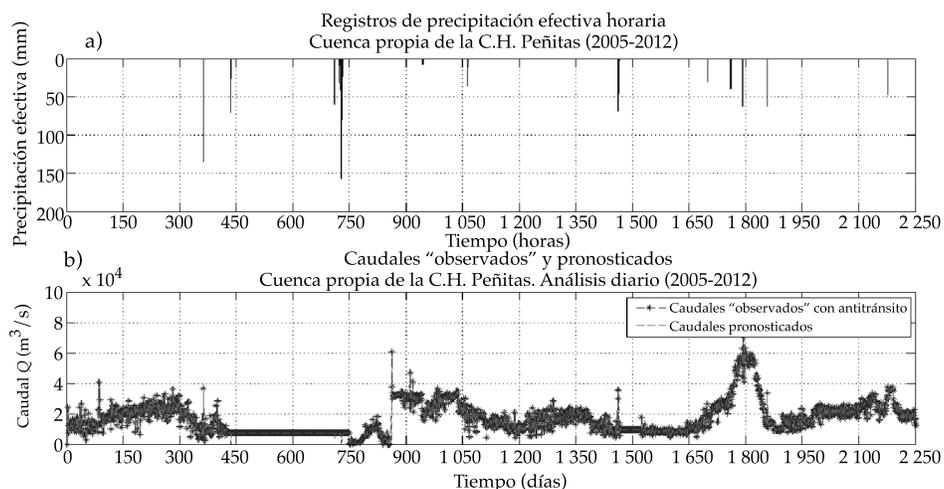


Figura 27. Registros de precipitación y caudal utilizados en el análisis de la cuenca propia de la C.H. Peñitas, incluyendo pronóstico de caudales con 24 h de anticipación, utilizando la función de respuesta modificada.

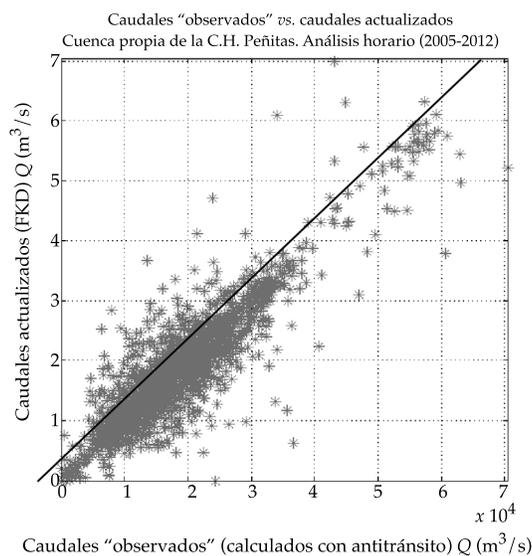


Figura 28. Caudales "observados" versus actualizados en la cuenca propia de la C.H. Peñitas. Pronóstico con 24 h, considerando la función de respuesta modificada.

preservan los estadísticos aunque en menor medida con respecto a los análisis anteriores.

#### Discusión de resultados

El coeficiente de Nash-Sutcliffe para el pronóstico diario es ligeramente menor que el

correspondiente al pronóstico horario; sin embargo, el intervalo de pronóstico diario es, en general, de mayor utilidad que el horario, por lo que es aceptable un coeficiente de Nash-Sutcliffe menor (aunque aún muy alto), a cambio de un mayor intervalo de pronóstico.

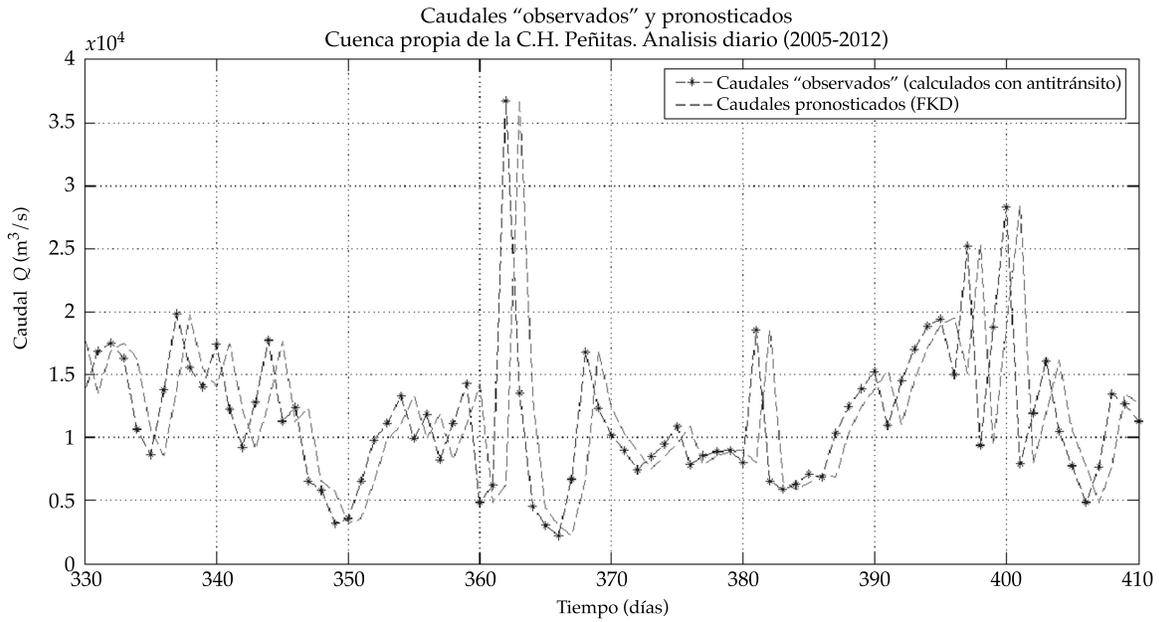


Figura 29. Caudal "observado" y pronosticado con el FKD en la cuenca propia de la C.H. Peñitas (periodo A del 26/9/2006 al 15/12/2006). Pronóstico con 24 h, considerando la función de respuesta modificada.

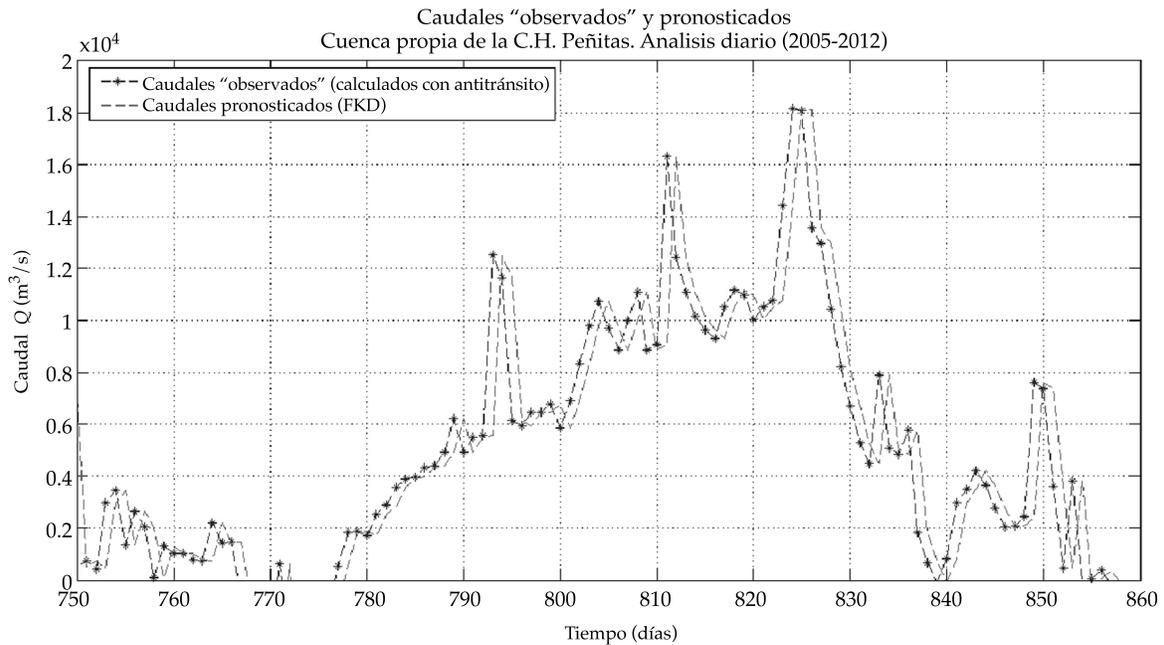


Figura 30. Caudal "observado" y pronosticado con el FKD en la cuenca propia de la C.H. Peñitas (periodo B del 20/11/2007 al 09/03/2008). Análisis diario, considerando la función de respuesta modificada.

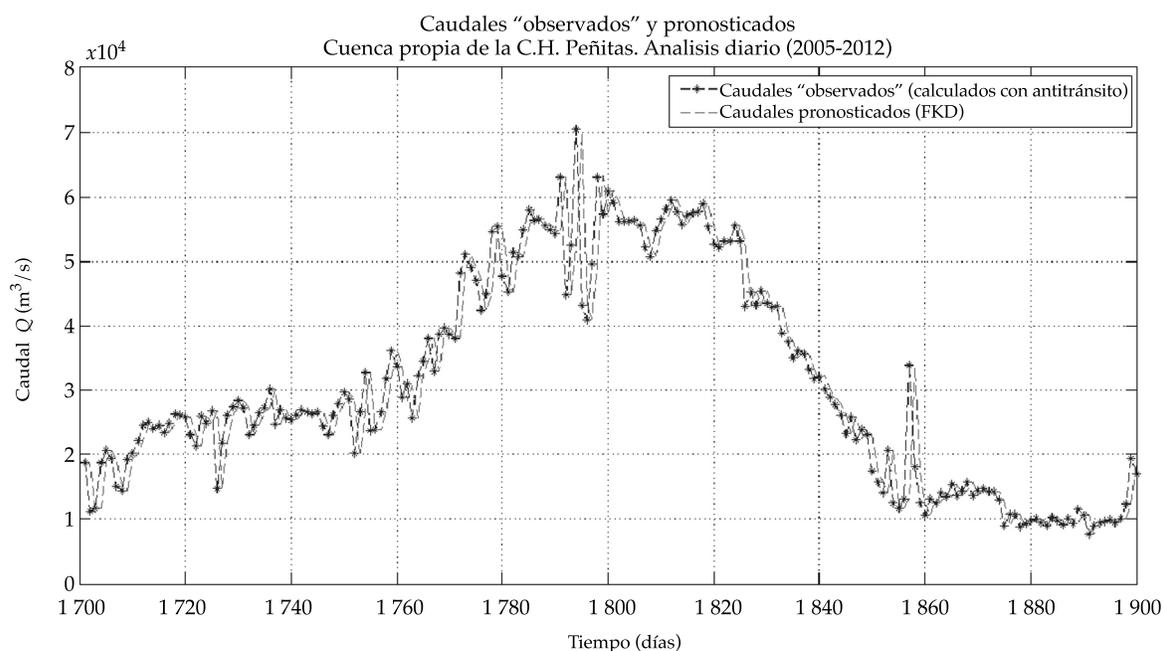
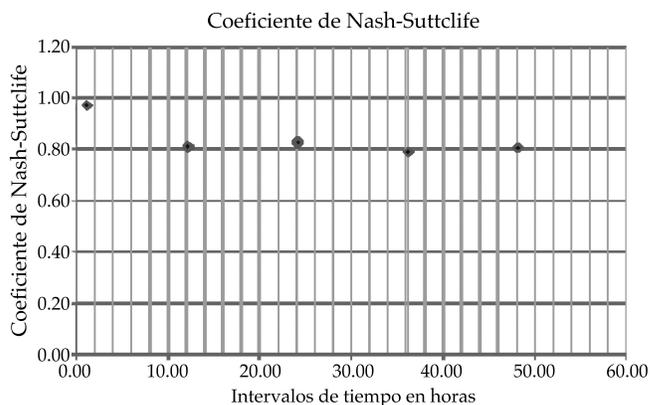


Figura 31. Caudal “observado” y pronosticado con el FKD en la cuenca propia de la C.H. Peñitas (periodo C del 27/06/2010 al 13/01/2011). Análisis diario, considerando la función de respuesta modificada y un pronóstico de 24 h.

Cuadro 7. Resumen de estadísticos para la aplicación del FKD a la cuenca propia de la C.H. Peñitas, considerando la función de respuesta modificada y un pronóstico de 24 h.

Concepto	Valor
Nash - Sutcliffe (Q observado - Q pronosticado)	0.83352
Nash - Sutcliffe (Q observado - Q actualizado)	0.84129
Correlación (Q observado- Q pronosticado)	0.9996
Correlación (Q real - Q actualizado)	0.99904



$\Delta t$ (h)	n	nQ	Nash-Sutcliffe
1	12	2	0.97805
12	4	2	0.81707
24	2	1	0.83352
36	2	2	0.79546
48	1	1	0.81188

Figura 32. Variación en el  $\Delta t$  de pronóstico.

### Variación del coeficiente de Nash-Sutcliffe en términos del intervalo de pronóstico

En la figura 32 se presentan valores del coeficiente de Nash-Sutcliffe obtenidos al aplicar el algoritmo, considerando distintos  $\Delta t$  en el pronóstico de caudal para la cuenca propia de la C.H. Peñitas.

Es importante señalar que la mayor parte de los puntos con mayor diferencia entre los valores observados y pronosticados en las figuras 23 y 28 se deben a cambios abruptos en la señal o bien, en algunos casos, a la ausencia de datos.

### Conclusiones

1. El filtro de Kalman no es un modelo lluvia-escurrecimiento, sino un algoritmo matemático que permite realizar pronósticos del estado de un sistema lineal con entradas estocásticas.
2. En el presente trabajo se comprueba que el filtro puede ser aplicado de forma exitosa en la hidrología, en particular al pronóstico de caudales a corto plazo.
3. La aplicación del filtro de Kalman al pronóstico de avenidas proporciona resultados sumamente aceptables, que permiten tener un pronóstico con errores pequeños, debido a que éste es corregido con cada nueva medición, de manera que podría ser considerado una buena opción en el manejo y la operación de grandes embalses.
4. El tiempo computacional invertido es mínimo.
5. Los pronósticos mejorarían de modo considerable en la medida en que la cuenca esté más instrumentada. Así podría evitarse la estimación del estado del sistema haciendo uso de métodos indirectos, como el antitránsito de avenidas.
6. La imposición arbitraria de las variables de entrada al algoritmo, como el estado inicial y la matriz de la covarianza del error inicial, provocan una variación mínima en los pronósticos, debido a que el filtro se va autocorrigiendo con el paso del tiempo hasta disminuir los errores iniciales.
7. En la mayoría de los puntos en los cuales el filtro presenta los errores más significativos entre el caudal pronosticado y el observado, se presenta un salto abrupto en la señal o bien la información de entrada no está completa (como cuando alguna estación no registra).
8. Los resultados obtenidos al considerar la función de respuesta de la cuenca como el hidrograma unitario instantáneo son aceptables; sin embargo, la modificación propuesta, que incluye tanto los registros de caudal como de precipitación en la matriz  $H$ , mejora de forma considerable los pronósticos realizados.
9. Dentro de las diferentes alternativas utilizadas para definir el valor de la matriz  $S$ , el mejor resultado se obtiene cuando ésta es nula.
10. Es importante considerar la posible utilidad del FGD en otras áreas (hidráulica, aguas subterráneas, etcétera).

Publicado por invitación

### Referencias

- AGUILAR, G.E., MENDOZA, U.I., LOBATO, S.R., APARICIO, J., and RIVAS A.I. *Modelo de pronóstico de avenidas para la C. H. Peñitas considerando la incorporación del vaso "Juan del Grijalva" con precipitación registrada a tiempo real y con pronóstico de precipitación del modelo MM5*. Informe final. Jiutepec, México: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, 2009.
- ALDAMA, A. y AGUILAR, E. *Antitránsito de avenidas en vasos*. XVII Congreso Latinoamericano de hidráulica, Guayaquil, Ecuador, 1996.
- APARICIO, J., MARTÍNEZ-AUSTRIA, P., GÜITRÓN, A., and RAMÍREZ, A.I. Floods in Tabasco, Mexico: a Diagnosis and Proposal for Courses of Action. *J. of Flood Risk Management*. Vol. 2, No. 2, June, 2009, pp. 132-138.
- APARICIO, J. The Juan del Grijalva Landslide. Birkle, P. and Torres-Alvarado, I.S. (editors) *Proceedings*. 13th International Conference on Water Rock Interaction, Guanajuato, del 16 al 20 de agosto, 2010, CRC Press, Londres, pp. 3-7.
- APARICIO, J. *Fundamentos de Hidrología de Superficie*. México, D.F.: Limusa, 2011.

- CONAGUA. *Estadísticas del Agua en México*. México, D.F.: Comisión Nacional del Agua, Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales, 2011.
- DRÉCOURT, J. *Kalman filtering in hydrological modeling*. DAIHM Technical Report 2003-1, DHI Water & Environment, 2003.
- HINO, M. On-line prediction of hydrology systems. *Proc. Fifteenth Conf. IAHR*, Istanbul, 1973.
- KALMAN, R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Trans. ASME. Series D. Journal of Basic Engineering*. Vol. 82, 1960, pp. 35-45.
- KIM, S., TACHIKAWA, Y., and TAKARA, K. Embedding Kalman filter into a Distributed *Hydrological Model*. WSUD2004, 2004, pp. 278-290.
- KOTTEGODA, N.T. *Stochastic Water Resources Technology*. London: The Macmillan Press, LTD, 1980.
- KRAUSE, P., BOYLE, D.P., BÄSE, F. *Comparison of different efficiency criteria for hydrological model assessment. Advances in Geosciences*. European Geosciences Union. Vol. 5, 2005, pp. 89-97.
- RIVERA-TREJO, F., SOTO-CORTÉS, G., and BARAJAS-FERNÁNDEZ, J. The 2007 flooding in Tabasco, Mexico: Evolution of water levels. *Hydraulic Engineering in Mexico*. Vol. XXIV, No. 4, October-December, 2009, pp. 159-166.
- SIMON, D. Kalman Filtering. *Embedded Systems Programming*. Vol. 14, No. 6, 2001, pp. 72-79.
- VALDÉS, J.B., VELÁZQUEZ, J.M. y RODRÍGUEZ-ITURBE, I. *Filtros de Kalman en hidrología: Predicciones de descargas fluviales para la operación óptima de embalses*. Universidad Simón Bolívar, Decanato Estudios de Postgrado,

Postgrado en Planeación e Ingeniería de Recursos Hídricos, 1980.

WELCH, G. and BISHOP, G. *An Introduction to the Kalman Filter*. Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill. Course 8, 2001.

## Dirección institucional de los autores

M.I. Mirce Ivón Morales Velázquez

Universidad Nacional Autónoma de México  
Torre de Rectoría, Circuito interior  
Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán  
México, D.F., MÉXICO  
Teléfono: +52 (777) 4178 735  
mirce\_morales\_v@live.com.mx

Dr. Javier Aparicio

División de Estudios de Postgrado de la Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Paseo Cuauhnáhuac 8532, colonia Progreso  
62550 Jiutepec, Morelos, MÉXICO  
Teléfono: +52 (777) 3293 600  
javieraparicio@prodigy.net.mx

Dr. Juan B. Valdés

Universidad de Arizona  
1133 E James E. Rogers Way Rm 122  
Tucson, AZ 85721, United States of America  
Phone: +520 6218 787  
jvaldes@email.arizona.edu