

Método de Hardy Cross en el diseño económico de redes de distribución de agua potable¹

Ernesto Vázquez Fernández

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Se presenta una simplificación del método de Hardy Cross para que sea empleado como método de diseño y no de revisión. Con ella se logra el diseño económico de una red de abastecimiento de agua conociendo sólo las longitudes de los tramos y los gastos de demanda en los nudos, sin necesidad de proponer los diámetros de las tuberías. Esta simplificación se consigue al suponer que el producto del gasto por un factor que toma en cuenta el diámetro y el coeficiente de rugosidad, es constante en todos los tramos. Se expone un ejemplo numérico, un programa en lenguaje Basic y el uso del mismo.

Introducción

En este trabajo se acepta que el diseño en redes cerradas de abastecimiento de agua potable mediante el criterio de conservar constante el producto KQ , en cada tramo de la red, conduce a diseños económicos, siendo K una característica de la tubería que incluye el coeficiente de fricción y el diámetro, y Q , el gasto en el tramo. De esta manera, es posible simplificar el método de Hardy Cross para transformarlo en uno de diseño económico.

Ecuación básica

Es sabido que la fórmula de corrección de gastos de Hardy Cross es:

$$\Delta Q = -\frac{\sum k|Q|LQ}{2\sum K|Q|L} \quad (1)$$

donde

ΔQ = corrección que se debe hacer al gasto del tramo.

$\sum K|Q|LQ$ = suma de las pérdidas por fricción en el circuito.

Q = gasto en el tramo, positivo a favor del giro de las manecillas del reloj

(en adelante, a favor del circuito) y negativo en contra.

L = longitud del tramo.

$|Q|$ = valor absoluto del gasto en el tramo.

K = constante que incluye el coeficiente de pérdida por fricción (Darcy-Weisbach o Manning) y el diámetro de la tubería.

$$K = \frac{f}{12.1 D^5} \quad (\text{Darcy-Weisbach}) \quad (2)$$

$$K = \frac{10.29 n^2}{D^{16/3}} \quad (\text{Manning}) \quad (3)$$

El autor, según la metodología presentada en 1984 y 1989 (Vázquez, 1984 y Vázquez y Ojeda, 1989), demuestra que si la red se diseña conservando constante el producto KQ en cada tramo, hay una opción económica. La ecuación (1) y la aplicación del método simplificado de Hardy Cross proporcionan una opción adicional, que comparada con aquéllas de los artículos de referencia, produce diseños más favorables. Por ello, en la metodología que aquí se presenta está implícito el criterio de diseño económico.

Entonces, si $K|Q|$ es constante en cada tramo, la ecuación (1) se escribe

$$\Delta Q = -\frac{K|Q|\sum LQ}{2K|Q|\sum L}$$

y al simplificarse, se obtiene

$$\Delta Q = -\frac{\sum LQ}{2\sum L} \quad (4)$$

Es decir, es posible aplicar el método de Hardy Cross para conocer los gastos en los tramos de la red cerrada, aun antes de conocer los diámetros de las tuberías. Y una vez conocidos dichos gastos, se pueden diseñar las tuberías si se agrega como dato la suma de pérdidas por fricción a favor del circuito (o en contra, los resultados son idénticos), en el circuito exterior, ya que

$$\sum h_e \sum K|Q|LQ \quad (5)$$

representa esa suma de pérdidas en el circuito exterior, de donde

$$K|Q| = \frac{\sum h_e}{\sum LQ} = C \quad (6)$$

siendo $K|Q|$ constante en cada tramo, se despeja

$$K = \frac{C}{|Q|} \quad (7)$$

Para hallar los diámetros teóricos en los tramos se tienen las ecuaciones

$$D = \left(\frac{f}{12.1K} \right)^{1/5} \quad (\text{Darcy-Weisbach}) \quad (8)$$

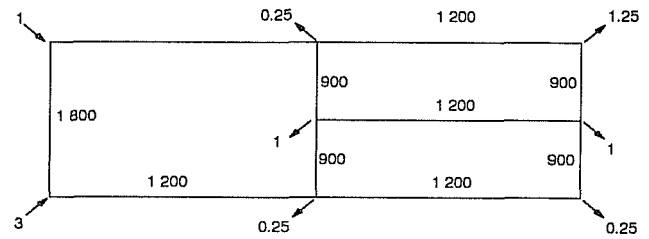
$$D = \left(\frac{10.29n^2}{K} \right)^{3/16} \quad (9)$$

Finalmente, estos diámetros teóricos se aproximan a los diámetros comerciales.

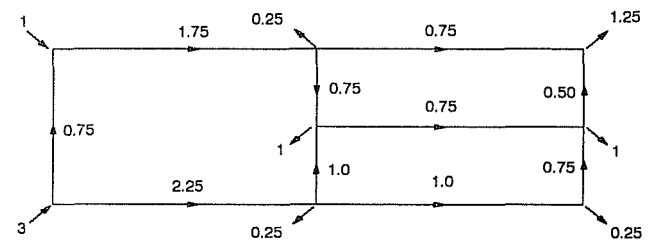
Ejemplo numérico

La red de la ilustración 1 muestra los gastos de ingreso y demanda, así como las longitudes en los tramos, y se requiere diseñar de manera que la diferencia de las cargas piezométricas en el circuito exterior (suma de pérdidas a favor del circuito exterior) sea del orden de 10 m. En la ilustración 2 se muestran los gastos iniciales en los tramos para aplicar el método de Hardy Cross según la ecuación (4).

1. Gastos de ingreso (m^3/s), demandas (m^3/s) y longitudes (m)

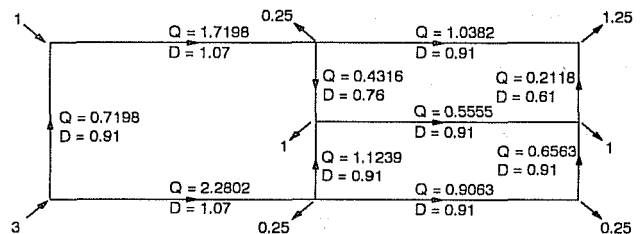


2. Gastos iniciales en los tramos (m^3/s)

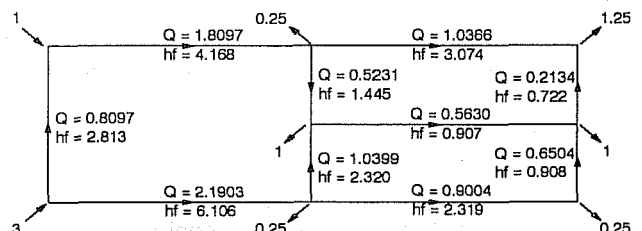


La ilustración 3 presenta los gastos corregidos para el diseño y los diámetros comerciales hallados con la ecuación (8) (se ha usado un valor $f = 0.018$ en todos los tramos de la red). Por último, en la fase de revisión, la ilustración 4 presenta los gastos finales por el método de Cross modificado según Juárez (1984) y las pérdidas de la carga piezométrica en cada tramo de la red. En la solución de este ejemplo se usó el programa cuyo listado aparece al final del texto. Más adelante se indica cómo se usa el programa.

3. Gastos corregidos para diseño (m^3/s) y diámetros comerciales (m)



4. Gastos finales (m^3/s) y pérdidas de carga piezométrica en los tramos (m)



Uso del programa

La ilustración 5 señala la forma en que deben numerarse los circuitos y tramos de la red para la entrada de datos. Se observa que el primer subíndice corresponde al número de circuito, siendo invariable el número cero para el circuito exterior; el segundo subíndice corresponde al número de tramo. Los subíndices se intercambian en los tramos interiores y en aquéllos del circuito exterior cuya numeración es menor o igual al número de circuitos. Cuando el número de tramo del circuito exterior (segundo subíndice) es mayor que el número de circuitos, el número de tramo del circuito adyacente es el mismo.

Al iniciar el programa se ingresan el número de circuitos interiores y el de tramos del circuito exterior, después la longitud del tramo en turno y en seguida el gasto inicial. El gasto debe tener el signo correspondiente al sentido de recorrido del circuito: positivo a favor del giro de las manecillas del reloj, negativo en contra.

En los cuadros 1 a 5 se muestran la entrada de datos para la red del ejemplo y los resultados que arroja el programa.

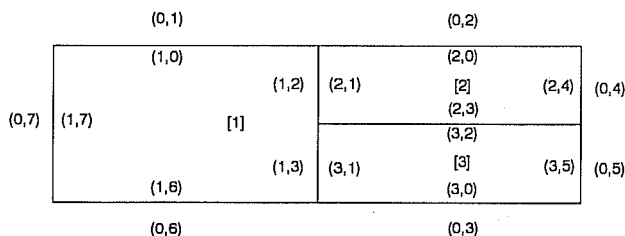
Discusión

En el ejemplo resuelto es importante comprobar, en la ilustración 4 que, en el circuito exterior, la suma de pérdidas a favor del circuito es muy aproximada al dato de 10 m, esto es:

$$\sum h_e(\text{revisada}) = 2.813 + 4.168 + 3.074 = 10.055 \text{ m.}$$

En la práctica puede presentarse una red donde la diferencia entre las cargas piezométricas máxima y mínima no se encuentre en los nudos del circuito exterior, es decir, que el nudo de la carga piezométrica mínima se localice en algún nudo interior; esta situación no desecha el uso del método porque de cualquier manera la ecuación de circuito debe cumplirse en el circuito exterior.

5. Numeración de circuitos y tramos para la entrada de datos



1. Entrada de datos

número de circuitos interiores=? 3

número de tramos circuito exterior=? 7

longitud del tramo	gasto inicial del tramo (en m ³ /s)
L(0,1) =? 1200	Q(0,1) =? 1.75
L(0,2) =? 1200	Q(0,2) =? 0.75
L(0,3) =? 1200	Q(0,3) =? 1.0
L(0,4) =? 900	Q(0,4) =? -0.5

Circuito interior adyacente al tramo	Longitud del tramo	Gasto inicial del tramo (en m ³ /s)
(0,4) =? 2	L(0,5) =? 900	Q(0,5) =? -0.75
(0,5) =? 3	L(0,6) =? 1200	Q(0,6) =? -2.25
(0,6) =? 1	L(0,7) =? 1800	Q(0,7) =? 0.75
(0,7) =? 1	L(1,2) =? 900	Q(1,2) =? 0.75
	L(1,3) =? 900	Q(1,3) =? -1.0
	L(2,3) =? 1200	Q(2,3) =? -0.75

Coefficiente de Darcy, f =? 0.018

Diferencia de cargas en el circuito exterior =? 10

2. Resultados de gastos para diseño (m³/s)

Q(3,0) = .9062879	Q(2,4) = .2118437
Q(3,1) = 1.123931	Q(1,0) = 1.71978
Q(3,2) = .5555554	Q(1,2) = .4316241
Q(3,5) = .6562879	Q(1,3) = 1.123931
Q(2,0) = 1.038156	Q(1,6) = 2.28022
Q(2,1) = .4316241	Q(1,7) = .7197804
Q(2,3) = .5555554	

3. Resultados de diámetros comerciales (m)

Diámetro comercial en el tramo

dc(1,0) = 1.07	dc(2,3) = .91
dc(1,2) = .76	dc(2,4) = .61
dc(1,3) = .91	dc(3,0) = .91
dc(1,6) = 1.07	dc(3,1) = .91
dc(1,7) = .91	dc(3,2) = .91
dc(2,0) = .91	dc(3,5) = .91
dc(2,1) = .76	

4. Resultados de gastos con diámetros comerciales (m³/s)

Q(3,0) = -.9004152	Q(2,4) = -.2134242
Q(3,1) = 1.039903	Q(1,0) = 1.80968
Q(3,2) = .5630085	Q(1,2) = .5231049
Q(3,5) = -.6504153	Q(1,3) = -1.039903
Q(2,0) = 1.036575	Q(1,6) = -2.19032
Q(2,1) = -.5231049	Q(1,7) = .8096807
Q(2,3) = -.5630085	

Un ejemplo de este caso ocurre si en el nudo interior de la red de la ilustración 1 el gasto de demanda es de 3 m³/s, en el nudo de la esquina superior derecha, de 0.25 m³/s y de cero en el nudo inmediatamente abajo del anterior. Al hacer

5. Resultados de pérdida de carga piezométrica en los tramos (m)

$hf(1,0) = 4.168243$	$hf(2,3) = .9067574$
$hf(1,2) = 1.444904$	$hf(2,4) = .7220503$
$hf(1,3) = 2.320109$	$hf(3,0) = 2.319247$
$hf(1,6) = 6.106106$	$hf(3,1) = 2.320109$
$hf(1,7) = 2.813068$	$hf(3,2) = .9067574$
$hf(2,0) = 3.073712$	$hf(3,5) = .9076199$
$hf(2,1) = 1.444904$	

Volumen almacenado en la red = 286.3029 m³
Suma de pérdidas en el circuito exterior = 10.055 m

los cambios correspondientes en la distribución de gastos iniciales en los tramos (0,4) y (2,3) hay que introducir lo siguiente en la entrada de datos:

gasto inicial del tramo (en m³/s) $Q(0,4) = ? +0.50$
gasto inicial del tramo (en m³/s) $Q(2,3) = ? +1.25$

Al conservar la diferencia de cargas en el circuito (0) igual a 10 m, la suma de pérdidas, a favor del circuito, en el circuito (1) es de 12.031 m. Obviamente, los diámetros comerciales en los tramos son diferentes, coincidiendo únicamente en los tramos (1,3), (1,6), (1,7) y (2,4).

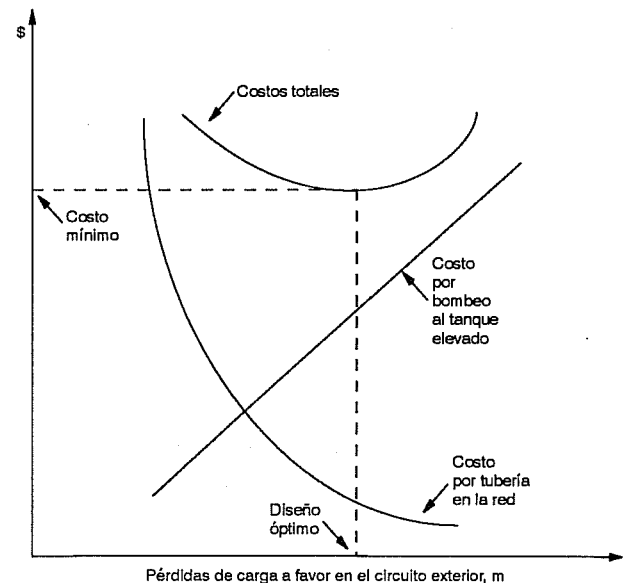
Otros casos prácticos pueden ser los siguientes:

- Redes con dos o más circuitos exteriores. En el ramal abierto (o ramales abiertos) que conecta los circuitos exteriores, se conduce un gasto de demanda conocido, que a su vez es un gasto de ingreso para el siguiente circuito. Es posible emplear este método si se resuelven las redes cerradas por separado.
- Redes donde, para datos iniciales diferentes de pérdida de carga en el circuito exterior (Σh_e), el diseño es el mismo; entonces, ya en la etapa de revisión, es conveniente cambiar algunos diámetros de tuberías para aproximarse a la diferencia de cargas deseada. Esta situación se presenta cuando la pérdida de carga en el circuito exterior es muy alta. En el caso del ejemplo numérico, los diseños se repiten para valores iniciales de +++ entre 50 y 70, siendo la suma de pérdidas de carga a favor del circuito exterior (positivas en el circuito exterior), para la red ya revisada con diámetros comerciales, igual a 64.06 m.

El método puede ser usado para buscar un diseño óptimo si, a la curva de costo por tubería en la red contra pérdidas de carga a favor en el circuito exterior (con diámetros comerciales), se le suma el costo por bombeo al tanque elevado (véase ilustración 6). Al

final del programa de computadora se pregunta si se desea realizar otro diseño para una nueva diferencia de cargas en el circuito exterior. Después de varios diseños se puede construir la curva de costos totales de la ilustración 6 y encontrar el diseño óptimo.

6. Curvas de costos para el diseño óptimo



En los resultados de los ejemplos expuestos, así como otros obtenidos durante la comprobación de la bondad del método, se observa que la tendencia en la distribución de los gastos es: primeramente, hacia los nudos alejados del o los puntos de ingreso y, si la demanda en éstos no es importante, hacia los nudos de mayor demanda, secuencia muy favorable para un diseño económico.

Bibliografía

- Juárez J. "Simplificación del método de Hardy Cross para el cálculo de redes de distribución de agua", en *Revista Universidad y Ciencia*, vol. 1, núm. 1, UJAT, México, 1984.
- Vázquez E. "Un criterio para el diseño económico en redes de distribución de agua potable", *Memorias del VIII Congreso Nacional de Hidráulica*, AMH, México, 1984.
- Vázquez E. y Mejía L. A. "Diseño económico de tuberías en redes de distribución de agua potable", en *Revista Universidad y Ciencia*, vol. 6, núm. 12, UJAT, México, 1989.

¹ Se agradece la revisión crítica del escrito al Ing. J. Roberto Cagigas Velásquez, Jefe de Proyecto de IPESA Consultores. El Ing. Rafael Valenzuela Ricárdez revisó el programa de computadora. El estudiante de preparatoria César Vázquez Lorenzana elaboró las ilustraciones.

Anexo: lista del programa

```

10  REM NOMBRE DEL PROGRAMA: DISCROSS. VAZ
20  REM PROGRAMA PARA EL DISEÑO ECONOMICO EN
    REDES DE DISTRIBUCION DE
30  REM AGUA POTABLE CON EL METODO DE CROSS
    MODIFICADO POR E. VAZQUEZ
40  CLEAR
50  CLS
60  PRINT "número de circuitos interiores=";
70  INPUT N
80  PRINT "número de tramos circuito exterior=";
90  INPUT N
100 DIM Q(, M), K(N, M), D(N, M), L(N, M), DC(N, M), HF(N,
    M)
110 DIM SQ(N), SL(N), SH(N), KQ(N), DH(N), FI(20)
120 FOR K=0 TO 20
130 READ FI(K)
140 NEXT K
150 DATA 0.10, 0.15, 0.20, 0.30, 0.45, 0.61, 0.61, 0.76, 0.91,
    0.91
160 DATA 1.07, 1.22, 1.22, 1.52, 1.52, 1.52, 1.52, 1.52, 1.83,
    1.83
170 DATA 1.83
180 FOR J=1 TO M
190 IF J>N THEN 270
200 PRINT "longitud del tramo L("; O; ", "; J; ") =";
210 INPUT L(O, J)
220 L(J, O) = (O, J)
230 PRINT "gasto inicial del tramo (en m^3/s) Q("; O; ", "; J; ")
    =";
240 INPUT Q(O, J)
250 Q(J, O) = q(O, J)
260 GOTO 350
270 PRINT "longitud del tramo L("; O; ", "; J; ") =";
280 INPUT L(O, J)
290 PRINT "gasto inicial del tramo (en m^3/s) Q("; O; ", "; J; ")
    =";
300 INPUT Q(O, J)
310 PRINT "circuito interior adyacente al tramo ("; O; ", "; J; ")
    =";
320 INPUT I
330 L(I, J) = L(O, J)
340 Q(I, J) = Q(O, J)
350 NEXT J
360 FOR I=1 TO N-1
370 FOR J=I+1 TO N
380 PRINT "longitud del tramo L("; I; ", "; J; ") =";
390 INPUT L(I, J)
400 L(J, I) = L(I, J)
410 PRINT "gasto inicial el tramo en m^3/s) Q("; I; ", "; J; ")
    =";
420 INPUT Q(I, J)
430 Q(J, I) = -Q(I, J)
440 NEXT J
450 NEXT I
460 PRINT "coeficiente de Darcy, f=";
470 INPUT F
480 PRINT "diferencia de cargas en el circuito exterior=";
490 INPUT DH(O)
500 PRINT "terminan datos, inicia cálculo de corrección"
510 REM CALCULA CORRECCION DE LOS GASTOS
    INICIALES
520 C=O
530 C=C+1
540 FOR I=O TO N
550 SN=O
560 SD=O
570 FOR J=O TO M
580 IF (I, J) =O THEN 610
590 SN=SN+L(I, J) *Q(I, J)
600 SD=SD+L(I, J)
610 NEXT J
620 DQ= 5*(SN/SD)
630 FOR K=O TO M
640 IF L(I, K) =O THEN 660
650 Q(I, K) =q(I, K) +DQ
660 NEXT K
670 IF I>O TO N
680 FOR J=1 TO N
690 NEXT J
700 NEXT J
710 FOR K=1 TO N
720 FOR J=N+1 TO M
730 IF L(K, J) =O THEN 750
740 Q(K, J) =Q(O, J)
750 NEXT J
760 NEXT K
770 GOTO 870
780 FOR J=1 TO N
790 IF L(I, J) =O THEN 810
800 Q(J, I) =-Q(I, J)
810 NEXT J
820 Q(O, I) =Q(I, O)
830 FOR J=N+1 TO M
840 IF L(I, J) =O THEN 860
850 Q(O, J) =Q(I, J)
860 NEXT J
870 NEXT I
880 IF C=3*M THEN 910
890 GOTO 530
900 REM IMPRIME LOS GASTOS PARA DISEÑO
910 FOR J=O TO M
920 IF J=N THEN 950
930 IF L(N, J) =O THEN 950
940 PRINT "gasto para diseño Q("; N; ", "; J; ") ="; Q(N, J);
    "m^3/s"
950 NEXT J
960 FOR K=1 TO N-1
970 I=N-K
980 FOR J=O TO M
990 IF I=J THEN 1020
1000 IF L(I, J) =O THEN 1020
1010 PRINT "gasto para diseño Q("; I; ", "; J; ") ="; Q(I, J);
    "m^3/s"
1020 NEXT J
1030 NEXT K
1040 STOP
1050 REM DISEÑO DE TUBERIAS
1060 SQ(O) =O
1070 FOR I=O TO M
1080 IF L(O, I) =O THEN 1110
1090 IF Q(O, I) <O THEN 1110
1100 SQ(O) =SQ(O) +L(O, I) *Q(O, I)
1110 NEXT I
1120 CTE=DH(O) /SQ(O)
1130 FOR J=O TO N
1140 REM CALCULA LOS DIAMETROS TEORICOS
1150 FOR I=O TO M
1160 IF L(J, I) =O THEN 1190
1170 D5=(F*ABS(Q(J, I))) /12.1*CTE)
1180 D(J, I) =D5^(1/5)
1190 NEXT I
1200 NEXT J
1210 REM CALCULA LOS DIAMETROS COMERCIALES
1220 FOR J=O TO N
1230 FOR I=O TO M
1240 IF L(J, I) =O THEN 1280
1250 DA=D(J, I) *10
1260 K=INT(DA)
1270 DC(J, I) =FI(K)
1280 NEXT I
1290 NEXT J
1300 REM IMPRIME LOS DIAMETROS COMERCIALES

```

```

1310 FOR J=1 TO N
1320 FOR I=O TO M
1330 IF L(J, I) =O THEN 1350
1340 PRINT "diámetro comercial en el tramo dc("; J; ", "; I; ")
      ="; DC(J, I); "m"
1350 NEXT I
1360 NEXT J
1370 STOP
1380 REM REvisa LOS GASTOS CON DIAMETROS COMER-
      CIALES
1390 REM CALCULA CONSTANTES ESTADISTICAS
1400 FOR J=O TO N
1410 FOR I=O TO M
1420 IF L(J, I) =O THEN 1440
1430 K(J, I) =(F*L(J, I)) /(12.1*(DC(J, I) ^5))
1440 NEXT I
1450 NEXT J
1460 REM CALCULA CORRECCION CON DIAMETROS
      COMERCIALES
1470 C=O
1480 C=C+1
1490 FOR I=O TO N
1500 SN=O
1510 SD=O
1520 FOR J=O TO M
1530 IF L(I, J) =O THEN 1580
1540 S1=K(I, J) *ABS(q(I, J))
1550 S2=S1*Q(I, J)
1560 SN=SN+S2
1570 SD=SD+S1
1580 NEXT J
1590 DQ=-.5*(SN/SD)
1600 FOR K=O TO M
1610 IF L(I, K) =O THEN 1630
1620 Q(I, K) =Q(I, K) +DQ
1630 NEXT K
1640 IF I>O THEN 1750
1650 FOR J=1 TO N
1660 Q(J, Q) =Q(O, J)
1670 NEXT J
1680 FOR K=1 TO N
1690 FOR J=N+1 TO M
1700 IF L(K, J) =O THEN 1720
1710 Q(KI, J) =Q(O, J)
1720 NEXT J
1730 NEXT K
1740 GOTO 1840
1750 FOR J=1 TO N
1760 IF L(I, J) =O THEN 1780
1770 Q(J, I) =-Q(I, J)
1780 NEXT J
1790 Q(O, I) =Q(I, O)
1800 FOR J=N+1 TO M
1810 IF L(I, J) =O THEN 1830
1820 Q(O, J) =Q(I, J)
1830 NEXT J
1840 NEXT I
1850 IF C=3*M THEN 1880

1860 GOTO 1480
1870 REM IMPRIME LOS GASTOS CON DIAMETRO COMER-
      CIAL
1880 FOR J=O THEN 1920
1890 IF J=N THEN 1920
1900 IF L(N, J) =O THEN 1920
1910 PRINT "gasto con diámetro comercial Q("; N; ", "; J; ")
      ="; Q(N, J); "m^3/s"
1920 NEXT J
1930 FOR K=1 TO N=1
1940 I=N-K
1950 FOR J=O TO M
1960 IF I=J THEN 1990
1970 IF L(I, J) =O THEN 1990
1980 PRINT "gasto con diámetro comercial Q("; I; ", "; J; ") =";
      Q(I, J); "m^3/s"
1990 NEXT J
2000 NEXT K
2010 STOP
2020 REM CALCULA E IMPRIME LAS PERDIDAS DE CARGA
      EN LOS TRAMOS
2030 FOR J=1 TO N
2040 FOR I=O TO M
2050 IF L(J, I) =O THEN 2080
2060 HF(J, I) =K(J, I) *(Q(J, I) ^2)
2070 PRINT "pérdida de carga en el tramo hf("; J; ", "; I; ") =";
      HF(J, I); "m"
2080 NEXT I
2090 NEXT J
2100 REM CALCULA EL VOLUMEN ALMACENADO EN LA RED
2110 VOL=O
2120 FOR J=1 TO N
2130 FOR I=O TO M
2140 IF L(J, I) =O THEN 2160
2150 VOL=VOL+((3.1416/4) *(DC(J, I) ^2)) *L(J, I)
2160 NEXT I
2170 NEXT J
2180 PRINT "volumen almacenado en la red="; VOL
2190 REM CALCULA LA SUMA DE PERDIDAS A FAVOR EN EL
      CIRCUITO EXTERIOR
2200 SHF=O
2210 FOR I=1 TO M
2220 IF Q(O, I) <O THEN 2240
2230 SHF=SHF+K(O, I) *(Q(O, I) ^2)
2240 NEXT I
2250 PRINT "suma de pérdidas a favor en el circuito exterior=";
      SHF
2260 PRINT "? DESEAS CAMBIAR LA SUMA DE PERDIDAS
      PARA OTRO DISEÑO?"
2270 PRINT "Si, escribe 1. NO, escribe o";
2280 INPUT RD
2290 IF RD=O THEN 2330
2300 PRINT "nueva diferencia de cargas en el circuito exterior";
2310 INPUT DH(O)
2320 GOTO 510
2330 END

```