

Distribuciones de velocidad en flujo cargado de sedimentos

Alix T. Moncada
Julián Aguirre Pe
Ramón Fuentes

Universidad de Los Andes, Venezuela

Se presenta un estudio de diferentes modelos de distribución de velocidad en flujos de alta concentración. Se estudian las características y restricciones de cada modelo, así como la influencia de los parámetros involucrados. Se analizan los modelos de distribución de velocidad de Chen, Takahashi, Umeyama y Gerritsen y Rickenmann en contraste con los experimentos de González, considerando las limitaciones impuestas en cada uno de ellos. Se determinan los parámetros que permiten definir el correspondiente estado de flujo. Se presenta la formulación y evaluación de un modelo de distribución de velocidad con base teórica que considera tanto los esfuerzos viscosos como los turbulentos, tomando en cuenta el comportamiento observado en el análisis experimental y los resultados obtenidos en los modelos previamente analizados.

Palabras clave: Distribución de velocidad, flujo hiperconcentrado, flujo de barros, fluido viscoplástico, flujo macro-viscoso, flujo turbulento, flujo inercial.

Introducción

Se cuenta con una diversidad de criterios acerca de la clasificación del flujo cargado de sedimentos. Algunos de ellos indican que el comportamiento físico del flujo hiperconcentrado no es similar al del sedimento transportado por el fondo o al que se encuentra suspendido en flujos de agua a bajas concentraciones. Un flujo hiperconcentrado puede definirse como:

- Tranquilo.
- Usualmente uniforme.
- Con una alta concentración de material fino suspendido.
- Con una viscosidad aparente mayor que la del agua.

Existe una matriz líquida que contiene partículas finas en suspensión a altas concentraciones, pero es incapaz de sostener partículas gruesas y no admite esfuerzo cortante alguno previo al flujo. Los sedimentos gruesos pueden ser transportados como carga de fondo.

Diversos autores consideran el comportamiento del flujo de barro en forma semejante al flujo de un fluido de Bingham. Takahashi (1991) considera que los flujos de barros y escombros de tipo inercial pueden ser modelados como fluidos dilatantes.

Los flujos de barro y escombros se pueden distinguir de los flujos hiperconcentrados porque en aquellos la concentración de sedimentos es más elevada, de tal manera que se forma una matriz sólida de partículas finas que contienen agua en sus intersticios. El mecanismo de transporte tiene suficiente capacidad para sostener grandes cantos rodados dentro de una matriz con partículas menores. Usualmente requieren un cierto esfuerzo cortante mínimo para iniciar el movimiento y establecer el flujo.

La viscosidad de una mezcla agua-sedimento, definida como la pendiente de la relación esfuerzo-deformación, se incrementa con la concentración de sedimento. El comportamiento de suspensiones de arcilla-agua a valores elevados de corte se puede describir por la ecuación

$$\tau = \tau_y + k \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad (1)$$

en la que τ es el esfuerzo de corte, τ_y es el esfuerzo de corte de cedencia, k y n son parámetros empíricos, u es la velocidad local en la dirección longitudinal del flujo, y y es la coordenada vertical perpendicular al lecho y du/dy es el gradiente de velocidad normal a la dirección del flujo.

El esfuerzo de corte en fluidos con grandes concentraciones de sedimento depende, según Julien y Lan (1991), de la cohesión entre partículas, de la interacción viscosa entre las partículas de sedimento y el entorno del fluido, del impacto de partículas de sedimento y de la turbulencia.

Se han realizado extensas investigaciones para aclarar los mecanismos implicados en flujos cargados de sedimentos pero aún no se dispone de una ecuación de velocidad justificable teóricamente. Esto puede ser atribuido al hecho de que la ley logarítmica se ha aplicado directamente al flujo cargado de sedimentos, sin ajustes, y de que casi todos los investigadores han aceptado la hipótesis de longitud de mezcla, como se adopta para flujo en agua clara.

En el estudio que se presenta se contrastan diversos modelos de distribución de velocidad, con el banco de datos de González (1976) y se propone un modelo de distribución de velocidad que, con base teórica, representa bastante bien el flujo hiperconcentrado.

Distribución de velocidad

Modelo dilatante de Bagnold

Bagnold (1954), quien formuló el modelo reológico más antiguo, consideró que la presión excedente sobre la hidrostática, en un flujo cargado de sedimentos, se produce por la fuerza dispersiva de las partículas debido a sus colisiones, y la denominó presión dispersiva P . Bagnold señaló que

$$\tau = -P \tan \alpha \quad (2)$$

donde α es el ángulo de fricción interna dinámico y τ es el esfuerzo cortante total en la mezcla e igual a la suma de T (componente x de los esfuerzos de corte entre partículas) y T' (componente x de los esfuerzos en el fluido intersticial debido a la turbulencia). La constante de proporcionalidad en (2) es decir, $\tan \alpha$, depende del número de Bagnold, N , definido como

$$N = \frac{\rho_s \lambda^{1/2} d^2}{\mu_i} \left(\frac{du}{dy} \right) \quad (3)$$

donde ρ_s es la densidad de las partículas de sedimento, d es el diámetro de los granos, μ_i la viscosidad del fluido intersticial, u es la velocidad y λ es la concentración lineal del sólido en la mezcla definida por Bagnold, que depende de la concentración volumétrica de sedimento c y de la máxima concentración volumétrica posible del sedimento c_* , según la expresión

$$\lambda = \left\{ \left(\frac{c_*}{c} \right)^{1/3} - 1 \right\}^{-1} \quad (4)$$

El número de Bagnold es análogo al número de Reynolds en cuanto a que representan la relación de fuerza inercial a fuerza viscosa. Cuando el número de Bagnold es $N > 450$ el flujo es completamente inercial mientras que cuando es $N < 40$ el flujo está en el rango macro-viscoso. Bagnold encontró las siguientes relaciones semi-empíricas: Para el rango completamente inercial ($N > 450$) se tiene que

$$\tau \approx T = a \operatorname{sen} \alpha \rho_s \lambda^2 d^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (5)$$

en la cual a es una constante que describe las relaciones constitutivas.

Para el rango macro-viscoso ($N < 40$)

$$\tau = 2.25 \lambda^{3/2} \mu_i \frac{du}{dy} \quad (6)$$

Las limitaciones en el modelo de Bagnold se pueden atribuir a la ambigüedad en la definición de los esfuerzos de los granos. Las relaciones de Bagnold representan la parte dependiente de la tasa de corte, pero no la parte independiente.

Modelo de Takahashi para el flujo de escombros

A partir de las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento, suponiendo que el flujo es permanente y uniforme, Takahashi (1991) obtuvo

$$T^y + T^y = g \operatorname{sen} \theta \int_y^h (c(\rho_s - \rho) + \rho) dy \quad (7)$$

donde T^y es la componente en x de los esfuerzos entre partículas en el nivel y , T^y es la componente en x de los esfuerzos en el fluido intersticial debido a la turbulencia en el nivel y , g es la aceleración de gravedad, θ expresa la pendiente longitudinal del canal, ρ es la densidad del fluido intergranular y h es la profundidad del flujo.

Para el flujo de escombros pedregosos en el rango inercial, $N > 450$, se desprecia T^y en (7) y τ se aproxima por T^y . Así, de (5) Takahashi obtuvo para un fluido dilatante

$$\begin{aligned} T^y &= a \operatorname{sen} \alpha \rho_s \lambda^2 d^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \\ &= g \operatorname{sen} \theta \int_y^h (c(\rho_s - \rho) + \rho) dy \end{aligned} \quad (8)$$

Si c se supone constante, (8) se integra para la condición de frontera, $u = 0$ en $y = 0$. Así, se obtiene que

$$u = + \frac{2}{3} \frac{1}{d} \left(\frac{g \operatorname{sen} \theta}{a \operatorname{sen} \alpha} \left\{ c + (1 - c) \frac{\rho}{\rho_s} \right\} \right)^{1/2} \quad (9)$$

$$\left\{ \left(\frac{c_*}{c} \right)^{1/3} - 1 \right\} (h^{3/2} - (h - y)^{3/2})$$

Para ajustar las curvas teóricas a los resultados experimentales de Takahashi (1991), se requiere un valor de a casi diez veces mayor que el 0.042 obtenido por Bagnold. La velocidad media \bar{u} en la sección transversal se obtiene a partir de (9) como

$$\bar{u} = \frac{2}{5} \frac{1}{d} \left(\frac{g \operatorname{sen} \theta}{a \operatorname{sen} \alpha} \left\{ c + (1 - c) \frac{\rho}{\rho_s} \right\} \right)^{1/2} \quad (10)$$

$$\left\{ \left(\frac{c_*}{c} \right)^{1/3} - 1 \right\} h^{3/2}$$

Modelo de Cheng-lung Chen

Un modelo reológico viscoplástico que incluya cohesión, Chen (1988a), para flujo de escombros uniforme y permanente, en canales anchos, tendría el siguiente conjunto de relaciones teóricas

$$T_{yx} (=T_{xy}) = c_o \cos \phi + p \operatorname{sen} \phi + \mu_1 \left(\frac{du}{dy} \right)^\eta \quad (11)$$

$$T_{yy} (=T_{xx}) = -p + \mu_2 \left(\frac{du}{dy} \right)^\eta \quad (12)$$

en las cuales x es la coordenada en la dirección longitudinal, T_{yx} , T_{yy} son los esfuerzos totales de corte y normal, respectivamente, en (x, y) , c_o es la cohesión, ϕ es el ángulo de fricción interna, p es la presión, μ_1 , μ_2 son los índices de consistencia y consistencia transversal, respectivamente, y η es un índice de comportamiento del flujo. Si la concentración de sedimentos es constante, T_{yx} y T_{yy} se pueden obtener de las ecuaciones de movimiento para flujo uniforme de escombros, en una dimensión, sobre un lecho con pendiente θ . El exponente η en (11 y 12) toma el valor de 1 o 2 en el rango macro-viscoso o el rango de inercia del grano, respectivamente. El modelo de un fluido viscoplástico incorpora tanto la parte independiente de la tasa de corte como la dependiente.

A fin de resolver (11 y 12) Chen (1988a) adoptó la suposición de concentración c de granos constante y por lo tanto índices de consistencia μ_1 y μ_2 constantes.

Igualando (11 y 12) con las ecuaciones de movimiento para flujo uniforme de escombros e introduciendo las definiciones de ρ' y ρ_*' como

$$\rho' = \left[\frac{1 + (\mu_2/\mu_1) \tan \theta}{1 + (\mu_2/\mu_1) \operatorname{sen} \phi} \right] \rho_m = \alpha_c \rho_m \quad (13)$$

$$\rho_*' = \left[\frac{1 - \operatorname{ctg} \theta \operatorname{sen} \phi}{1 + (\mu_2/\mu_1) \operatorname{sen} \phi} \right] \rho_m = \beta_c \rho_m \quad (14)$$

donde $\rho_m = c(\rho_s - \rho) + \rho$ es la densidad de la mezcla, Chen (1988a) obtuvo

$$\left(\frac{du}{dy} \right)^\eta = \frac{\rho_*'}{\mu_1} g (y_o - y) \operatorname{sen} \theta \quad (15)$$

en la cual y_o es la coordenada vertical desde el lecho, sobre la cual existe una cuña rígida. A partir de (13 y 14), para $\mu_1/\mu_2 = \tan \theta$, correspondiente al estado completamente dinámico, se obtiene $\rho' = 0$, $\rho_*' = \rho_m$, $\alpha_c = 0$, y $\beta_c = 1$. La solución de du/dy es válida para cualquier valor de η . Sin embargo, como en los diferentes regímenes de flujo, η varía y así lo hacen ϕ y c_o , es necesario estimar correctamente la variación de ϕ y c_o .

Resolviendo la ec.15 para la condición de frontera $u = 0$ para $y = 0$, Chen (1988a) obtuvo las soluciones

simplificadas de Bagnold. Así, para $0 \leq \frac{y}{h} \leq \frac{y_o}{h}$

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{1 - \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right) \left(\frac{h}{y_o} \right) \right]^{\frac{\eta+1}{\eta}}}{1 - \frac{\eta}{2\eta+1} \left(\frac{y_o}{h} \right)} \quad (16a)$$

y para $\frac{y_o}{h} \leq \frac{y}{h} \leq 1$

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{1}{1 - \frac{\eta}{2\eta+1} \left(\frac{y_o}{h} \right)} \quad (16b)$$

En el estado dinámico total, se puede suponer $\rho_*' = \rho_m$, e, $y_o = h$, o $y_o/h = 1$, pero el valor de η es más difícil de determinar (Chen, 1988b).

Chen (1988b) presentó soluciones más generales para flujo de escombros viscoplásticos, para el caso en que c o ρ_m , μ_1 y μ_2 varíen con y . El factor más importante que determina la viscosidad de la suspensión de sedimento es la concentración. Existen varias fórmulas para la viscosidad relativa. Entre ellas la ecuación teórica de Krieger y Dougherty, según refiere Chen (1988b).

$$\mu_* = (1 - kc)^{-B/K} \quad (17)$$

en la cual μ_* es la viscosidad relativa, definida como μ/μ_i , donde μ es la viscosidad de la suspensión y μ_i es la viscosidad del fluido intersticial, K es un factor que describe el espacio ocupado, el volumen de sedimentación y agrupamiento de las partículas. El valor de B es muy próximo a 2.5. El cociente de B/K representa un factor que describe el efecto de interacción del choque de partículas. Chen (1988b) expresó μ_1 y μ_2 en términos de μ_* .

A partir de (11 y 12) las ecuaciones de movimiento para flujo uniforme de escombros, haciendo las transformaciones pertinentes y considerando que c_0 y ϕ no varían con y , Chen (1988b) presentó para $M \neq 0$, donde M es un parámetro que expresa la movilidad de las partículas de sedimento, que

$$\frac{du_+}{dy} = \Gamma \left[(y_0 - y) y^{B/K} \right]^{1/\eta} \quad (18)$$

en la cual $u_+ = u/\bar{u}$ es la velocidad adimensional, $y_0 = y_0/h$, $y = y/h$, y Γ es un coeficiente definido por Chen (1988b).

La hipótesis de que c_0 y ϕ no varían respecto a y se justifica para materiales homogéneos, pero no para heterogéneos. Para flujo de escombros en el estado completamente dinámico, es decir, $\eta = 1$ o 2 , ϕ es despreciable y también c_0 . Así, se supone que $\beta_c = 1$, $y_0 = 1$ para $\eta = 1$, o $\eta = 2$.

Perfil de velocidad para $\eta = 1$.

Integrando (18) con respecto a y , tomando $\beta_c = 1$ y determinando la constante con la ayuda de la condición de frontera de no deslizamiento en el fondo, Chen (1988b) presentó, para $0 \leq y \leq 1$

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{(2 + B/K)(3 + B/K)}{2} \left[1 - \left(\frac{1 + B/K}{2 + B/K} \right) y \right] y^{1+B/K} \quad (19)$$

(19) para $B/K = 0$ es idéntica a la solución de Bagnold, es decir, (16) con $\eta = 1$ e $y_0/h = 1$. Los parámetros B/K y η , determinan la forma del perfil de velocidad.

Perfil de velocidad para $\eta = 2$.

Sólo se han obtenido soluciones de (18) para $\eta = 2$ y valores de $B/K = 1$ y 2 . Por ejemplo, integrando (18) con respecto a y , para $\eta = 2$, $\beta_c = 1$, $y_0 = 1$, $B/K = 1$ y considerando la condición de frontera de no deslizamiento en el fondo, Chen (1988b) obtuvo, para $0 \leq y \leq 1$

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{8}{\pi} \left[\left(y - \frac{1}{2} \right) \sqrt{y - y^2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^{-1}(2y - 1) + \frac{\pi}{8} \right] \quad (20)$$

Modelo de Rickenmann para flujo hiperconcentrado

Rickenmann (1991) recirculó una suspensión de arcilla de diferentes concentraciones en un canal de 20.1 cm de ancho y 5 m de largo y realizó ensayos con diferentes pendientes y tasas de flujo para una concentración dada. La suspensión de arcilla mostró crecientes características no newtonianas con el incremento de concentración.

Rickenmann empleó la ecuación de resistencia al flujo modificada de Smart y Jaeggi en 1983, para un flujo transportante de sedimentos sobre un lecho móvil con profundidades relativas, h/d_{90} pequeñas y obtuvo

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 2.5 \left[1 - \exp \left(- \frac{\alpha_{12} h}{d_{90} S^{0.5}} \right)^{0.5} \right] \ln \left(\frac{12.27 h}{\beta_{12} d_{90}} \right) \quad (21)$$

donde $u_* = \sqrt{g h S}$, S es la pendiente del fondo, d_{90} es el tamaño del grano para el cual el 90% del material en peso es más fino y h , es una profundidad del flujo reducida. Los coeficientes β_{12} y α_{12} dependen de la distribución del tamaño de los granos y del agrupamiento y forma del material del fondo. Según refiere Rickenmann (1991), Smart y Jaeggi obtuvieron que $\beta_{12} = 15$ y $\alpha_{12} = 0.05$.

Modelo turbulento de Umeyama y Gerritsen

La mayor parte de los trabajos sobre distribución de velocidad para flujo cargado de sedimentos de baja concentración han adoptado la hipótesis para agua clara de Prandtl, que conduce a la ley logarítmica de distribución de velocidades. Umeyama y Gerritsen (1992) consideran que para mayor exactitud es conveniente suponer la longitud de mezcla como

$$l = \kappa y \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{\alpha_a} \quad (22)$$

donde δ es el espesor de la capa límite, κ es el coeficiente de von Kármán y α_a un exponente de ajuste. Se puede suponer que α_a depende de la concentración de sedimento según la relación

$$\alpha_a = \frac{1}{2} \left(1 + \beta \frac{C_y}{C_a} \right) \quad (23)$$

donde c_y es la concentración de sedimentos suspendidos, c_a es la concentración en $y = a$, β es una constante que depende de varios factores en flujo cargado de sedimento. El valor de α_a se incrementa con la concentración de sedimentos suspendidos, lo que implica que la longitud de mezcla para un flujo altamente concentrado cargado de sedimentos es menor que para uno menos concentrado.

Comparando la expresión del esfuerzo de corte para flujo cargado de sedimentos con la base de la nueva hipótesis de longitud de mezcla y el esfuerzo de corte $\tau = \tau_0 (1 - y/\delta)$ para $u = \sqrt{\tau_0/\rho}$, donde τ_0 es el esfuerzo de corte del contorno, se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{\kappa y} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^{-\beta} \frac{c_y}{2c_a} \left[1 + \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) c_y\right]^{-1/2} \quad (24)$$

Si se toma c constante, (24) puede integrarse en la forma de una serie de potencias siempre que $|y/\delta| < 1$. Así, la distribución de velocidades de Umeiyama y Gerritsen (1992), para flujo cargado de sedimentos está dada por

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_*} = & \frac{1}{\kappa} \left\{ \ln y + \frac{\beta}{2} \frac{c}{c_a} \frac{y}{\delta} + \frac{1}{2!} \frac{\beta}{2} \frac{c}{c_a} \right. \\ & \left. \left(1 + \frac{\beta}{2} \frac{c}{c_a}\right) \frac{y^2}{2\delta^2} + \dots + \frac{1}{k!} \frac{\beta}{2} \frac{c}{c_a} \left(1 + \frac{\beta}{2} \frac{c}{c_a}\right) \right. \\ & \left. \dots \left[(k-1) - \frac{\beta}{2} \frac{c}{c_a} \right] \frac{y^k}{k\delta^k} + \dots \right\} \\ & \left[1 + \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) c_a\right]^{-1/2} + A \end{aligned} \quad (25)$$

La concentración de sedimentos se normaliza con c_a para $y = a$, donde $a = 0.1\delta$ o 0.2δ , dependiendo de los datos, y suponiéndola constante para $y \leq a$.

Instalación experimental y generación del banco de datos

Para realizar los experimentos, González (1976) proyectó una instalación en circuito cerrado, como se muestra en la ilustración 1. Esta consistió básicamente de un canal de pendiente variable en el que se desarrollaban las mediciones, una tolva donde se recibía la descarga del canal y una bomba centrífuga que retornaba la pulpa a la canaleta a través de una cañería de rocalit.

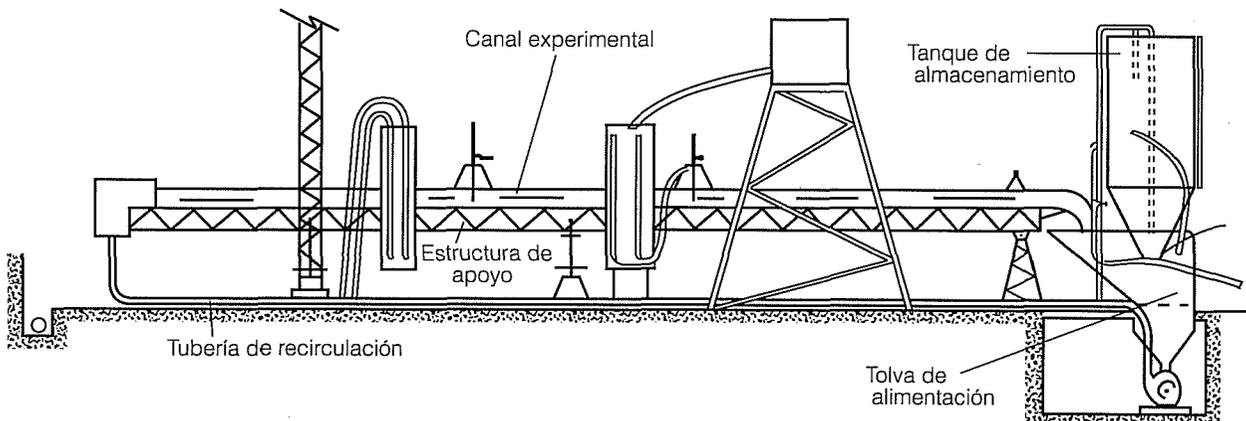
El canal de experimentación usado por González (1976) era de sección rectangular, de 15 m de largo, 0.20 m de ancho y 0.18 m de altura. Las paredes del canal eran de plancha de hierro de 1.5 mm de espesor y el fondo de terciado marino. El canal estaba montado sobre una estructura metálica rígida apoyada en tres soportes, como se muestra en la ilustración 2.

Estos apoyos aseguraban una pendiente uniforme del canal y evitaban una flecha apreciable. Junto a los tornillos que regulaban la pendiente, González instaló una escala graduada fija, que permitía leer la pendiente de fondo en forma directa, mediante una aguja colocada en la estructura. A siete metros de la entrada del canal reemplazó las paredes laterales de hierro por unas transparentes de vidrio de 0.50 m de largo y a toda la altura de la canaleta.

Estos visores permitían observar el movimiento de las partículas y controlar las condiciones de depósito.

Con el fin de obtener, en forma sistemática, un rango de variables extenso, González (1976) realizó 27 series de medidas, cuyos rangos son los siguientes:

1. Esquema de la instalación experimental



1. Datos experimentales de González (1976)

S = 1%, Q = 37.9 l/s, C _p = 32%, h = 10.5 cm			
y (cm)	u (m/seg)	ρ (gr/cm ³)	C _p (%)
0.5	1.49	1.29	35.7
3.5	1.96	1.26	33.1
6.5	2.22	1.23	30.0
9.0	2.24	1.21	27.8

S = 1%, Q = 16.8 l/s, C _p = 31%, h = 6.7 cm			
y (cm)	u (m/seg)	ρ (gr/cm ³)	C _p (%)
0.5	1.09	1.29	35.4
2.5	1.40	1.24	30.9
5.0	1.55	1.23	29.8

S = 1.5%, Q = 23.6 l/s, C _p = 26.7%, h = 7 cm			
y (cm)	u (m/seg)	ρ (gr/cm ³)	C _p (%)
0.5	1.41	1.25	32.4
2.5	1.82	1.21	27.6
4.5	2.07	1.17	23.5
5.5	2.11	1.15	21.1

Esto permitía conocer la ley reológica del relave usado a distintas concentraciones.

El banco de datos de González (1976) contiene gran cantidad de información y un extenso banco experimental. En el cuadro 1 se presenta a manera de ilustración tres series de datos de las 27 que fueron analizadas.

Presentación y análisis de resultados

Los modelos de velocidad se analizan para el banco de datos de González (1976), muy valioso por su extensión y rigor, en condiciones complejas de flujo. El estudio de la distribución de velocidades permitió verificar la condición de bidimensionalidad del flujo. En el análisis que sigue se emplean relaciones adimensionales. Cuando ello no es posible se debe considerar un sistema homogéneo de variables, como es el Sistema Internacional.

Análisis del modelo de Cheng-lung Chen

Se analizan las ecuaciones del modelo de Cheng-lung Chen suponiendo primero concentración constante. Se determina el valor del número de Bagnold N, con el fin de conocer el estado del flujo. El valor de λ se obtiene tomando para c_{*} la concentración de fondo de cada experimento y se calculan los valores de la tasa de corte, du/dy a partir del perfil de velocidades experimental.

Para los datos de González (1976) se toma y₀/h = 1 y η = 1, ya que para los valores determinados de N, el

flujo correspondería aparentemente al estado macroviscoso, N < 40. Se observa que (16a) no ajusta a los valores experimentales, como se muestra en la ilustración 4; pero si se incorpora una función aditiva adimensional f_a, se logra un buen ajuste. La ecuación modificada se puede escribir como

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{1 - \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right) \left(\frac{h}{y_0} \right) \right]^{\frac{(\eta+1)}{\eta}}}{1 - \frac{\eta}{2\eta+1} \left(\frac{y_0}{h} \right)} + 1.18 \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{h} \right) \quad (26)$$

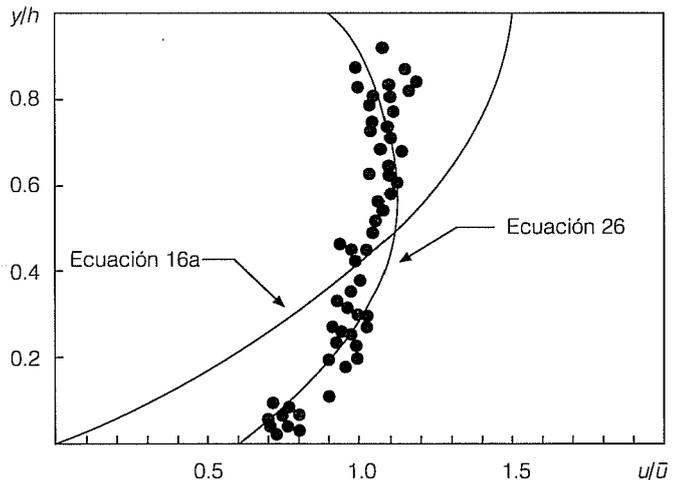
donde f_a = 1.18 (0.5 - y/h)

Se reexaminan los perfiles de velocidad de Chen (1988b), considerando que c, y los índices μ₁ y μ₂ varían con y. Se analiza la ecuación de velocidad adimensional obtenida con η = 1, y₀/h = 1, y B/K variable, dada por (19) y se comparan varios perfiles de velocidad para B/K = 0, 0.5, 1.0, 1.5 y 2.0. Se obtiene que la ecuación no ajusta con los datos experimentales para ninguno de estos valores. Sin embargo, si (19) se modifica a

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{1}{2} \left[\frac{(2 + B/K)(3 + B/K)}{2} \left[1 - \left(\frac{1 + B/K}{2 + B/K} \right) y \right] y^{1+B/K} \right] + 0.65 (1 - y)^{0.35} \quad (27)$$

se obtiene un buen ajuste para B/K = 0.

4. Perfiles adimensionales de velocidad del flujo de escombros para η = 1, y₀/h = 1, en las ecuaciones. 16a y 26, para los datos experimentales



Para $\eta = 2$ y $B/K = 1$ la distribución dada por (20) se modifica para lograr un adecuado ajuste a

$$\frac{u}{U} = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{\pi} \left[\left(y - \frac{1}{2} \right) \sqrt{y - y^2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^{-1} (2y - 1) + \frac{\pi}{8} \right] \right) + \frac{3}{4} (1 - y^{1.9}) \quad (28)$$

la cual arroja buenos resultados.

Análisis del modelo de Takahashi

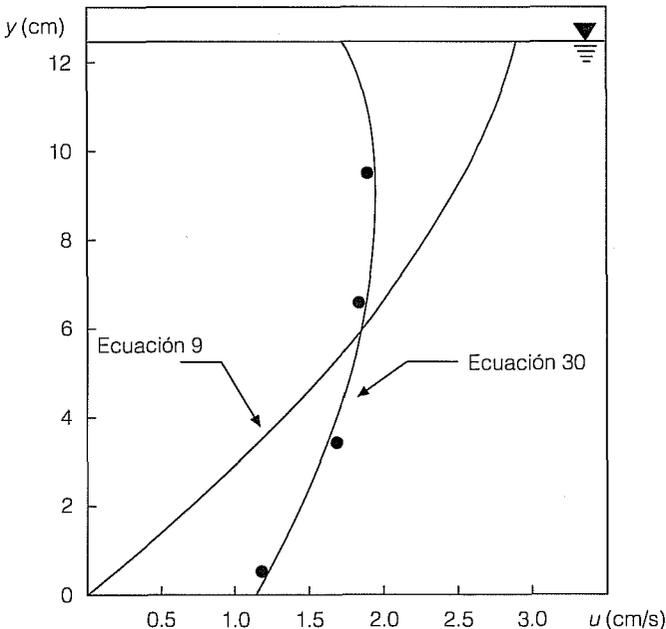
En este modelo, para $N > 450$, se obtiene la velocidad adimensional u_+ dada por la relación entre (9 y 10) como

$$\frac{u}{U} = \frac{5}{3} \left(1 - \left(1 - \frac{y}{h} \right)^{3/2} \right) \quad (29)$$

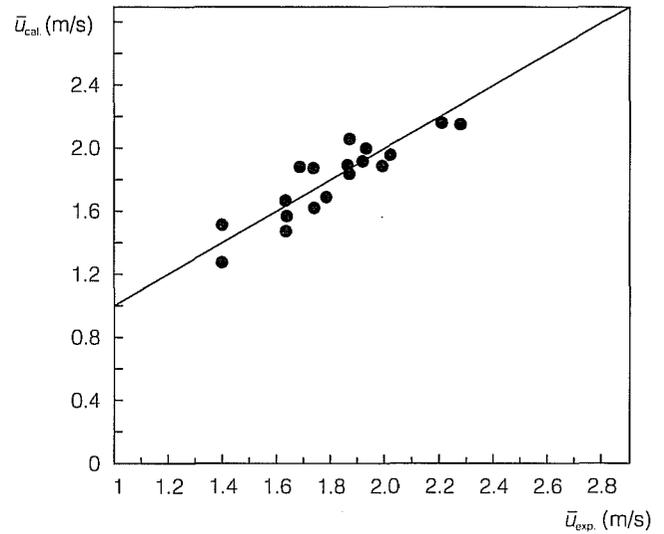
Se observa que ésta es idéntica a la ecuación de Chen (1988a) dada por (16a) para el caso en que $y_0 = h$, y $\eta = 2$. Esto nos conduce a un análisis similar al efectuado para el perfil de velocidad de Cheng-lung Chen.

Se utiliza (10) para obtener los valores de $a \operatorname{sen} \alpha$ a partir de los valores de velocidad medidos. Con estos valores se analiza el perfil de velocidad dado por (9) y se verifica que no ajusta a los datos experimentales

5. Distribuciones de velocidad de flujo de escombros según Takahashi, en las ecuaciones 9 y 30



6. Comparación entre la velocidad media, \bar{u}_{exp} , del fluido y la calculada \bar{u}_{cal} mediante la ecuación 21, para el banco de datos



como se muestra en la ilustración 5, pero mediante una función aditiva f_a , se obtiene (30) que proporciona un buen ajuste.

$$u = + \frac{2}{3} \frac{1}{d} \left(\frac{g \operatorname{sen} \theta}{a \operatorname{sen} \alpha} \left\{ c + (1 - c) \frac{\rho}{\rho_s} \right\} \right)^{1/2} \left\{ \left(\frac{c_*}{c} \right)^{1/3} - 1 \right\} \left(h^{3/2} - (h - y)^{3/2} \right) + \sqrt{g d} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{h} \right) \quad (30)$$

donde $f_a = \sqrt{g d} (0.5 - y/h)$

Análisis del modelo de Rickenmann

(21) también se analiza con los datos disponibles, para $u_{r*} = u_*$. Se determinan $\beta_{12} = 10$ y $\alpha_{12} = 0.02$, próximos a los valores de Smart y Jaeggi ($\beta_{12} = 15$ y $\alpha_{12} = 0.05$). (21) se muestra en la ilustración 6 con los valores de velocidad media experimental y se observa que produce buen ajuste, con un error medio del 6%.

Análisis del modelo turbulento de Umeyama y Gerritsen

Se verifica que la velocidad de la mezcla aún para concentraciones altas tiende a la ley logarítmica de Prandtl-von Kármán con valores de κ variables.

Mediante ajustes por mínimos cuadrados se encuentra que el valor de κ varía entre 0.2 y 0.7. El valor de κ es función de la concentración, pero no se obtiene buena correlación entre ellos, a pesar de que se contrastaron con los modelos de Hino en 1963 y Arai y Takahashi en 1986 presentados por Takahashi (1991) y Zagustin y Zagustin en 1969 e Ippen en 1971 presentados por González (1976).

En (25) se determinan los valores de β y A ajustando la distribución de velocidades por el método de prueba y error. Para el análisis se toman los dos primeros términos de la ecuación y se utilizan los valores experimentales de κ . Para el cálculo se toma $a = 0.1 h$ y $\delta = h$. Se obtiene $\beta = 0.002$, y, $A = 16$.

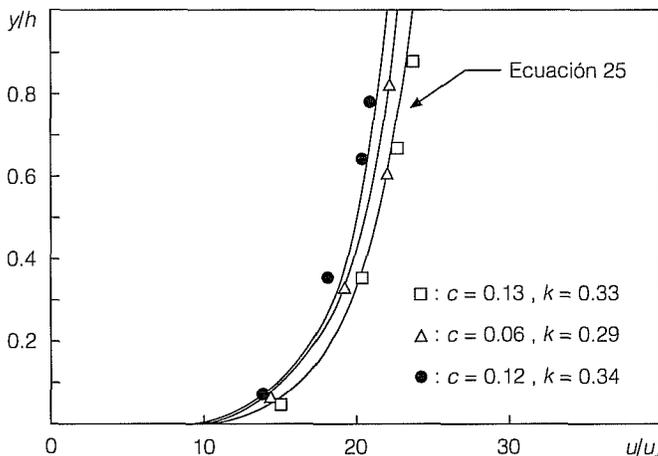
Se observa, en la ilustración 7, que esta distribución de velocidades se corresponde con los datos en toda la profundidad del flujo.

Formulación y calibración de un modelo de distribución de velocidad en flujo cargado de sedimentos

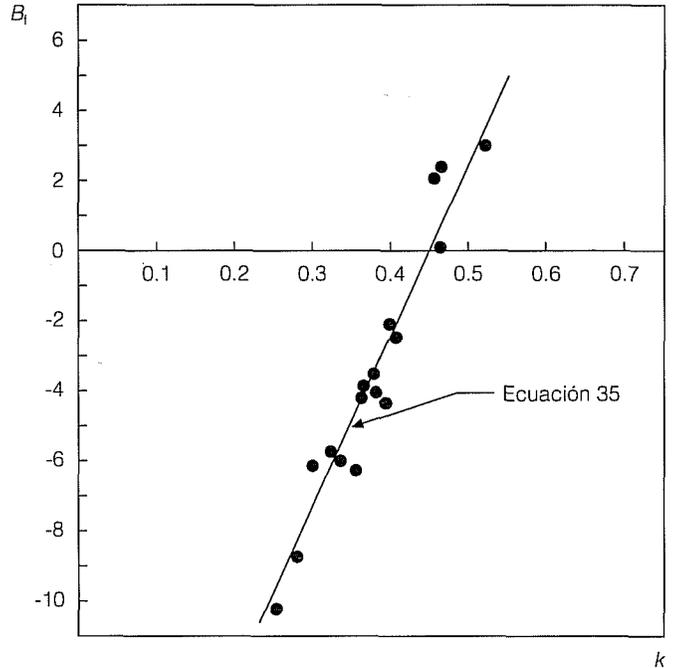
Los modelos de distribución de velocidades con componente viscosa, propuesto por Cheng-lung Chen (1988) y Takahashi (1991) requieren ajustes para representar adecuadamente los valores experimentales de velocidad. Las correcciones empíricas de ajuste consideran una velocidad de deslizamiento respecto al contorno fijo y un crecimiento suavizado por una función aditiva del tipo $E(A - y/h)$ donde E y A son constantes, que dependen del modelo ajustado.

Por otra parte los modelos de distribución de velocidad de tipo turbulento basados en la formulación de Prandtl-von Kármán, propuestos por Rickenmann

7. Distribución de velocidad adimensional obtenida a partir del modelo de Umeyama y Gerritsen, en la ecuación 25 junto con el perfil de velocidad experimental



8. Valores experimentales de B_i vs κ



(1991) y Umeyama y Gerritsen (1992) muestran buena correlación sin modificaciones en la estructura de las ecuaciones, pero requieren ajustes experimentales para los valores de β_{12} , α_{12} , β y A . Esto sugiere la presencia de esfuerzos viscosos y turbulentos en el flujo de la mezcla (Moncada, 1993). Con estos antecedentes, aquí se considera para flujo con alta concentración de sólidos, una tasa de corte dada por

$$\frac{du}{dy} = \frac{u}{\kappa} \left[\frac{1}{y} + \frac{f_c}{\delta'} \right] \tag{31}$$

en donde δ' es el espesor de la subcapa límite laminar y f_c una función dependiente de la concentración de sólidos, la cual toma el valor de cero para agua clara. El primer término del paréntesis genera la distribución logarítmica y el segundo un componente viscoso.

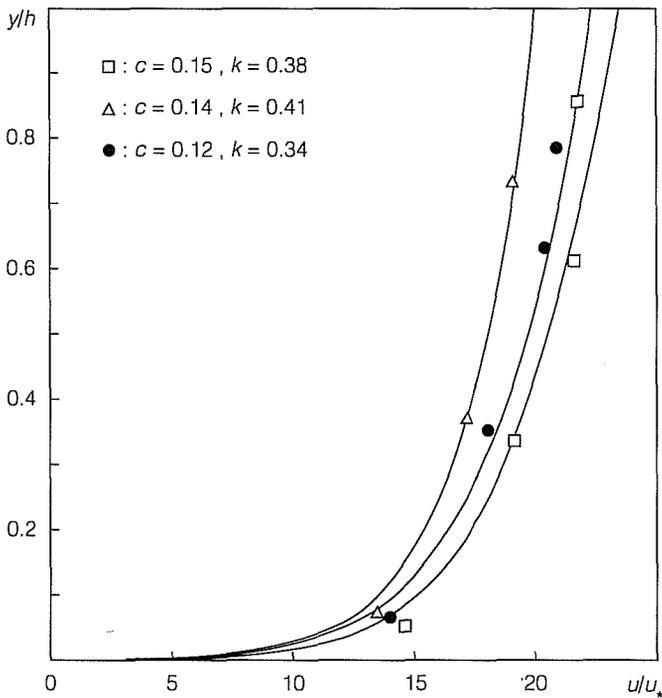
La integración de (31) conduce a la expresión

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left[\ln \left(\frac{y}{\delta'} \right) + f_c \left(\frac{y}{\delta'} \right) \right] + C \tag{32}$$

Sustituyendo el valor de C para $\delta' = N_1 v/u_*$, se tiene que

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left[\ln \left(\frac{y u_*}{v} \right) + f_c \left(\frac{y u_*}{N_1 v} \right) \right] + N_1 - \frac{1}{\kappa} f_c - \frac{1}{\kappa} \ln N_1 \tag{33}$$

9. Perfiles teóricos según la ecuación 34 y valores experimentales



donde $u_s/u_* = N_1$, (33) para $f_c = 0$, $N_1 = 11.6$, y $\kappa = 0.4$, se reduce a la relación de Prandtl-von Kármán para el flujo de un fluido homogéneo sobre un contorno liso. La (33) puede expresarse, en forma más compacta, como

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left[\ln \left(\frac{y u_*}{\nu} \right) + f_c \left(\frac{y u_*}{N_1 \nu} \right) \right] + B_1 \quad (34)$$

donde la función B_1 depende de N_1 , κ y f_c . La función B_1 se puede determinar a partir de los experimentos de González (1976). En efecto, se encuentra que B_1 es linealmente proporcional con el valor de κ y que la influencia de la variación de N_1 y de f_c sobre B_1 es despreciable. En la ilustración 8 se presentan los valores experimentales de B_1 versus κ , los cuales se ajustan a la relación

$$B_1 = -21.94 + 48.98 \kappa \quad (35)$$

Los perfiles de velocidad, correspondientes a (34), presentan un buen ajuste para B_1 dado por (35), κ variable, $f_c = 0.001$ y $N_1 = 11.6$ como valores experimentales medios. En la ilustración 9, se presentan los perfiles analíticos según (34) y los valores experimentales de González (1976) y en la ilustración 10 se compara

(34) con resultados de Vanoni (1946), Einstein y Chien (1955) y Samaga *et al.* (1986), cuyos datos analizaron Umeyama y Gerritsen (1992). La integración de (34) permite obtener

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left[\ln \left(\frac{h u_*}{\nu} \right) - 1 \right] + B_1 \quad (36)$$

donde \bar{u} es la velocidad media del flujo y B_1 está dado por

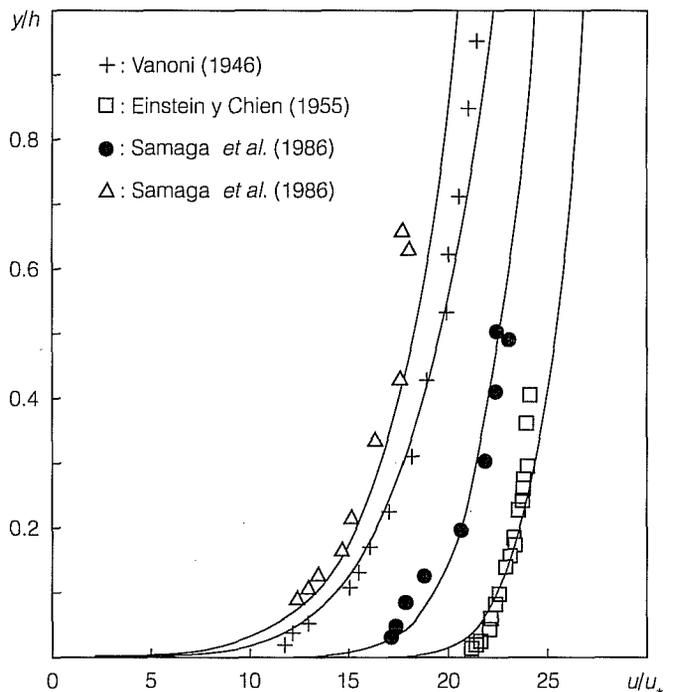
$$B_1 = \frac{f_c}{2 N_1} \frac{u_* h}{\kappa \nu} + B_1 \quad (37)$$

Conclusiones

El análisis del flujo con alta concentración de partículas sólidas, $15\% \leq C_p \leq 55\%$, registrado por González (1976), permitió determinar que

1.- El número N de Bagnold para la clasificación del flujo, indica que éste se encontraría en estado macroviscoso, $N < 40$, pero la evidencia experimental no lo sustenta. Esta discrepancia se puede explicar por el hecho de que el tamaño de las partículas en los experimentos de González (1976) es muy pequeño respecto a las utilizadas por Bagnold y otros investigadores.

10. Perfiles teóricos según la ecuación 34 y datos de otros investigadores



2.- Para que los modelos de Chen y Takahashi expresen adecuadamente la distribución de velocidad experimental, es necesario agregar una función adimensional, f_a , que en general es de la forma $E(A - y/h)$ para el caso en que $\eta = 1$ y $B/K = 0$, donde E y A son constantes que dependen del modelo ajustado.

3.- Los perfiles de velocidad de Takahashi no explican adecuadamente la distribución de velocidad experimental. Pero se observa que (30) obtenida en el presente trabajo, genera muy buen ajuste en toda la profundidad del flujo.

4.- La distribución de velocidad turbulenta-logarítmica se aproxima a la velocidad del flujo aún para elevadas concentraciones con valores de κ variables con la concentración de sedimento, en el rango $0.2 < \kappa < 0.7$.

5.- El modelo logarítmico-exponencial de Rickenmann explica bien la distribución de velocidad experimental, con un error medio del 6% para $\beta_{12} = 10$ y $\alpha_{12} = 0.02$.

6.- El modelo de Umeyama y Gerritsen para la distribución de velocidad se ajusta bien a los puntos experimentales, lo cual reafirma que el flujo posee una componente turbulenta.

7.- Debido a la posibilidad de ajustar los modelos viscosos y viscoplásticos al banco de datos analizado, mediante la adición de funciones específicas y, por otra parte, considerando que las distribuciones de velocidades con componentes logarítmicos presentan correlaciones aceptables, susceptibles de ser mejoradas, se consideró la hipótesis de un flujo sujeto a tasas de corte con componentes viscosos y turbulentos, la cual conduce a una relación de velocidad que representa adecuadamente los valores experimentales analizados. En el modelo de distribución de velocidades se produjo un buen ajuste para κ variable en el rango $0.2 < \kappa < 0.7$.

Recibido: julio, 1995
Aprobado: julio, 1996

Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento al Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico (CDCHT) de la Universidad de Los Andes por el apoyo financiero para hacer posible la realización de este trabajo a través del Proyecto I-398-93-02-A.

Referencias

- Bagnold, R. A. 1954. Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a newtonian fluid under shear. *Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A*, 225: 49-63.
- Chen, C. 1988a. Generalized viscoplastic modelling of debris flow. *ASCE Journal of Hydraulic Engineering* 114(3):237-258.
- Chen, C. 1988b. General solutions for viscoplastic debris flow. *ASCE Journal of Hydraulic Engineering* 114(3):259-282.
- Einstein, H. A. y Chien, N. 1955. Effects of heavy sediment concentration near the bed on the velocity and sediment distribution. *Report No. 8, U.S. Army Corps of Engrs. Missouri River Div. Univ. of California, Berkeley, California.*
- González, M. P. 1976. Estudio teórico-experimental de una canaleta de relaves. *Memoria para Optar al Título de Ingeniero Civil de Minas*, Santiago de Chile, pp. 1-125.
- Julien, P. Y. y Lan, Y. 1991. Rheology of hyperconcentrations. *ASCE Journal of Hydraulic Engineering* 117(3):346-353.
- Moncada, A. T. 1993. *Modelación de un flujo de relaves*. Tesis para optar al grado de Magister Scientiae en Obras Hidráulicas, Mérida, Venezuela, p. 452.
- Rickenmann, D. 1991. Hyperconcentrated flow and sediment transport at steep slopes. *ASCE Journal of Hydraulic Engineering* 117(11):1419-1439.
- Samaga, B. R.; Rangaraju, K. G. y Garge, R. J. 1986. Velocity distribution in alluvial channel flow. *ASCE Journal of Hydraulic Research* 24(4):297-308.
- Takahashi, T. 1991. *Debris Flow*. Rotterdam: IAHR Monograph Series, A. A. Balkema pp. 26-62.
- Umeyama, M. y Gerritsen, F. 1992. Velocity distribution in uniform sediment-laden flow. *ASCE Journal of Hydraulic Engineering* 118(2):229-245.
- Vanoni, V. A. 1946. Transportation of suspended sediment by water. *ASCE Transactions* 111:67-133.

Abstract

Moncada, A.T.; J. Aguirre-Pe; R. Fuentes. "Velocity Distribution in Sediment-Laden Flow" *Hydraulic Engineering in Mexico (in Spanish)* Vol. XII. Num. 2, pages. 5-15, May-August, 1997.

In this paper different velocity distribution models of flows with a high sediment concentration are studied. The main characteristics of the models as well as their restrictions are considered. Velocity distributions proposed in the literature are analyzed and compared with experimental data. A new model for the velocity distribution, based on theoretical grounds that take into account both viscous and turbulent stresses, is formulated. The proposed model correlates very well with the experimental data.

Key words: Velocity distribution, hyperconcentrated flow, debris flow, viscoplastic fluid, macroviscous flow, turbulent flow, inertial flow.