

Transitorios por oscilación de masa en acueductos a presión

Rafael Carmona Paredes

Instituto de Ingeniería, UNAM

En los sistemas de conducción de agua a presión pueden presentarse estados de flujo transitorio por distintas maniobras y en distintos tramos de la conducción. Por comparación con la velocidad de amortiguación de los transitorios producidos por golpe de ariete, a los transitorios por oscilación de masa se les conoce también como transitorios lentos. El estudio numérico de estos dos tipos de transitorios se realiza con enfoques distintos: en los primeros el modelo de estudio está basado en la solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas de un fenómeno ondulatorio en un medio deformable. En los segundos, el análisis se basa en la solución de las ecuaciones de continuidad y de energía en una tubería que une dos tanques abiertos. La ecuación de energía en la tubería es no lineal en la velocidad del flujo, por lo que la solución debe plantearse también en forma numérica. En este artículo se presenta un procedimiento eficiente para la solución de estas ecuaciones, basado en un esquema de integración de Euler, que puede programarse en pequeñas computadoras de bolsillo.

La determinación del comportamiento transitorio por oscilación de masa es de gran importancia en el análisis del funcionamiento de un sistema de conducción y con él se determinan algunas características de su obra civil, como el diámetro de las torres de oscilación o el uso de vasos de regulación.

En los grandes acueductos recientemente construidos en el país, hay distintas configuraciones de tanques de regulación, torres de oscilación y presas conectadas entre sí por tuberías largas (decenas de kilómetros) con diámetros grandes (de 2 ó 3 m); en ellos, el comportamiento transitorio por oscilación de masa llega a producir variaciones considerables en el nivel de las torres de oscilación y otras tan grandes en el gasto de las tuberías, que incluso invierten el sentido del movimiento del agua y alcanzan un porcentaje alto del gasto de operación normal en sentido inverso.

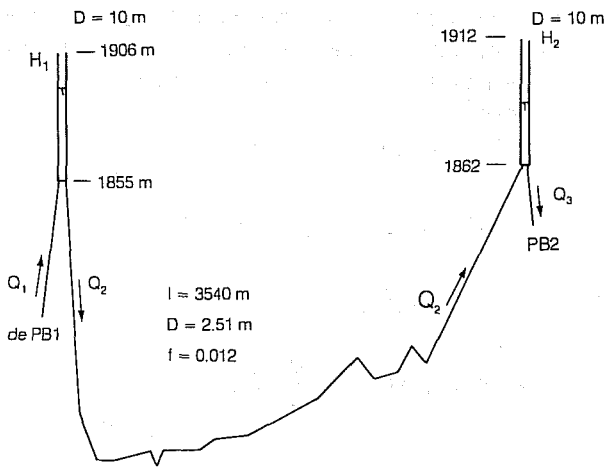
En este trabajo, se analiza la integración numérica con el método de Euler de las ecuaciones que modelan al fenómeno y se presenta una pequeña modificación a dicho método, que reduce la cantidad de memoria utilizada; al mismo tiempo se observa

que el método se vuelve menos sensible al tamaño del paso de integración. Su aplicación se expone en los dos ejemplos siguientes. En el primero (véase ilustración 1) se muestra el esquema usado en el Sistema Cutzamala para la conexión en serie de plantas de bombeo. En dicho sistema los transitorios suceden al poner en marcha o suspender el funcionamiento de las plantas de bombeo; los que llenan las siguientes condiciones son interesantes:

- Arranque de PB1 sin encender PB2
- Paro de PB2 sin suspender el funcionamiento de PB1
- Paro simultáneo de PB1 y PB2

El segundo ejemplo (véase ilustración 2) contiene el esquema hidráulico de la conexión del tanque Garrapatas y la presa La Boca con la torre de succión de la planta de bombeo número 4 del Sistema Linares-Monterrey. En esta parte del sistema, el problema principal se tiene al parar las bombas de la planta número 4, después de lo cual, el agua que baja del tanque Garrapatas deberá dirigirse a la presa La Boca.

1. Esquema de la conexión en serie de plantas de bombeo en el sistema Cutzamala



Los problemas arriba mencionados se analizaron a fin de determinar las características de los vertedores que deben anexarse a las torres para evitar derrames no controlados por su comportamiento.

Modelo matemático

Comportamiento dinámico del agua en una tubería

El comportamiento dinámico del agua en una tubería, considerando el agua incompresible y la tubería indeformable se describe con la ecuación general de Bernoulli:

$$\frac{l}{gS} \frac{dQ}{dt} = H_1 - H_2 - \frac{f \cdot l}{2gDS^2} \cdot Q \cdot |Q|$$

donde

- l = longitud de la tubería
- D = diámetro de la tubería
- S = sección transversal de la tubería
- f = coeficiente de pérdidas por fricción (Darcy-Weisbach)
- g = aceleración de la gravedad
- H_1 = nivel del agua en el tanque aguas arriba
- H_2 = nivel del agua en el tanque aguas abajo
- Q = gasto en la tubería

El término $I = \frac{l}{gS}$ se conoce como término inercial y el término, $K = \frac{f \cdot l}{2gDS^2}$, como la constante de pérdida de carga.

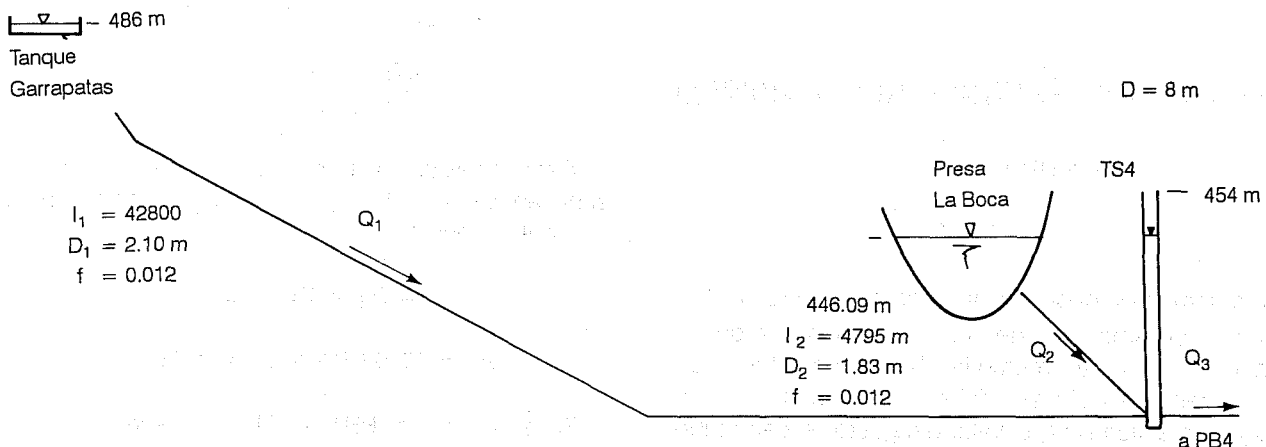
Si la conducción está formada por varias tuberías, el término inercial y la constante de carga deben calcularse como sigue:

$$I = \frac{1}{g} \sum_i \frac{l_i}{S_i}$$

$$K = \frac{1}{2g} \sum_i \left(\frac{f_i \cdot l_i}{D_i \cdot S_i^2} \right)$$

Si es necesario, también pueden agregarse al valor anterior de K las pérdidas concentradas en válvulas, orificios, cambios de dirección, ampliaciones, reducciones, etcétera.

2. Esquema hidráulico de la conexión del tanque Garrapatas y la presa La Boca con al torre de succión de PB4



Comportamiento dinámico del nivel del agua en un tanque de regulación o de una torre de oscilación

Despreciando la inercia del agua en el tanque, se obtiene la ecuación:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{A(Z)} \sum_j Q_j$$

donde

H = nivel del agua en el tanque relativo a algún nivel de referencia

A = área del tanque en función de Z

Z = tirante de agua en el tanque

Q_j = gasto que ingresa al tanque (mayor que cero) o que sale del tanque (menor de cero)

Solución numérica

Un sistema hidráulico está modelado, según sus conexiones, por un conjunto de ecuaciones diferenciales simultáneas para las tuberías y los tanques. Su solución numérica, a través del método de Euler, conduce al siguiente algoritmo:

a) Cálculo de niveles en los tanques:

$$H(t + \Delta t) = H(t) + \Delta t \cdot \dot{H}(t)$$

ó

$$H(t + \Delta t) = H(t) + \frac{\Delta t}{A(Z)} \sum_j Q_j(t)$$

b) Cálculo de gastos en las tuberías:

$$Q(t + \Delta t) = Q(t) + \Delta t \cdot \dot{Q}(t)$$

ó

$$Q(t + \Delta t) = Q(t) + \frac{\Delta t}{I} (H_1(t) - H_2(t) - KQ(t)|Q(t)|)$$

c) Actualización del tiempo:

$$t = t + \Delta t$$

Si $t \leq$ tiempo de observación, regresar al inciso a).

La programación de este algoritmo requiere almacenar en la memoria las constantes que intervienen, más el valor del nivel del agua en cada tanque en el tiempo t , el valor del gasto en cada tubo en el tiempo t y el valor del incremento del nivel en

cada tanque o el valor del incremento en el gasto de cada tubo.

Para reducir el espacio requerido en la memoria, se puede actualizar el valor del gasto en cada tubo, utilizando el valor ya actualizado (en $t + \Delta t$) del nivel del agua en los tanques, con lo cual se establecen los siguientes algoritmos que se llamarán de Euler modificado:

a) Cálculo de niveles en los tanques:

$$H(t + \Delta t) = H(t) + \frac{\Delta t}{A(Z)} \sum_j Q_j(t)$$

b) Cálculo de gastos en las tuberías:

$$Q(t + \Delta t) = Q(t) + \frac{\Delta t}{I} (H_1(t + \Delta t) - H_2(t + \Delta t) - kQ(t)|Q(t)|)$$

c) Actualización del tiempo:

$$t = t + \Delta t$$

Si $t \leq$ tiempo de observación, regresar al inciso a).

A continuación se comparan los resultados de estos dos algoritmos aplicándolos a los ejemplos mencionados al principio del artículo.

Aplicación

Ejemplo 1

Considerando la ilustración 1, las ecuaciones que modelan el fenómeno son:

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A} (Q_1 - Q_2)$$

$$I \cdot \frac{dQ_2}{dt} = H_1 - H_2 - k \cdot Q_2 |Q_2|$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2} (Q_2 - Q_3)$$

Para analizar el transitorio que sigue al paro simultáneo de PB1 y PB2, se consideran las siguientes condiciones iniciales:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 12.52 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$H_1 = 1900.63 \text{ m y } H_2 = 1895.14 \text{ m}$$

Si el paro de PB1 y PB2 sucede en $t = 0$, entonces $Q_1 = Q_3 = 0$ para $t \geq 0$.

Evaluación de constantes

$$I = \frac{l}{gs} = \frac{3540}{9.81 \times \frac{\pi}{4} (2.51)^2} = 72.93 \text{ s}^2/\text{m}^2$$

$$K = \frac{0.012 \times 3540}{2 \times 9.81 \times 2.51 \left(\frac{\pi}{4} (2.51)^2 \right)^2} = 0.035 \text{ s}^2/\text{m}^5$$

$$A_1 = A_2 = \frac{\pi}{4} (10)^2 = 78.54 \text{ m}^2$$

Aplicando el método de Euler se obtienen los siguientes algoritmos:

a) Para el cálculo de niveles en los tanques:

$$H_1(t + \Delta t) = H_1(t) + \frac{\Delta t}{A} (-Q_2(t))$$

$$H_2(t + \Delta t) = H_2(t) + \frac{\Delta t}{A} (Q_2(t))$$

b) Para el cálculo del gasto en la tubería:

$$Q_2(t + \Delta t) = Q_2(t) + \frac{\Delta t}{I} (H_1(t) - H_2(t) - kQ_2(t)|Q_2(t)|)$$

c) Para la actualización del tiempo:

$$t = t + \Delta t$$

Si $t \leq$ tiempo de observación, regresar al inciso a).

En el cuadro A del anexo se presenta la programación de este algoritmo para una calculadora HP-25; los resultados obtenidos al utilizar un paso de integración de 30 s se muestran en el cuadro 1 y en el 2, los correspondientes a un paso e integración de 10 s. Al comparar los resultados, se observa una fuerte dependencia de la amplitud de las oscilaciones con el paso de integración usado. Para una mejor comparación, en las ilustraciones 3 y 4 se muestra la evolución temporal de los niveles en los tanques para $\Delta t = 30$ s y $\Delta t = 10$ s, respectivamente, y para la *solución exacta* (obtenida con $\Delta t = 10$ s). La ilustración 5 contiene la evolución temporal del gasto en la tubería que une los tanques para $\Delta t = 30$ s y $\Delta t = 10$ s, y en comparación con la *solución exacta*.

Al aplicar el método de Euler modificado, se obtienen los siguientes algoritmos:

a) Para el cálculo de niveles en los tanques:

$$H_1(t + \Delta t) = H_1(t) + \frac{\Delta t}{A} (-Q_2(t))$$

1. Resultados numéricos con $\Delta t=30$ s. Método de Euler

t (min)	H ₁ (m)	H ₂ (m)	Q ₂ (m ³ /s)
0:00	1 900.63	1 895.14	12.52
0:30	1 895.85	1 899.92	12.52
1:00	1 891.06	1 904.71	8.59
1:30	1 887.78	1 907.99	1.92
2:00	1 887.05	1 908.72	-6.45
2:30	1 889.52	1 906.25	-14.76
3:00	1 895.15	1 900.62	-18.51
3:30	1 902.22	1 893.55	-15.82
4:00	1 908.27	1 887.50	-8.65
4:30	1 911.57	1 884.20	0.97
5:00	1 911.20	1 884.57	12.22
5:30	1 906.53	1 889.24	21.02
6:00	1 898.50	1 897.27	21.78
6:30	1 890.19	1 905.58	15.46
7:00	1 884.28	1 911.49	5.68
7:30	1 882.11	1 913.66	-5.97
8:00	1 884.39	1 911.38	-18.44
8:30	1 891.43	1 904.34	-24.64
9:00	1 900.85	1 894.92	-21.21
9:30	1 908.95	1 886.82	-12.30
10:00	1 913.64	1 882.13	-1.02
10:30	1 914.03	1 881.74	11.96
11:00	1 909.46	1 886.31	23.19
11:30	1 900.61	1 895.16	24.97
12:00	1 891.07	1 904.70	18.23
12:30	1 884.10	1 911.67	7.84
13:00	1 887.11	1 914.66	-4.38
13:30	1 882.78	1 912.99	-17.91
14:00	1 889.62	1 906.15	-25.71
14:30	1 899.45	1 896.32	-22.99
15:00	1 908.23	1 887.54	-14.10
15:30	1 913.61	1 882.16	-2.73
16:00	1 914.65	1 881.12	10.32
16:30	1 910.71	1 885.06	22.58
17:00	1 902.09	1 893.68	25.79
17:30	1 892.23	1 903.54	19.67
18:00	1 884.72	1 911.05	9.45
18:30	1 881.11	1 914.66	-2.67
19:00	1 882.13	1 913.64	-16.37
19:30	1 888.38	1 907.39	-25.47
20:00	1 898.11	1 897.66	-23.95

$$H_2(t + \Delta t) = H_2(t) + \frac{\Delta t}{A} (Q_2(t))$$

b) Para el cálculo del gasto en la tubería:

$$Q_2(t + \Delta t) = Q_2(t) + \frac{\Delta t}{I} (H_1(t + \Delta t) - H_2(t + \Delta t) - kQ_2(t)|Q_2(t)|)$$

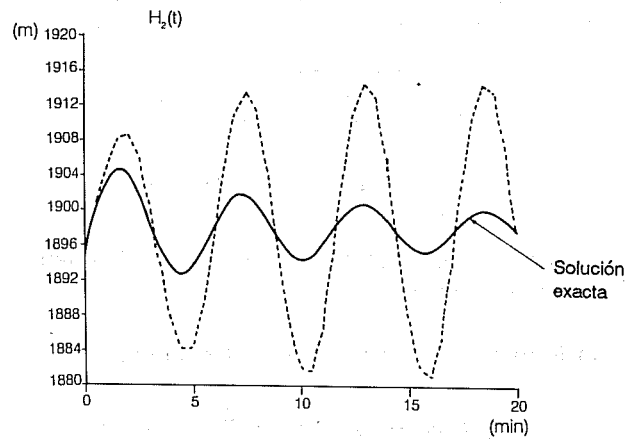
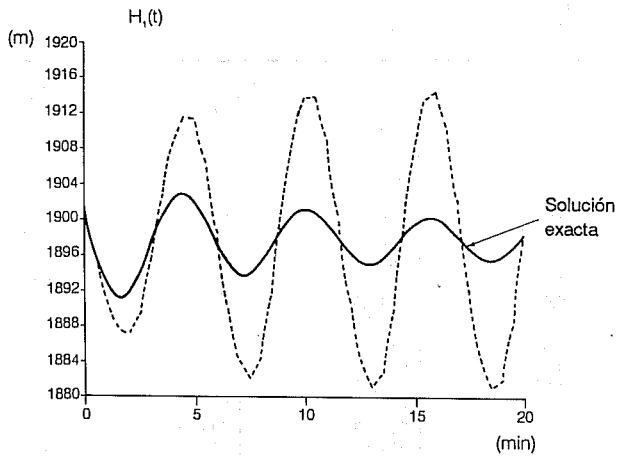
c) Para la actualización del tiempo:

$$t = t + \Delta t$$

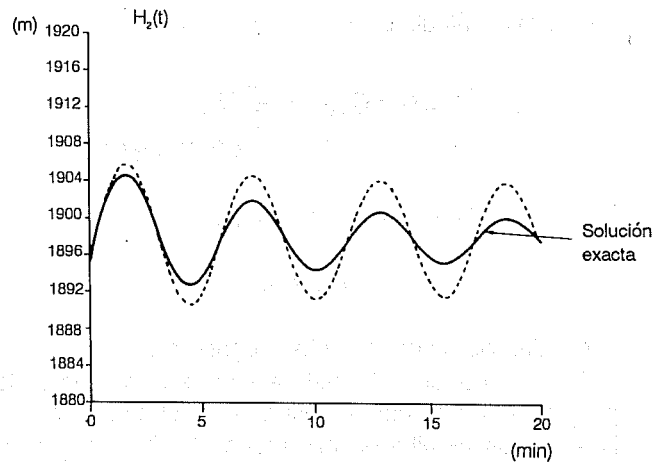
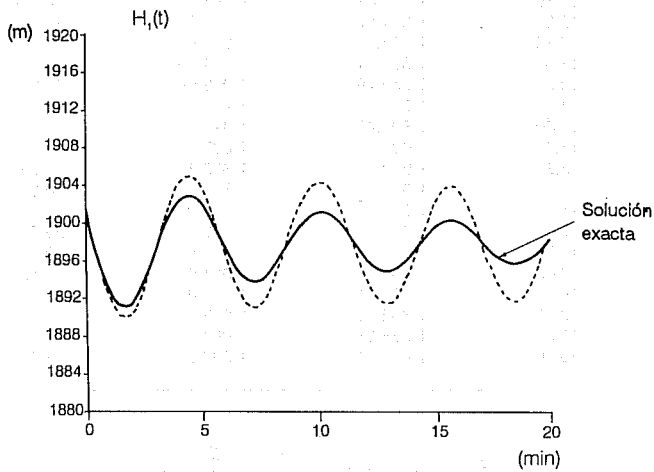
Si $t \leq$ tiempo de observación, regresar al inciso a).

El cuadro B (véase anexo) contiene la programación de este algoritmo para una calculadora HP-25. En el 3 se señalan los resultados tras utilizar un paso de integración de 30 s y en el siguiente (4) los obtenidos con un paso de integración de 10 s. De la

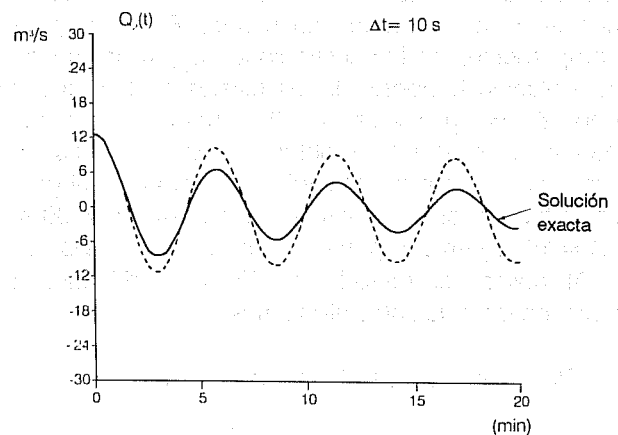
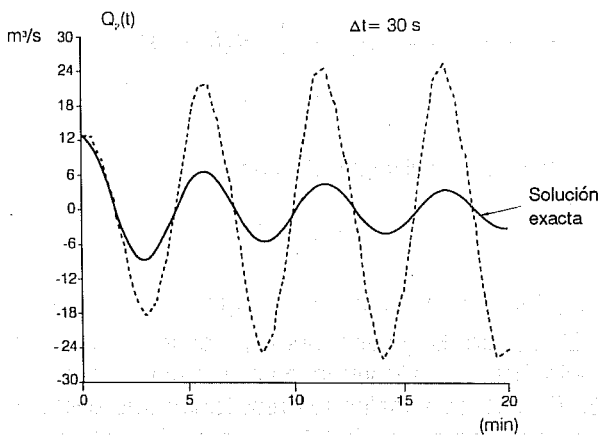
3. Resultados numéricos aplicando el método de Euler al ejemplo 1, con $\Delta t = 30$ s



4. Resultados numéricos aplicando el método de Euler al ejemplo 1, con $\Delta t = 10$ s



5. Resultados numéricos aplicando el método de Euler al ejemplo 1. Gasto en tubería con $\Delta t = 30$ s y 10 s



comparación de dichos resultados se deduce que la amplitud de las oscilaciones no depende sustancialmente del tamaño del paso de integración usado.

En las ilustraciones 6 y 7 se presenta la evolución temporal de los niveles en los tanques para $\Delta t = 30$ s y $\Delta t = 10$ s, respectivamente, y para la *solución exacta*. Se observa que para ambos valores de Δt ,

2. Resultados numéricos con $\Delta t=10$ s. Método de Euler

t (min)	H ₁ (m)	H ₂ (m)	Q ₂ (m ³ /s)
0:00	1 900.63	1 895.14	12.52
0:10	1 899.04	1 896.73	12.52
0:20	1 897.44	1 898.33	12.08
0:30	1 895.90	1 899.87	11.26
0:40	1 894.47	1 901.30	10.11
0:50	1 893.18	1 902.59	8.68
1:00	1 892.08	1 903.69	7.03
1:10	1 891.18	1 904.59	5.20
1:20	1 890.52	1 905.25	3.23
1:30	1 890.11	1 905.66	1.16
1:40	1 889.96	1 905.81	-0.98
1:50	1 890.08	1 905.69	-3.15
2:00	1 890.48	1 905.29	-5.24
2:10	1 891.15	1 904.62	-7.14
2:20	1 892.06	1 903.71	-8.74
2:30	1 893.17	1 902.60	-9.97
2:40	1 894.44	1 901.33	-10.78
2:50	1 895.81	1 899.96	-11.17
3:00	1 897.24	1 898.53	-11.14
3:10	1 898.66	1 897.11	-10.72
3:20	1 900.02	1 895.75	-9.96
3:30	1 901.29	1 894.48	-8.90
3:40	1 902.42	1 893.35	-7.58
3:50	1 903.39	1 892.38	-6.06
4:00	1 904.16	1 891.61	-4.38
4:10	1 904.72	1 891.05	-2.57
4:20	1 905.04	1 890.73	-0.66
4:30	1 905.13	1 890.64	1.30
4:40	1 904.96	1 890.81	3.28
4:50	1 904.54	1 891.23	5.17
5:00	1 903.88	1 891.89	6.87
5:10	1 903.01	1 892.76	8.29
5:20	1 901.96	1 893.81	9.36
5:30	1 900.76	1 895.01	10.06
5:40	1 899.48	1 896.29	10.36
5:50	1 898.16	1 897.61	10.29
6:00	1 896.85	1 898.92	9.85
6:10	1 895.60	1 900.17	9.10
6:20	1 894.44	1 901.33	8.08
6:30	1 893.41	1 902.36	6.82
6:40	1 892.54	1 903.23	5.37
6:50	1 891.86	1 903.91	3.77
7:00	1 891.38	1 904.39	2.05
7:10	1 891.12	1 904.65	0.24
7:20	1 891.09	1 904.68	-1.61
7:30	1 891.29	1 904.48	-3.47
7:40	1 891.73	1 904.04	-5.22
7:50	1 892.40	1 903.37	-6.77
8:00	1 893.26	1 902.51	-8.06
8:10	1 894.29	1 901.48	-9.01
8:20	1 895.43	1 900.34	-9.61
8:30	1 896.66	1 899.11	-9.84
8:40	1 897.71	1 897.86	-9.71
8:50	1 899.15	1 896.62	-9.25
9:00	1 900.32	1 895.45	-8.50
9:10	1 901.41	1 894.36	-7.48
9:20	1 902.36	1 893.41	-6.25
9:30	1 903.15	1 892.62	-4.38
9:40	1 903.77	1 892.00	-3.28
9:50	1 904.19	1 891.58	-1.61
10:00	1 904.39	1 891.38	0.13

se tiene un buen cálculo de las amplitudes de las oscilaciones, sin embargo, al crecer Δt aumenta la frecuencia de las oscilaciones calculadas. En la ilustración 8 se señalan la evolución temporal del gasto en la tubería que une los tanques para $\Delta t = 30$ s, y $\Delta t = 10$ s y su comparación con la *solución exacta*.

c) Actualización del tiempo:

$$t = t + \Delta t$$

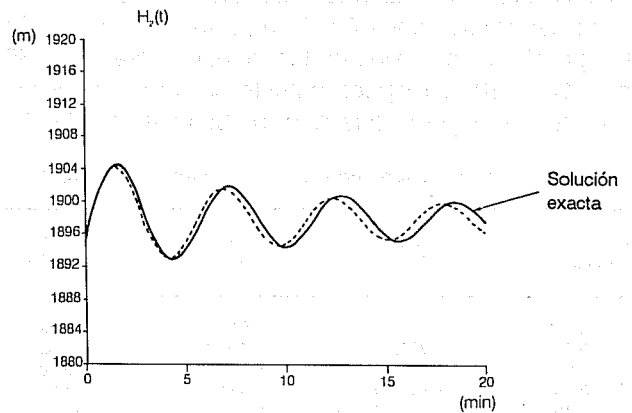
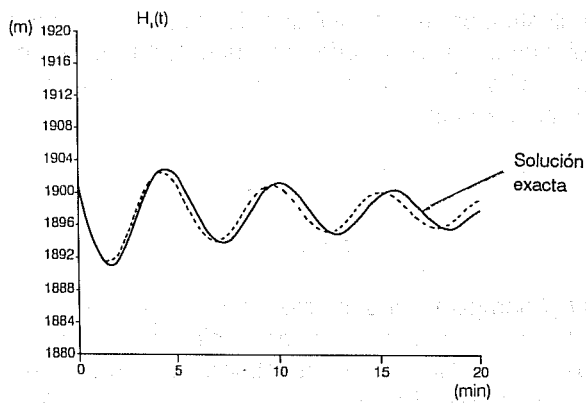
Si $t \leq$ tiempo de observación regresar al inciso a).

La programación de este algoritmo para una calculadora HP-25 puede observarse en el cuadro C del anexo. En el 5, se señalan los resultados con un paso de integración de 30 s y en el 6, los que corresponden a uno de 10 s. En la ilustración 9 se comparan ambos cálculos con la *solución exacta* (obtenida con $\Delta t = 0.1$ s). De nuevo es posible

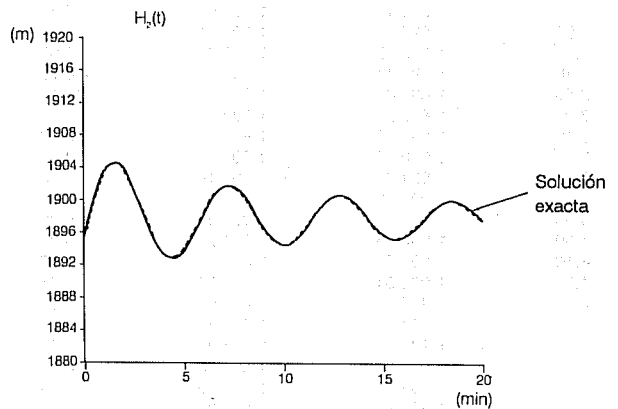
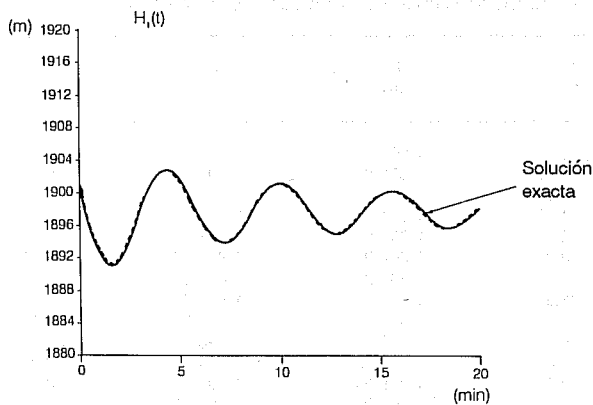
3. Resultados numéricos con $\Delta t=30$ s. Método de Euler

t (min)	H ₁ (m)	H ₂ (m)	Q ₂ (m ³ /s)
0:00	1 900.63	1 895.14	12.52
0:30	1 895.85	1 899.92	8.59
1:00	1 892.57	1 903.20	3.15
1:30	1 891.36	1 904.41	-2.36
2:00	1 896.26	1 903.51	-6.90
2:30	1 894.90	1 900.87	-8.67
3:00	1 898.21	1 897.56	-7.32
3:30	1 901.01	1 894.76	-3.98
4:00	1 902.53	1 893.24	0.07
4:30	1 902.50	1 893.27	3.87
5:00	1 901.02	1 894.75	6.23
5:30	1 898.64	1 897.13	6.30
6:00	1 896.24	1 899.53	4.37
6:30	1 894.57	1 901.20	1.37
7:00	1 894.05	1 901.72	-1.82
7:30	1 894.74	1 901.03	-4.36
8:00	1 896.40	1 899.37	-5.30
8:30	1 898.43	1 897.34	-4.45
9:00	1 900.13	1 895.64	-2.32
9:30	1 901.02	1 894.75	0.34
10:00	1 900.89	1 894.88	2.80
10:30	1 899.82	1 895.95	4.28
11:00	1 898.18	1 897.59	4.26
11:30	1 896.55	1 899.22	2.90
12:00	1 895.45	1 900.32	0.78
12:30	1 895.15	1 900.62	-1.48
13:00	1 895.72	1 900.05	-3.24
13:30	1 896.95	1 898.82	-3.85
14:00	1 898.42	1 897.35	-3.20
14:30	1 899.64	1 896.13	-1.60
15:00	1 900.26	1 895.51	0.39
15:30	1 900.11	1 895.66	2.21
16:00	1 899.26	1 896.51	3.28
16:30	1 898.01	1 897.76	3.23
17:00	1 896.78	1 898.99	2.17
17:30	1 895.95	1 899.82	0.51
18:00	1 895.76	1 900.01	-1.25
18:30	1 896.23	1 899.54	-2.58
19:00	1 897.22	1 898.55	-3.03
19:30	1 898.38	1 897.39	-2.50
20:00	1 899.33	1 896.44	-1.22

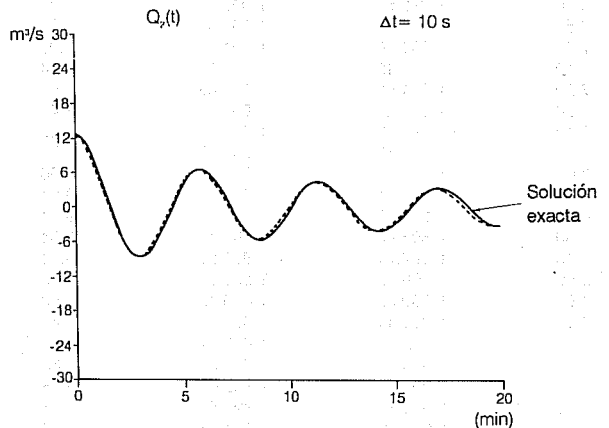
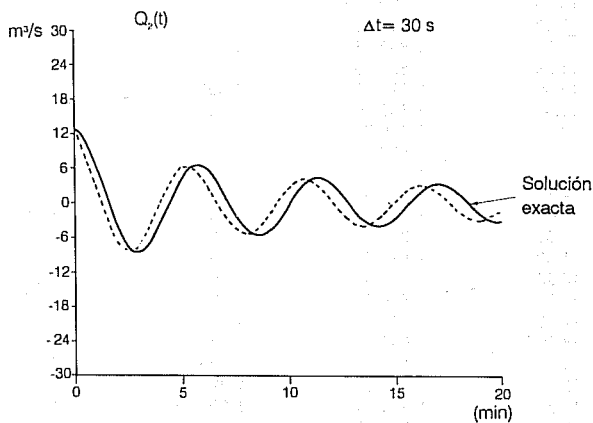
6. Resultados numéricos aplicando el método de Euler modificado al ejemplo 1, con $\Delta t = 30$ s



7. Resultados numéricos aplicando el método de Euler modificado al ejemplo 1, con $\Delta t = 10$ s



8. Resultados numéricos aplicando el método de Euler modificado al ejemplo 1. Gasto en la tubería con $\Delta t = 30$ s y 10 s



4. Resultados numéricos con $\Delta t=10$ s. Método de Euler

t	H ₁	H ₂	Q ₂
0:00	1 900.63	1 895.14	12.52
0:10	1 899.04	1 896.73	12.08
0:20	1 897.50	1 898.27	11.28
0:30	1 896.06	1 899.71	10.17
0:40	1 894.77	1 901.00	8.82
0:50	1 893.64	1 902.13	7.28
1:00	1 892.72	1 903.05	5.61
1:10	1 892.00	1 903.77	3.84
1:20	1 891.51	1 904.26	2.04
1:30	1 891.26	1 904.51	0.19
1:40	1 891.23	1 904.54	-1.64
1:50	1 891.44	1 904.33	-3.39
2:00	1 891.87	1 903.90	-4.98
2:10	1 892.51	1 903.26	-6.34
2:20	1 893.31	1 902.46	-7.40
2:30	1 894.26	1 901.51	-8.13
2:40	1 895.29	1 900.48	-8.53
2:50	1 896.38	1 899.39	-8.59
3:00	1 897.47	1 898.30	-8.35
3:10	1 898.53	1 897.24	-7.84
3:20	1 899.53	1 896.24	-7.09
3:30	1 900.43	1 895.34	-6.15
3:40	1 901.22	1 894.55	-5.05
3:50	1 901.86	1 893.91	-3.84
4:00	1 902.35	1 893.42	-2.55
4:10	1 902.67	1 893.10	-1.20
4:20	1 902.83	1 892.94	0.16
4:30	1 902.81	1 892.96	1.51
4:40	1 902.62	1 893.15	2.80
4:50	1 902.26	1 893.51	3.96
5:00	1 901.75	1 894.02	4.94
5:10	1 901.13	1 894.64	5.72
5:20	1 900.40	1 895.37	6.25
5:30	1 899.60	1 896.17	6.53
5:40	1 898.77	1 897.00	6.57
5:50	1 897.93	1 897.84	6.38
6:00	1 897.12	1 898.65	5.97
6:10	1 896.36	1 899.41	5.38
6:20	1 895.68	1 900.09	4.64
6:30	1 895.09	1 900.68	3.77
6:40	1 894.61	1 901.16	2.80
6:50	1 894.25	1 901.52	1.77
7:00	1 894.02	1 901.75	0.69
7:10	1 893.94	1 901.83	-0.39
7:20	1 893.99	1 901.78	-1.46
7:30	1 894.17	1 901.60	-2.47
7:40	1 894.49	1 901.28	-3.37
7:50	1 894.92	1 900.85	-4.13
8:00	1 895.44	1 900.33	-4.72
8:10	1 896.04	1 899.73	-5.12
8:20	1 896.70	1 899.07	-5.32
8:30	1 897.37	1 898.40	-5.32
8:40	1 898.05	1 897.72	-5.14
8:50	1 898.70	1 897.07	-4.79
9:00	1 899.31	1 896.46	-4.29
9:10	1 899.86	1 895.91	-3.66
9:20	1 900.33	1 895.44	-2.92
9:30	1 900.70	1 895.07	-2.11
9:40	1 900.97	1 894.80	-1.24
9:50	1 901.13	1 894.64	-0.35
10:00	1 901.17	1 894.60	0.55

notar una fuerte dependencia de la magnitud de las oscilaciones según el tamaño del paso de integración utilizado.

Al aplicar el método de Euler modificado se obtienen los siguientes algoritmos:

a) Para el cálculo del nivel en el tanque de oscilación:

5. Solución numérica con $\Delta t=30$ s. Método de Euler

t (min)	H ₁ (m)	H ₂ (m)	Q ₂ (m ³ /s)
0:00	446.09	2.64	0.00
0:30	447.67	2.64	0.00
1:00	449.24	2.60	-0.25
1:30	450.64	2.55	-0.76
2:00	451.71	2.51	-1.47
2:30	452.33	2.47	-2.30
3:00	452.43	2.44	-3.11
3:30	452.03	2.43	-3.77
4:00	451.23	2.43	-4.20
4:30	450.17	2.45	-4.37
5:00	449.03	2.49	-4.31
5:30	447.94	2.52	-4.09
6:00	447.01	2.56	-3.76
6:30	446.29	2.60	-3.38
7:00	445.82	2.62	-2.99
7:30	445.61	2.64	-2.61
8:00	445.63	2.65	-2.28
8:30	445.85	2.65	-2.01
9:00	446.24	2.65	-1.82
9:30	446.73	2.64	-1.72
10:00	447.28	2.62	-1.71
10:30	447.83	2.61	-1.79
11:00	448.32	2.59	-1.95
11:30	448.69	2.57	-2.17
12:00	448.93	2.56	-2.41
12:30	449.02	2.55	-2.66
13:00	448.96	2.54	-2.86
13:30	448.77	2.54	-3.02
14:00	448.48	2.55	-3.11
14:30	448.15	2.56	-3.13
15:00	447.80	2.57	-3.10
15:30	447.48	2.58	-3.01
16:00	447.22	2.59	-2.90
16:30	447.04	2.60	-2.77
17:00	446.94	2.61	-2.63
17:30	446.92	2.61	-2.51
18:00	446.98	2.61	-2.41
18:30	447.10	2.61	-2.33
19:00	447.27	2.61	-2.29
19:30	447.45	2.60	-2.29
20:00	447.64	2.60	-2.31

$$H_2(t + \Delta t) = H_2(t) + \frac{\Delta t}{A} (Q_1(t) + Q_2(t))$$

b) Para el cálculo del gasto en las tuberías:

$$Q_1(t + \Delta t) = Q_1(t) + \frac{\Delta t}{T_1} (H_1 - H_2(t + \Delta t) - K_1 Q_1(t) |Q_1(t)|)$$

$$Q_2(t + \Delta t) = Q_2(t) + \frac{\Delta t}{T_2} (H_3 - H_2(t + \Delta t) - K_2 Q_2(t) |Q_2(t)|)$$

Para considerar la oscilación del nivel en la torre de succión de la planta de bombeo por el paro de las bombas, se deben tomar en cuenta las siguientes condiciones iniciales:

$$Q_1 = Q_3 = 2.64 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = 0$$

$$H_2 = H_3 = 446.09 \text{ m}$$

$$H_1 = 486 \text{ m}$$

Si el paro de las bombas se realiza en $t = 0$, entonces $Q_3 = 0$ para $t \leq 0$.

Aplicando el método de Euler se obtienen los siguientes algoritmos:

6. Resultados numéricos con $\Delta t = 10 \text{ s}$. Método de Euler

t	H ₁	H ₂	Q ₂
0:00	446.09	2.64	0.00
0:10	446.62	2.64	0.00
0:20	447.14	2.64	-0.03
0:30	447.66	2.63	-0.08
0:40	448.17	2.62	-0.17
0:50	448.65	2.61	-0.28
1:00	449.12	2.59	-0.43
1:10	449.55	2.58	-0.58
1:20	449.95	2.57	-0.76
1:30	450.31	2.55	-0.96
1:40	450.62	2.54	-1.18
1:50	450.90	2.53	-1.40
2:00	451.12	2.52	-1.64
2:10	451.30	2.51	-1.87
2:20	451.42	2.50	-2.11
2:30	451.50	2.49	-2.34
2:40	451.53	2.48	-2.56
2:50	451.51	2.47	-2.77
3:00	451.45	2.47	-2.97
3:10	451.35	2.47	-3.15
3:20	451.21	2.47	-3.31
3:30	451.05	2.47	-3.45
3:40	450.85	2.47	-3.57
3:50	450.63	2.47	-3.66
4:00	450.40	2.47	-3.74
4:10	450.14	2.48	-3.80
4:20	449.88	2.48	-3.83
4:30	449.61	2.49	-3.86
4:40	449.34	2.50	-3.86
4:50	449.07	2.50	-3.85
5:00	448.80	2.51	-3.82
5:10	448.54	2.52	-3.79
5:20	448.29	2.53	-3.74
5:30	448.05	2.54	-3.68
5:40	447.82	2.55	-3.62
5:50	447.61	2.55	-3.55
6:00	447.41	2.56	-3.47
6:10	447.23	2.57	-3.39
6:20	447.06	2.58	-3.31
6:30	446.92	2.59	-3.23
6:40	446.79	2.59	-3.14
6:50	446.68	2.60	-3.06
7:00	446.59	2.60	-2.97
7:10	446.52	2.61	-2.89
7:20	446.46	2.61	-2.81
7:30	446.42	2.62	-2.73
7:40	446.40	2.62	-2.65
7:50	446.39	2.63	-2.58
8:00	446.40	2.63	-2.52
8:10	446.42	2.63	-2.45
8:20	446.46	2.63	-2.40
8:30	446.50	2.63	-2.34
8:40	446.56	2.63	-2.30
8:50	446.62	2.63	-2.26
9:00	446.70	2.63	-2.22
9:10	446.78	2.62	-2.19
9:20	446.86	2.62	-2.17
9:30	446.95	2.62	-2.15
9:40	447.05	2.62	-2.14
9:50	447.14	2.62	-2.14
10:00	447.24	2.61	-2.14

a) Para el cálculo de niveles en el tanque de oscilación:

$$H_2(t + \Delta t) = H_2(t) + \frac{\Delta t}{A} (Q_1(t) + Q_2(t))$$

b) Para el cálculo del gasto en las tuberías:

$$Q_1(t + \Delta t) = Q_1(t) + \frac{\Delta t}{I_1} (H_1 - H_2(t) - K_1 Q_1(t) |Q_1(t)|)$$

$$Q_2(t + \Delta t) = Q_2(t) + \frac{\Delta t}{I_2} (H_3 - H_2(t) - K_2 Q_2(t) |Q_2(t)|)$$

c) Para la actualización del tiempo:

$$t = t + \Delta t$$

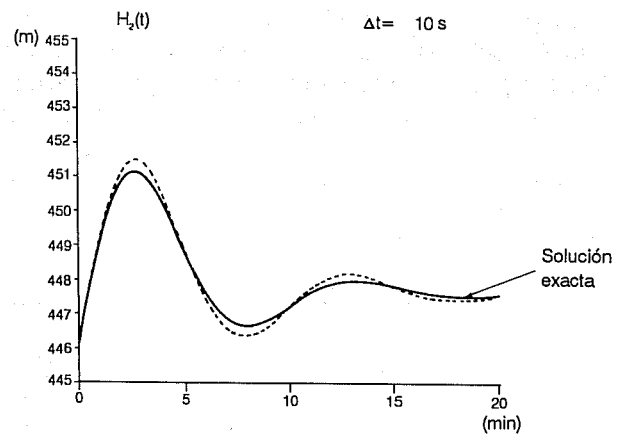
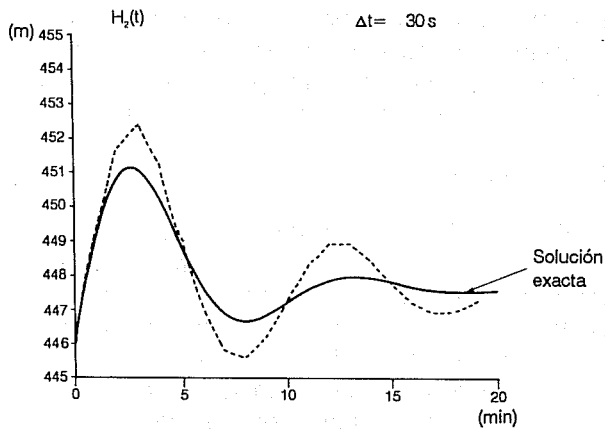
Si $t \leq$ tiempo de observación regresar al inciso a).

En el cuadro D del anexo se presenta la programación de este algoritmo para una calculadora HP-25. En el 7, se muestran los resultados con un paso de integración de 30 s y en el siguiente

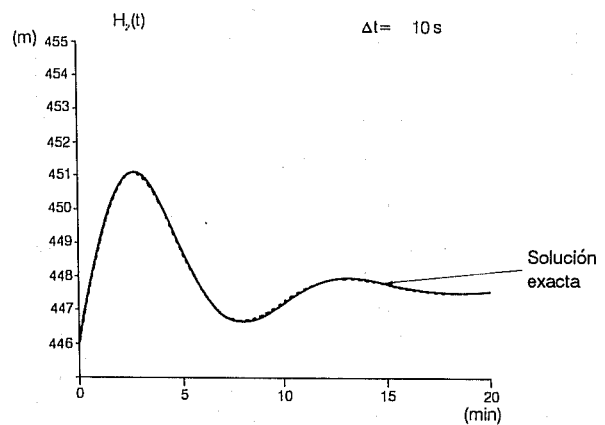
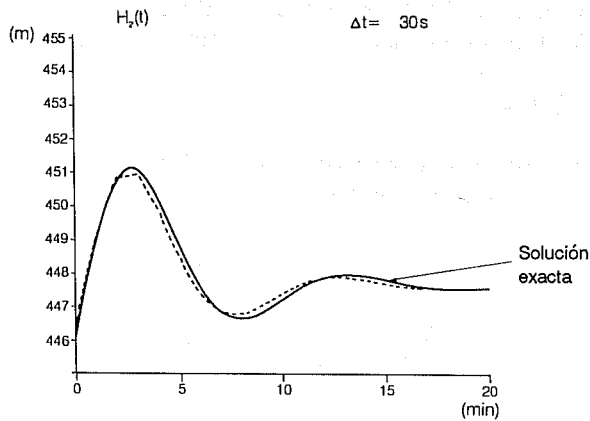
7. Solución numérica con $\Delta t = 30 \text{ s}$. Método de Euler modificado

t (min)	H ₁ (m)	H ₂ (m)	Q ₂ (m ³ /s)
0:00	446.09	2.64	0.00
0:30	447.67	2.60	-0.25
1:00	449.07	2.56	-0.73
1:30	450.16	2.52	-1.37
2:00	450.84	2.49	-2.07
2:30	451.10	2.48	-2.71
3:00	450.95	2.47	-3.22
3:30	450.51	2.48	-3.55
4:00	449.87	2.50	-3.69
4:30	449.17	2.53	-3.67
5:00	448.48	2.55	-3.55
5:30	447.88	2.57	-3.37
6:00	447.40	2.59	-3.16
6:30	447.06	2.60	-2.94
7:00	446.86	2.61	-2.74
7:30	446.78	2.62	-2.57
8:00	446.81	2.62	-2.44
8:30	446.91	2.61	-2.35
9:00	447.07	2.61	-2.30
9:30	447.25	2.60	-2.29
10:00	447.44	2.60	-2.31
10:30	447.61	2.59	-2.36
11:00	447.75	2.59	-2.42
11:30	447.85	2.58	-2.48
12:00	447.91	2.58	-2.55
12:30	447.93	2.58	-2.60
13:00	447.92	2.58	-2.64
13:30	447.88	2.58	-2.67
14:00	447.83	2.58	-2.68
14:30	447.77	2.58	-2.68
15:00	447.71	2.59	-2.68
15:30	447.65	2.59	-2.65
16:00	447.61	2.59	-2.64
16:30	447.58	2.59	-2.62
17:00	447.56	2.59	-2.60
17:30	447.56	2.59	-2.58
18:00	447.56	2.59	-2.57
18:30	447.57	2.59	-2.56
19:00	447.59	2.59	-2.56
19:30	447.61	2.59	-2.56
20:00	447.63	2.59	-2.56

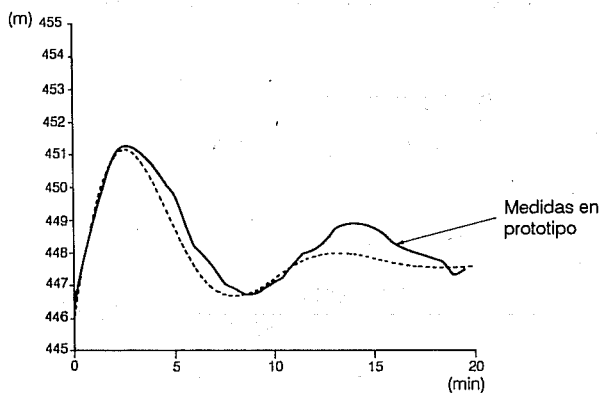
9. Resultados numéricos aplicando el método de Euler al ejemplo 2. Niveles en el tanque con $\Delta t = 30$ s y 10 s



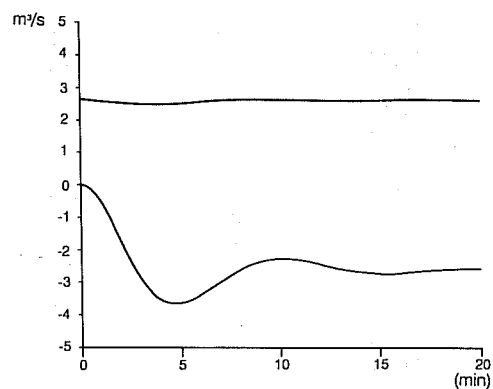
10. Resultados numéricos aplicando el método de Euler modificado al ejemplo 2. Niveles en el tanque con $\Delta t = 10$ s y 30 s



11. Comparación de los cálculos numéricos con medidas en prototipo



12. Resultados numéricos aplicando el método de Euler modificado al ejemplo 2, con $\Delta t = 10$ s. Gasto en las tuberías



(8), aquellos en que se utiliza un paso de 10 s. Ambos se comparan con la *solución exacta* (véase ilustración 10). También en este caso se observa que la magnitud de las oscilaciones es poco sensible al tamaño del paso de integración utilizado y que su frecuencia crece al aumentar el paso de integración.

En la ilustración 11 se establece la comparación de

8. Resultados numéricos con $\Delta t=10$ s. Método de Euler modificado

t	H ₁	H ₂	Q ₂
0:00	446.09	2.64	0.00
0:10	446.62	2.64	-0.03
0:20	447.13	2.63	-0.08
0:30	447.64	2.62	-0.17
0:40	448.13	2.61	-0.28
0:50	448.59	2.60	-0.41
1:00	449.03	2.58	-0.57
1:10	449.43	2.57	-0.74
1:20	449.79	2.56	-0.93
1:30	450.11	2.54	-1.14
1:40	450.39	2.53	-1.36
1:50	450.63	2.52	-1.58
2:00	450.82	2.51	-1.80
2:10	450.96	2.50	-2.02
2:20	451.05	2.50	-2.24
2:30	451.10	2.49	-2.44
2:40	451.11	2.49	-2.64
2:50	451.08	2.48	-2.82
3:00	451.02	2.48	-2.99
3:10	450.91	2.48	-3.14
3:20	450.78	2.48	-3.27
3:30	450.63	2.48	-3.38
3:40	450.45	2.48	-3.47
3:50	450.25	2.49	-3.54
4:00	450.04	2.49	-3.60
4:10	449.82	2.50	-3.64
4:20	449.52	2.50	-3.66
4:30	449.36	2.51	-3.67
4:40	449.13	2.51	-3.67
4:50	448.90	2.52	-3.65
5:00	448.68	2.53	-3.62
5:10	448.46	2.54	-3.59
5:20	448.25	2.54	-3.54
5:30	448.05	2.55	-3.49
5:40	447.87	2.56	-3.43
5:50	447.69	2.56	-3.37
6:00	447.53	2.57	-3.31
6:10	447.39	2.58	-3.24
6:20	447.25	2.58	-3.17
6:30	447.14	2.59	-3.10
6:40	447.03	2.59	-3.03
6:50	446.94	2.60	-2.97
7:00	446.87	2.60	-2.90
7:10	446.81	2.60	-2.83
7:20	446.77	2.61	-2.77
7:30	446.74	2.61	-2.71
7:40	446.73	2.61	-2.61
7:50	446.71	2.61	-2.60
8:00	446.71	2.62	-2.54
8:10	446.73	2.62	-2.50
8:20	446.35	2.62	-2.46
8:30	446.78	2.62	-2.42
8:40	446.82	2.62	-2.38
8:50	446.87	2.62	-2.35
9:00	446.92	2.62	-2.33
9:10	446.98	2.61	-2.31
9:20	447.04	2.61	-2.29
9:30	447.10	2.61	-2.28
9:40	447.17	2.61	-2.28
9:50	447.23	2.61	-2.27
10:00	447.30	2.61	-2.27

los resultados numéricos, obtenidos con el método de Euler modificado usando $\Delta t = 10$ s, con medidas tomadas directamente en el acueducto. Se observa una buena aproximación de la amplitud de las oscilaciones calculadas con las medidas realizadas. Finalmente, la evolución temporal del gasto en las tuberías 1 y 2 se observa en la ilustración 12.

Conclusiones

La modificación realizada al método de Euler permite calcular con rapidez y eficiencia la magnitud de las oscilaciones en el nivel y el gasto en problemas de oscilación de masa en sistemas de conducción, lo cual ayuda, durante el diseño, a una buena selección de las dimensiones de los tanques. Sin embargo, existen otras aplicaciones que exigen también el cálculo eficiente de la frecuencia de las oscilaciones, por ejemplo en estudios de resonancia en tuberías a presión y en la construcción de simuladores del funcionamiento de sistemas de conducción, por lo que esta modificación al método de Euler no puede aplicarse indiscriminadamente en estos problemas.

Ejemplo 2

Considerando el esquema de la ilustración 2, las ecuaciones que modelan ese sistema son:

$$I_1 \frac{dQ_1}{dt} = H_1 - H_2 - K_1 Q_1 |Q_1|$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A} (Q_1 + Q_2 - Q_3)$$

$$I_2 \frac{dQ_2}{dt} = H_3 - H_2 - K_2 Q_2 |Q_2|$$

(H_1 y H_3 se consideran constantes)

Evaluación de constantes:

$$I_1 = \frac{42800}{9.81 \times \frac{\pi}{4} \times (2.10)^2} = 1259.64 \text{ s}^2/\text{m}^2$$

$$K_1 = \frac{f \times 1}{2gDS^2} + K_{or} = 1.039 + 4.687 = 5.725 \text{ s}^2/\text{m}^5$$

$$I_2 = \frac{4795}{9.81 \times \frac{\pi}{4} (1.83)} = 185.84 \text{ s}^2/\text{m}^2$$

$$K_2 = \frac{0.012 \times 4795}{2 \times 9.81 \times 1.83 \times \left(\frac{\pi}{4} (1.83)^2\right)^2} = 0.232 \text{ s}^2/\text{m}^5$$

$$A = 3.1416 \times 16 = 50.27 \text{ m}^2$$

Anexo: Lista de programas para calculadora HP-25 del algoritmo de Euler

A. Ejemplo 1

Registros			
$R_0 - H_1$	$R_3 - k$	$R_6 -$	
$R_1 - H_2$	$R_4 - \Delta t/I$	$R_7 -$	
$R_2 - Q_2$	$R_5 - \Delta t/A$		
línea	orden	línea	orden
1	RCL 0	26	
2	RCL 1	27	despliega Q_2
3		28	
4	RCL 3	29	
5	RCL 2	30	
6	g ABS	31	
7	x	32	
8	RCL 2	33	
9	x	34	
10		35	
11	RCL 4	36	
12	x	37	
13	STO 6	38	
14	RCL 2	39	
15	RCL 5	40	
16	x	41	
17	STO - 0	42	
18	STO + 1	43	
19	RCL 0	44	
20	R/S ← despliega H_1	45	
21	RCL 1	46	
22	R/S ← despliega H_2	47	
23	RCL 6	48	
24	STO + 2	49	
25	RCL 2		

B. Ejemplo 1 (Euler modificado)

Registros			
$R_0 - H_1$	$R_3 - k$	$R_6 -$	
$R_1 - H_2$	$R_4 - \Delta t/I$	$R_7 -$	
$R_2 - Q_2$	$R_5 - \Delta t/A$		
línea	orden	línea	orden
1	RCL2	26	
2	RCL5	27	
3	x	28	
4	STO-0	29	
5	STO+1	30	
6	RCL0	31	
7	R/S ← despliega H_1	32	
8	RCL1	33	
9	R/S ← despliega H_2	34	
10		35	
11	RCL3	36	
12	RCL2	37	
13	gABS	38	
14	x	39	
15	RCL2	40	
16	x	41	
17		42	
18	RCL4	43	
19	x	44	
20	STO+2	45	
21	RCL2	46	
22	despliega Q_2	47	
23		48	
24		49	
25			

C. Ejemplo 2

Registros			
$R_0 - H_2$	$R_3 - k_1$	$R_6 - \Delta t/I_2$	
$R_1 - Q_1$	$R_4 - k_2$	$R_7 - \Delta t/A$	
$R_2 - Q_2$	$R_5 - \Delta t/I_1$		
línea	orden	línea	orden
1	RCL 1	26	0
2	RCL 2	27	9
3	+	28	RCL 0
4	RCL 7	29	
5	x	30	RCL 2
6	4	31	g ABS
7	8	32	RCL 2
8	6	33	x
9	RCL 0	34	RCL 4
10		35	x
11	RCL 1	36	
12	g ABS	37	RCL 6
13	RCL 1	38	x
14	x	39	STO + 2
15	RCL 3	40	X ↔ y
16	x	41	STO + 0
17		42	RCL 0
18	RCL 5	43	R/S ← despliega H_2
19	x	44	RCL 1
20	STO + 1	45	R/S ← despliega Q_1
21	X ↔ y	46	RCL 2
22	4	47	despliega Q_2
23	4	48	
24	6	49	
25	.		

D. Ejemplo 2 (Euler modificado)

Registros			
$R_0 - H_2$	$R_3 - k_1$	$R_6 - \Delta t/I_2$	
$R_1 - Q_1$	$R_4 - k_2$	$R_7 - \Delta t/A$	
$R_2 - Q_2$	$R_5 - \Delta t/I_1$		
línea	orden	línea	orden
1	RCL 1	26	4
2	RCL 2	27	4
3	+	28	6
4	RCL 7	29	.
5	x	30	0
6	STO + 0	31	9
7	RCL 0	32	RCL 0
8	R/S ← despliega H_2	33	
9	4	34	RCL 2
10	8	35	9 ABS
11	6	36	RCL 2
12	RCL 0	37	X
13		38	RCL 4
14	RCL 1	39	X
15	g ABS	40	
16	RCL 1	41	RCL 6
17	x	42	X
18	RCL 3	43	STO + 2
19	x	44	RCL 2
20		45	despliega Q_2
21	RCL 5	46	
22	x	47	
23	STO + 1	48	
24	RCL 1	49	
25	R/S ← despliega Q_1		