

Una solución de elemento finito para la transferencia de agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo

Heber Saucedo
Carlos Fuentes

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Manuel Zavala

Universidad Nacional Autónoma de México

Michel Vauclin

Laboratorio de Estudio de las Transferencias en Hidrología y Medio Ambiente, Francia

Se ha desarrollado una solución de elemento finito de la ecuación bidimensional de Richards para describir el movimiento del agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo. La solución de elemento finito ha sido parcialmente validada con una solución analítica exacta de la ecuación de Richards para una columna semi-infinita de suelo sujeta a una condición de flujo constante sobre la superficie del suelo, la cual describe la evolución temporal del perfil de humedad sobre el dren mientras la posición del frente de humedecimiento sea menor que la profundidad del dren. La comparación de los perfiles de humedad en un suelo arenoso y otro arcilloso ha permitido seleccionar un solo paso de tiempo numérico para aproximar la solución exacta en ambos suelos con un error relativo máximo menor de 0.25%. La solución de elemento finito ha sido aplicada para describir el funcionamiento hidráulico de un sistema de drenaje instalado en una parcela agrícola de un distrito de riego ubicado en la zona semiárida del noroeste de México, aceptando la presencia de una superficie de filtración en el dren. El suelo de textura esencialmente arcillosa ha sido caracterizado desde el punto de vista hidrodinámico a partir de su curva granulométrica y su porosidad, y a partir de una prueba de drenaje en la parcela. La conductividad hidráulica a saturación y un valor característico de la presión se estimaron a fin de minimizar los errores entre el hidrograma proporcionado por la solución y el hidrograma observado experimentalmente. El hidrograma teórico proporcionado por la solución de elemento finito describe las características matemáticas, como la presencia de un punto máximo, del hidrograma experimental. Las fases de crecimiento y recesión del hidrograma son igualmente bien descritos por la solución. Esto valida el tratamiento de la condición de frontera en el dren como una superficie de filtración. En consecuencia, la solución propuesta puede ser utilizada tanto para la identificación de parámetros del suelo a partir de pruebas de drenaje como para la descripción del funcionamiento hidráulico de un sistema de drenaje.

Palabras clave: condición de frontera de superficie de filtración en el dren, caracterización hidrodinámica del suelo, drenaje agrícola en zonas áridas.

Introducción

En diversos trabajos reportados en la literatura se ha modelado la transferencia de agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo utilizando la ecuación de Richards bidimensional, los cuales se diferencian entre

sí dependiendo de la manera en que se considere la forma geométrica del dren y la condición de frontera que sujeta la ecuación en el mismo. Zaradny y Feddes (1979) modelan la transferencia de agua hacia un dren de forma circular, tratando la condición de frontera como una superficie de filtración, sin embargo los re-

sultados de la aplicación del modelo no son comparados con datos de campo. García *et al.* (1994) combinan las ecuaciones de Boussinesq bidimensional para la zona de flujo en saturación con la ecuación de Richards unidimensional para la zona en flujo no saturado, considerando el dren como un punto en el dominio de solución y sujetando la ecuación a una condición tipo Dirichlet en el dren, sin realizar comparaciones con datos de campo. Fipps y Skaags (1986) sujetan la ecuación a una condición tipo Dirichlet y apuntan que los hidrogramas de drenaje son similares cuando el dren se representa como un punto y como una circunferencia en una malla de elementos finitos suficientemente fina en la vecindad de ambos, en un rango limitado del tamaño de los drenes. En los trabajos de Zaradny y Feddes (1979), y Fipps y Skaags (1986) se utiliza el método del elemento finito para resolver numéricamente la ecuación de Richards, pero no se ha tenido en cuenta la condición de uniformidad (Mori, 1983) en cuanto a la forma de los elementos triangulares, si bien es significativamente más acertada la discretización efectuada en el segundo de los trabajos citados.

El objetivo del presente trabajo es la modelación del funcionamiento hidráulico de un sistema de drenaje agrícola instalado en un distrito de riego de la zona semiárida del noroeste de México, que tiene como fuente de recarga la aplicación de riego por gravedad. La ecuación diferencial de Richards en su forma bidimensional se resuelve numéricamente con el método del elemento finito, respetando la condición de uniformidad en la discretización del espacio al utilizar elementos triangulares (Mori, 1983). Los resultados del esquema numérico se comparan con los resultados proporcionados por una solución analítica unidimensional aplicable en la sección localizada sobre el dren. Finalmente, el modelo se evalúa con un hidrograma de drenaje experimental.

Materiales y métodos

Ecuación de Richards

La ecuación de Richards (1931) resulta de la combinación de la ecuación de continuidad con el campo de velocidades calculado conforme a la ley de Darcy:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla \psi] - \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (1)$$

donde ψ es el potencial de presión del agua en el suelo, expresado como la altura de una columna equivalente de agua (L) (positivo en la zona saturada y nega-

tivo en la zona no saturada del suelo); $C(\psi) = d\theta/d\psi$ es denominada la capacidad específica de humedad del suelo; $\theta = \theta(\psi)$ es el volumen de agua por unidad de volumen de suelo o contenido volumétrico de agua ($L^3 L^{-3}$) y es una función de ψ conocida como curva característica de humedad o curva de retención del agua; $K = K(\psi)$ es la conductividad hidráulica (LT^{-1}) que en un suelo parcialmente saturado es una función del potencial de presión; el potencial gravitacional es asimilado a la coordenada espacial z , orientada positivamente hacia abajo (L); $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ es el operador gradiente; x , y son las otras dos coordenadas espaciales (L) y t es el tiempo (T).

El drenaje agrícola es un fenómeno tridimensional (ilustración 1), por lo cual la descripción del flujo debería realizarse teniendo en cuenta la ecuación de Richards en tres dimensiones, considerando inclusive las ecuaciones de Saint-Venant para modelar el flujo a superficie libre en el dren, sin embargo, dado el esfuerzo de cómputo que esto significa, es conveniente aceptar la hipótesis de que el fenómeno es básicamente bidimensional, es decir, que se efectúa en planos perpendiculares a la dirección del dren (corte AA' en la ilustración 1). La ecuación que gobierna el proceso sería entonces la forma bidimensional de la ecuación 1:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (2)$$

La simetría del flujo en un sistema de drenaje hace posible la definición del dominio de solución que se muestra en la ilustración 2.

De acuerdo con el dominio de solución definido, el semigasto por unidad de longitud de dren que fluye por la frontera del dren se calcula como:

$$Q_{1/2} = \int_{\Omega} q_d d\Omega \quad (3)$$

Ilustración 1. Esquema del flujo en un sistema de drenaje.

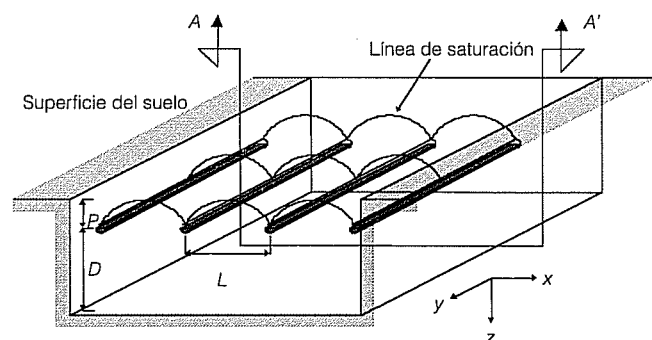
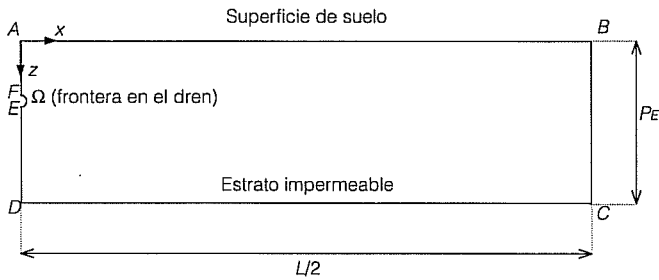


Ilustración 2. Dominio de solución para la acuación de Richards bidimensional. Corte AA en la ilustración 1.



donde q_d es el flujo de Darcy calculado en cada punto sobre la frontera Ω . El gasto por unidad de longitud de dren será el doble del semigasto evacuado por la frontera Ω y el gasto total, conforme a la hipótesis de que el flujo se da en planos perpendiculares al desarrollo del dren, será proporcionado por el producto de la longitud de las líneas de drenaje (L_D) y el gasto por unidad de longitud:

$$Q_T = 2Q_{1/2}L_D \quad (4)$$

el gasto total así calculado se comparará con el gasto observado en pruebas de campo.

Condiciones límite

Como condición inicial se debe especificar la distribución de las presiones en el espacio:

$$\psi = \psi_0(x, z) \quad (5)$$

Las condiciones en las fronteras $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{FA}$ son de flujo nulo (tipo Neumann):

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad x = L/2, \quad z \in \overline{BC}, \quad t > 0 \quad (6.1)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq x \leq L/2, \quad z = P_E, \quad t > 0 \quad (6.2)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad z \in \overline{DE}, \quad t > 0 \quad (6.3)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad z \in \overline{FA}, \quad t > 0 \quad (6.4)$$

En la superficie del suelo ($\overline{AB}$) puede imponerse la condición de frontera según el fenómeno que sea ne-

cesario simular; en el caso de un riego, el potencial de presión es igual al tirante de agua sobre la superficie del suelo durante el tiempo de contacto promedio (t_c):

$$\psi = h, \quad 0 \leq x \leq L/2, \quad z = 0, \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (7)$$

en el caso de lluvia o evaporación de intensidad conocida, se sujeta la ecuación a una condición de frontera tipo Neumann con flujo igual a dicha intensidad (i):

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = i, \quad 0 \leq x \leq L, \quad z = 0, \quad t > 0 \quad (8)$$

La frontera del dren (Ω) ha sido considerada como una superficie de filtración (Neumann, 1973) haciendo uso de la ventaja que presenta el método del elemento finito para asignar fácilmente una condición de frontera a cada nudo localizado sobre la semicircunferencia del dren. Inicialmente se considera que no existe flujo en el dren y se tiene en cuenta una condición de frontera tipo Neumann sobre toda la semicircunferencia del mismo, situación que es conservada hasta que la superficie libre alcanza un nudo del dren, momento en el cual se cambia la condición tipo Neumann por una tipo Dirichlet con potencial cero.

Solución numérica con el método del elemento finito

Se multiplica la ecuación 2 por una función de peso (v), se integra usando el teorema de Green sobre el dominio de solución (R) limitado por la frontera ($\Re$) y se obtiene la siguiente expresión para la forma débil de la ecuación de Richards bidimensional:

$$\begin{aligned} \int_R C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} v dR + \int_R K(\psi) \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] dR \\ = \int_R K(\psi) \frac{\partial v}{\partial z} dR + \int_{\Gamma} q v d\Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

donde se ha denotado como Γ a la fracción de $\Re$ sujeta a condición de Neumann con flujo prescrito q .

Se propone la solución de la ecuación 2 como una combinación lineal de funciones de base (ϕ) escrita por separado para los nudos interiores (n) y para los de frontera sujetos a una condición esencial (tipo Dirichlet no homogénea):

$$\psi_n(x, z, t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \phi_j(x, z) + \sum_{j=n+1}^{n+v} b_j(t) \phi_j(x, z) \quad (10)$$

$b_j(t)$ es el valor del potencial que se impone en los nudos de frontera sujetos a condición de Dirichlet y su valor puede cambiar en el tiempo.

Se sustituye en la forma débil (ecuación 9) teniendo en cuenta lo siguiente: a) se consideran las funciones de peso (v) iguales a las funciones de base (φ), correspondientes a los nudos interiores; b) se asume una variación lineal de las características hidrodinámicas sobre cada elemento, expresándola mediante las funciones de forma: $\hat{C} = \varphi_g C_g$ y $\hat{K} = \varphi_g K_g$, c), se utiliza un sistema de masa concentrado con la finalidad de obtener una matriz diagonal (Mori, 1983).

Se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$M \frac{da}{dt} + Ka = B + Q + Lb + F \quad (11)$$

Utilizando funciones de base lineales, que se definen en relación con la función delta de Kronecker aplicada a cada nudo en particular, las matrices del sistema (ecuación 11) se calculan como sigue:

$$M_{kj} = \sum_{j=1}^n \left[\int_R C_g \bar{\varphi}_g \bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_k dR \right] = \sum_e C_j \frac{\Delta}{3} \quad (12.1)$$

$$K_{kj} = \sum_{j=1}^n \left[\int_R K_g \varphi_g \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \right) dR \right] \quad (12.2)$$

$$= \sum_e \frac{\bar{K}}{4\Delta} (m_j m_k + p_j p_k)$$

$$B_k = \int_R K_g \varphi_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} dR = \sum_e \frac{\bar{K}}{2} p_k \quad (12.3)$$

$$Q_k = \int_\Gamma q \bar{\varphi}_k d\Gamma = \sum_e \frac{q L_j}{2} \quad (12.4)$$

donde se ha denotado a las funciones de masa concentrada como $\bar{\varphi}$ y se definen como funciones unitarias en la región baricéntrica correspondiente a un nudo específico, y cero en el resto del dominio; Δ es el área del elemento; $\bar{K}$, la conductividad en el elemento, tomada como el promedio aritmético de las conductividades en los tres nudos del elemento (como consecuencia de la forma adoptada para las funciones de base); C_j es la capacidad específica correspondiente al nudo j ; L_j es la longitud de frontera asociada con cada nudo bajo condición de Neumann; m y p son factores geométricos definidos según las funciones de forma $m_i = z_j - z_k$, $p_i = x_j - x_k$. Los subíndices i, j, k , que corresponden a las esquinas del elemento triangular, corren sobre sus tres posibles permutaciones secuenciales.

La matriz de rigidez (L_{kj}) y el término convectivo (F_k) relativos a la frontera se calculan de la misma forma que para los nudos interiores, pero considerando las propiedades geométricas y características hidrodinámicas de los de frontera.

La integración del sistema (ecuación 11) en el tiempo se realiza utilizando diferencias finitas. Se tienen en cuenta las siguientes aproximaciones:

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^{k+\omega} = \frac{a^{k+1} - a^k}{\Delta t} \quad (13.1)$$

$$a^{k+\omega} = \omega a^{k+1} + (1-\omega)a^k \quad (13.2)$$

donde k y Δt representan el nivel y el paso de tiempo, respectivamente, y ω es un factor de ponderación en el tiempo.

Se sustituyen las ecuaciones 13 en la ecuación 11 y se logra el siguiente esquema numérico para la ecuación de Richards bidimensional:

$$\left[\frac{M^{k+\omega}}{\Delta t} + \omega K^{k+\omega} \right] a^{k+1} = \left[\frac{M^{k+\omega}}{\Delta t} - (1-\omega)K^{k+\omega} \right] a^k + B^{k+\omega} + Q^{k+\omega} - L^{k+\omega} b + F^{k+\omega} \quad (14)$$

el factor de ponderación $\omega = 1/2$ permite obtener una aproximación de segundo orden para la derivada temporal.

Los flujos en los nudos de frontera son necesarios para estimar el gasto por unidad de longitud de dren, así como para definir adecuadamente la condición de filtración. El flujo en la frontera para una iteración ($m+1$), se obtiene usando la solución de elemento finito para esa iteración y la anterior (m). Se despeja el vector de flujos del esquema dado por la ecuación 14 y se evalúa para los nudos localizados sobre el dren:

$$Q = \left[\frac{M^{m+\omega}}{\Delta t} + \omega K^{m+\omega} \right] a^{m+1} - \left[\frac{M^{m+\omega}}{\Delta t} - (1-\omega)K^{m+\omega} \right] a^m - B^{m+\omega} + L^{m+\omega} b - F^{m+\omega} \quad (15)$$

Validación del esquema numérico

La dificultad de establecer un criterio general de convergencia y estabilidad para la ecuación de Richards bidimensional hace necesario validar el modelo desarrollado, comparando los resultados obtenidos mediante su aplicación y aquellos proporcionados por una solución analítica.

La simetría del sistema de drenaje seleccionado permite inferir que el flujo horizontal en la sección sobre el dren y en la sección ubicada entre los drenes es nulo y en consecuencia, el movimiento del agua en estas secciones es unidimensional vertical para todo tiempo. Por tanto, la solución numérica sobre el dren puede ser validada con una solución analítica para una columna de suelo.

Existen soluciones exactas para una columna semi-infinita de suelo sujeta a una condición de flujo constante en la superficie de la misma. Puesto que en el problema estudiado se trata de una columna finita, la validación solamente puede realizarse hasta antes de que el frente de humedecimiento alcance al dren. Las soluciones exactas se han construido para las características hidrodinámicas propuestas por Fujita (1952) y Parlange *et al.* (1982).

La forma para la difusividad hidráulica propuesta por Fujita (1952) es:

$$D(\Theta) = \left(\frac{K_s \lambda_c}{\theta_s - \theta_r} \right) \left[\frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha\Theta)^2} \right] \quad (16)$$

donde Θ representa el grado de saturación:

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (17)$$

θ_r es el contenido volumétrico de agua residual; θ_s , el contenido volumétrico de agua a saturación; K_s , la conductividad hidráulica a saturación; λ_c , la escala de Bouwer (1964), y α es un parámetro de forma ($0 < \alpha < 1$).

De la relación entre la difusividad y conductividad hidráulicas propuesta por Parlange *et al.* (1982) se deduce (Fuentes *et al.*, 1992):

$$K(\Theta) = K_s \frac{\Theta[1 - \beta + (\beta - \alpha)\Theta]}{1 - \alpha\Theta} \quad (18)$$

donde β es un parámetro adimensional ($0 < \beta < 1$).

La curva característica de humedad o curva de retención resulta de la definición $D(\theta) = K(\theta) d\psi/d\theta$, es decir:

$$\psi = \psi_c \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \ln \left[\frac{1 - \alpha\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right] + \frac{\beta - \alpha}{\beta(1 - \beta)} \ln \left[\frac{1 - \beta + (\beta - \alpha)\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right] \right\} \quad (19)$$

donde $\psi_c = -\lambda_c$.

Para las características de Fujita y Parlange, con el caso particular de α variable y $\beta = 1$, se han desarrollado soluciones analíticas exactas en una columna semi-infinita de suelo sujeta a una condición de flujo constante en la superficie del suelo y a un contenido de

agua inicial constante. En flujo bifásico, la solución es presentada por Rogers *et al.* (1983), y en flujo monofásico por Sanders *et al.* (1988). La solución del último trabajo ha sido adaptada por Warrick y Parkin (1995) para el caso del drenaje en una columna semi-infinita de suelo y para el flujo del agua en una columna finita por Hills y Warrick (1993). La solución para el caso general de α y β variables es presentada por Fuentes (1992).

$$\Theta(\zeta, t) = \frac{\mu(\zeta, t)}{1 - \alpha + \alpha\mu(\zeta, t)} \quad (20)$$

$$\mu(\zeta, t) = \frac{\alpha Q - (1 - \beta)}{2\beta} - \frac{\sqrt{1 - \alpha}}{\beta[u_f(\zeta, t) + u_c(\zeta, t)]} \left[\frac{\partial u_f(\zeta, t)}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_c(\zeta, t)}{\partial \zeta} \right] \quad (21)$$

$$z(\zeta, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha}} \left[\left(1 - \alpha + \alpha \frac{\alpha Q - (1 - \beta)}{2\beta} \right) \zeta \right] + \frac{\alpha}{\beta} \ln \left[\frac{\exp(\lambda^2 t)}{u_f(\zeta, t) + u_c(\zeta, t)} \right] \quad (22)$$

siendo:

$$u_f = \frac{1}{2} \exp(-\lambda \zeta + \lambda^2 t) \operatorname{erfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{t}} - \lambda \sqrt{t} \right) + \frac{1}{2} \exp(\lambda \zeta + \lambda^2 t) \operatorname{erfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{t}} + \lambda \sqrt{t} \right) \quad (23)$$

$$u_c = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp[A(\bar{\zeta})] \left[\exp \left(-\frac{(\zeta - \bar{\zeta})^2}{4t} \right) - \exp \left(-\frac{(\zeta + \bar{\zeta})^2}{4t} \right) \right] d\bar{\zeta} \quad (24)$$

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{1 - \alpha}} \sqrt{(1 - \beta)^2 + 2[2\beta(1 - \alpha) - \alpha(1 - \beta)]Q + (\alpha Q)^2} \quad (25)$$

$$A(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{1 - \alpha}} \left[\alpha Q \zeta - \int_0^\zeta (1 - \beta + 2\beta\mu_f(\bar{\zeta})) d\bar{\zeta} \right] \quad (26)$$

en donde las variables adimensionales están definidas por:

$$z = \frac{z}{\lambda_c}, \quad t = \frac{K_s}{(\theta_s - \theta_r)\lambda_c} t \quad (27)$$

El cálculo de la función $A(\zeta)$ requiere del conocimiento de la condición inicial. Por simplicidad se escogerá un contenido de agua constante en todo el perfil (θ_i). El valor correspondiente μ_i se calcula utilizando la ecuación 20. La función resultante

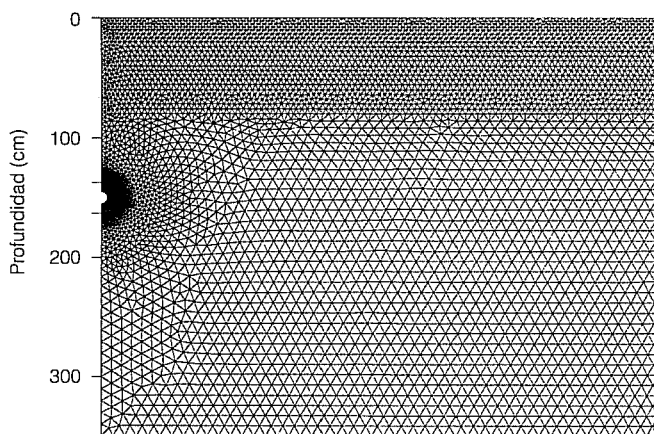
$A(\zeta) = [\alpha Q - (1 - \beta + 2\beta\mu_i)]\zeta / 2\sqrt{1 - \alpha}$ permite obtener de la ecuación 24 la solución para u_c de manera cerrada.

La solución analítica para el perfil de humedad $\theta(z, t)$ es paramétrica, es decir de la forma $\theta(\zeta, t) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)\Theta[\zeta, K_s t / \lambda_c (\theta_s - \theta_r)]$ y $z = \lambda_c \zeta [K_s t / \lambda_c (\theta_s - \theta_r)]$, con $\zeta \geq 0$ como parámetro.

La semejanza entre los perfiles de humedad generados con el esquema numérico y los proporcionados por la solución exacta está influenciada básicamente por la discretización del dominio en el espacio y el tiempo. Debido al esfuerzo de cómputo que se requiere para realizar verificaciones del comportamiento de la solución de elemento finito se ha optado por mantener fija la discretización del espacio y modificar la discretización en el tiempo. El paso de tiempo inicial escogido es $\Delta t = 0.050$ s, el cual se incrementa gradualmente conforme al número de iteraciones que es necesario realizar dentro de cada paso de tiempo hasta alcanzar uno máximo fijado ($\Delta t_{\text{máx}}$). Se han adoptado las siguientes reglas: para una tolerancia dada, si el esquema converge en un número menor o igual a P iteraciones, el paso de tiempo se incrementa en, por ejemplo, 5%; si el número de iteraciones necesario para alcanzar la convergencia es mayor que W , donde $W > P$, se reduce el paso de tiempo en, por ejemplo, 25 por ciento.

Un detalle de la discretización del espacio utilizada tanto para la validación del modelo como para la simulación de la transferencia de agua en un sistema de drenaje se aprecia en la ilustración 3. La malla comple-

Ilustración 3. Detalle de la malla de elementos finitos.



ta consta de 41,568 nudos, distribuidos en 81,927 elementos, y ha sido elaborada respetando la condición de uniformidad (Mori, 1983) con el programa *Argus One*. Los pasos de espacio mínimos escogidos son $\Delta x_{\text{mín}} = 0.04$ cm, y $\Delta z_{\text{mín}} = 0.04$ cm, y los máximos son $\Delta x_{\text{máx}} = 10.0$ cm y $\Delta z_{\text{máx}} = 10.0$ cm. Se ha utilizado el método del gradiente conjugado preconditionado (Noor *et al.*, 1987) con almacenamiento libre de ceros para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas que resulta de la aplicación del método del elemento finito.

La validación del modelo es realizada en una arcilla clara de Yolo, Estados Unidos, y una arena del río Isère, Francia, cuyos valores de los parámetros de Fujita y Parlange son reportados por Fuentes *et al.* (1992) y se muestran en el cuadro 1.

En el cuadro 2 se presentan los valores del contenido de agua inicial y del flujo de agua en la superficie del suelo seleccionados para realizar la comparación entre los perfiles de humedad calculados con la solución numérica y la solución analítica en los dos suelos presentados en el cuadro 1.

La comparación gráfica entre los perfiles de humedad para los dos pasos de tiempo máximos escogidos, $\Delta t_{\text{máx}} = 30$ y 180 s, se muestra en la ilustración 4 para la arcilla y en la ilustración 5 para la arena.

Los errores relativos máximos entre las dos soluciones para los dos pasos de tiempo escogidos son calculados con la expresión:

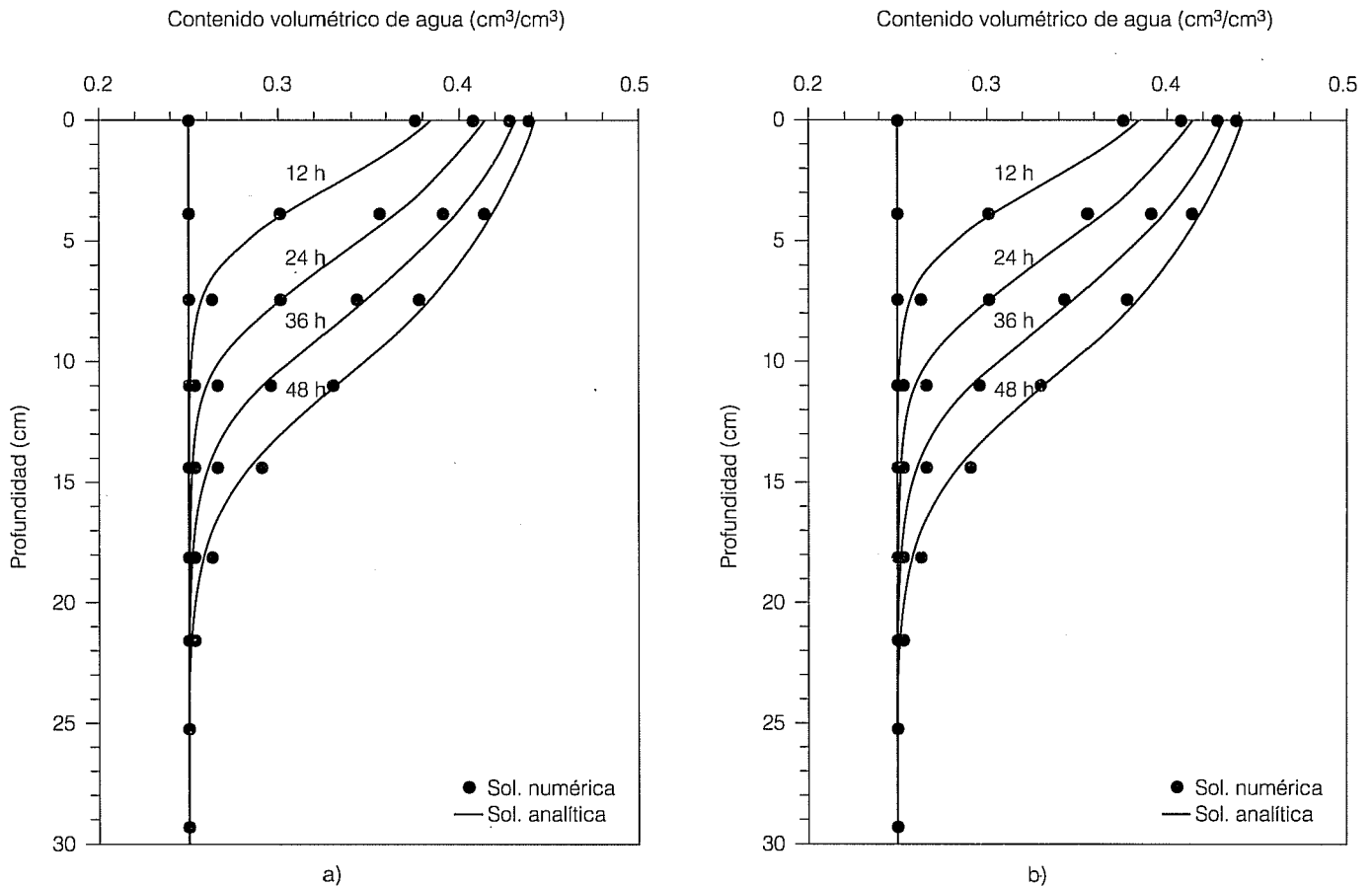
Cuadro 1. Parámetros de las características hidrodinámicas de Fujita-Parlange para dos suelos contrastantes.

Suelo	θ_r (cm ³ /cm ³)	θ_s (cm ³ /cm ³)	λ_c (cm)	K_s (cm/h)	α	β
Arcilla clara de Yolo, EEUU	0.2285	0.4950	27.05	0.0443	0.8912	1.0
Arena del Isère, Francia	0.0438	0.3120	9.20	15.3700	0.8820	1.0

Cuadro 2. Error máximo obtenido al comparar las soluciones analítica y de elemento finito para dos suelos contrastantes.

Suelo	θ_0 (cm ³ /cm ³)	q_0 (cm/h)	$\Delta t_{\text{máx}} = 30$ s	$\Delta t_{\text{máx}} = 180$ s
			$E_{\text{máx}}(\%)$	$E_{\text{máx}}(\%)$
Arcilla clara de Yolo, EEUU	0.2500	0.040	0.210	0.211
Arena del Isère, Francia	0.1000	4.000	0.172	0.315

Ilustración 4. Comparación de la solución analítica y la solución numérica en la arcilla clara de Yolo: a) paso de tiempo máximo de 30 s, b) paso de tiempo máximo de 180 segundos.



$$E_{\text{máx}} = \max \left| \frac{\theta_{\text{núm}} - \theta_{\text{exacta}}}{\theta_{\text{exacta}}} \right| \times 100 \quad (28)$$

Los errores presentados en el cuadro 2, para los dos pasos de tiempo mencionados, muestran que el error en la arcilla no es significativo, mientras que el error en la arena es de aproximadamente el doble. Si se desea aceptar un error menor de 0.25% en ambos suelos, se puede escoger como paso de tiempo máximo: $\Delta t_{\text{máx}} = 30$ segundos.

Aplicaciones

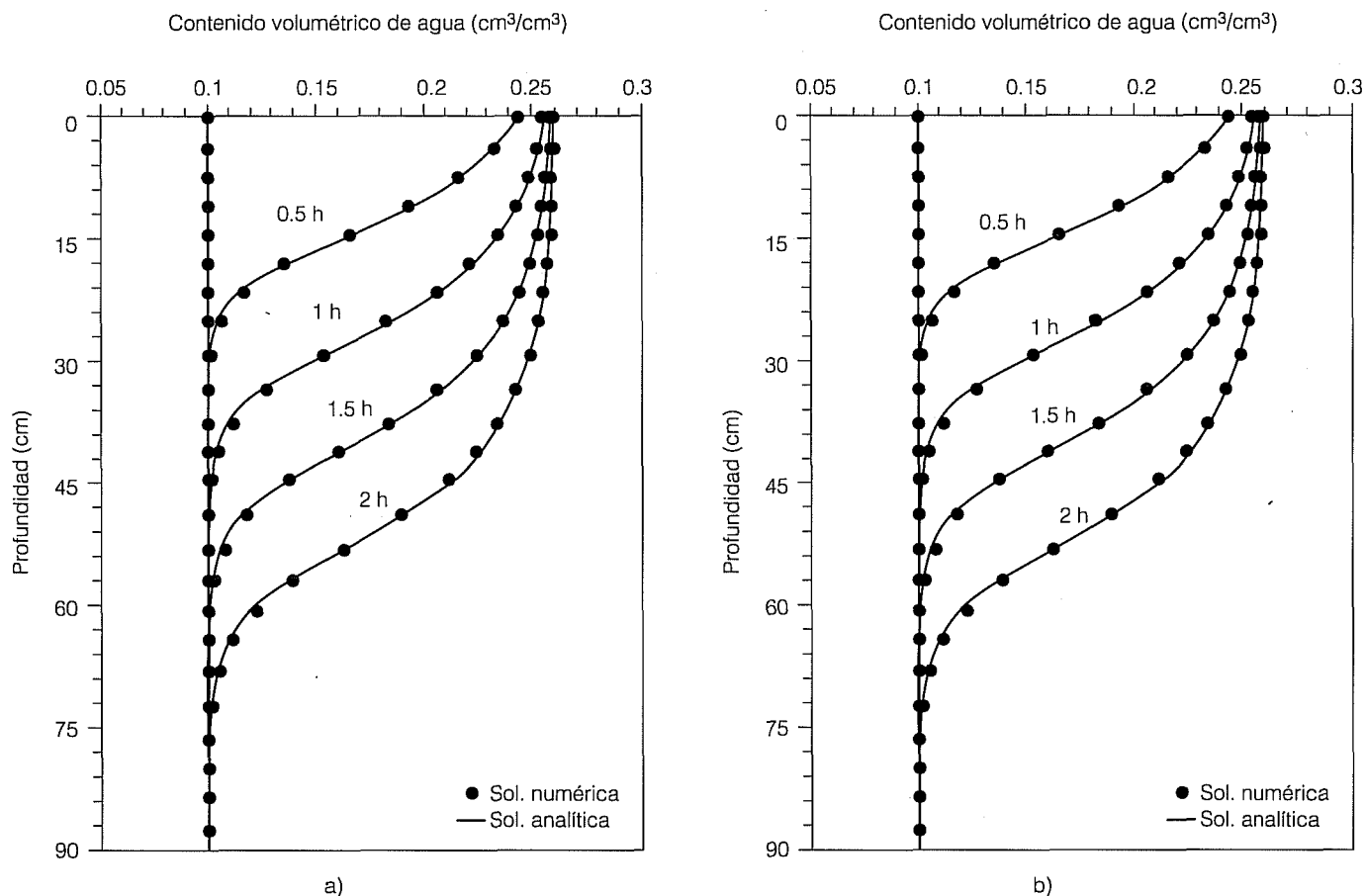
La solución de elemento finito de la ecuación de Richards bidimensional presentada se utiliza para describir el funcionamiento hidráulico de un sistema de drenaje agrícola subterráneo instalado en una parcela del Centro Nacional de Tecnología de Riego y Drenaje (Cenatryd) ubicado en el Distrito de Riego 076 Valle del Carrizo, Sinaloa. El suelo es de textura arcillosa.

El sistema de drenaje subterráneo consiste de líneas paralelas de tubos de drenaje de cloruro de polivinilo (PVC) ranurado de 7.62 cm de diámetro. Las líneas se encuentran enterradas a una profundidad media de 1.5 m, con una longitud de 235 m y separadas entre sí cada 50 m; tienen una pendiente longitudinal de 0.001 y descargan en un dren colector a cielo abierto. En el perfil del suelo se encuentra un estrato ubicado aproximadamente a 3.5 metros de profundidad, el cual puede considerarse como prácticamente impermeable.

En la parcela se realizó un experimento de riego por gravedad. El perfil de humedad medido antes de la prueba de riego (mostrado en la ilustración 6) indica la presencia de un manto freático a 1.55 m de profundidad, es decir, aproximadamente en la posición de las líneas de drenaje.

El tiempo de contacto medio del agua con el suelo durante la prueba de riego fue de 2 h. En la ilustración 8 se muestra el hidrograma de salida observado en una línea de drenaje.

Ilustración 5. Comparación de la solución analítica y la solución numérica en la arena del río Isère: a) paso de tiempo máximo de 30 s, b) paso de tiempo máximo de 180 segundos.



Para la descripción del funcionamiento hidráulico del sistema de drenaje durante y después de la prueba de riego con la solución de elemento finito es necesaria la caracterización hidrodinámica del suelo. Como señalan Fuentes *et al.* (1992), la combinación de las características hidrodinámicas de Fujita y Parlange es conveniente en estudios teóricos como la construcción de soluciones analíticas exactas; en estudios experimentales puede ser más conveniente utilizar la combinación de la curva de retención propuesta por Van Genuchten (1980), con la restricción de Burdine (1953), con la curva de conductividad hidráulica propuesta por Brooks y Corey (1964), debido a que satisfacen las propiedades integrales de la infiltración y a la facilidad para la identificación de sus parámetros.

La curva de retención propuesta por Van Genuchten (1980) se escribe como:

$$\frac{\theta(\psi) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[1 + \left(\frac{\psi}{\psi_d} \right)^n \right]^{-m} \quad (29)$$

donde ψ_d es un valor característico de la presión del agua, m y n son dos parámetros de forma empíricos relacionados por la restricción de Burdine (1953): $m = 1 - 2/n$, con $0 < m < 1$ y $n > 2$.

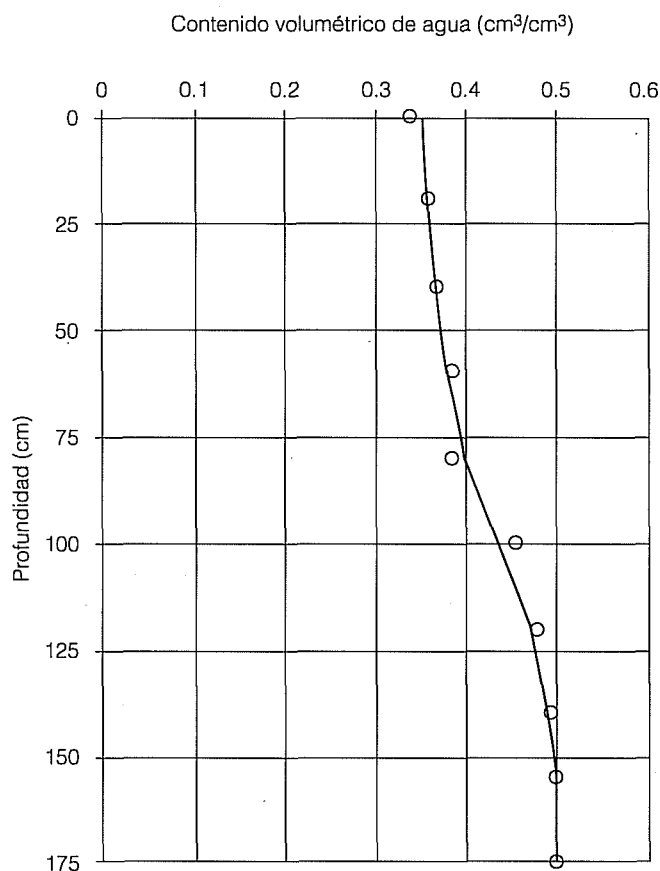
La conductividad hidráulica propuesta por Brooks y Corey (1964) se representa como:

$$K(\theta) = K_s \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^\eta \quad (30)$$

donde η es un parámetro de forma empírico y positivo.

Las características hidrodinámicas presentan seis parámetros desconocidos, a saber: $\{\theta_r, \theta_s, \psi_d, K_s, m, \eta\}$. El contenido volumétrico de agua residual puede ser asumido igual a cero de acuerdo con Fuentes *et al.* (1992): $\theta_r = 0 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$. El contenido volumétrico de agua a saturación puede ser asimilado a la porosidad total del suelo (ϕ) si se asume que no queda aire atrapado en el suelo saturado en la arcilla valle del Carrizo $\phi = 0.5 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ y en consecuencia $\theta_s = 0.5 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$.

Ilustración 6. Contenido volumétrico de agua inicial observado en campo.



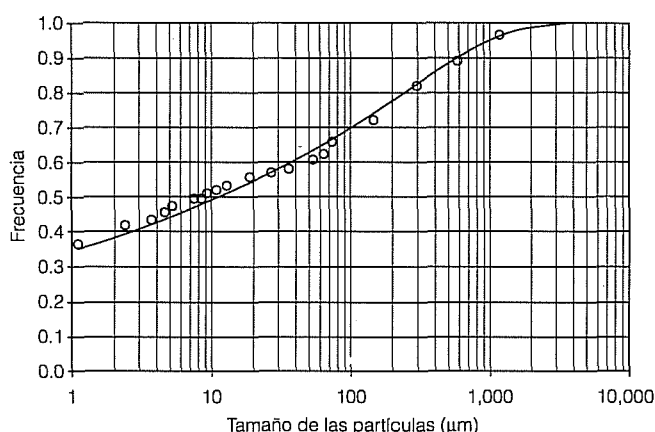
El parámetro de forma m puede estimarse a partir de la curva granulométrica y de la porosidad total, de acuerdo con un procedimiento sugerido por Fuentes (1992).

La curva granulométrica experimental se ajusta con una función similar a la presentada en la ecuación 29:

$$F(D) = \left[1 + \left(\frac{D_g}{D} \right)^N \right]^{-M} \quad (31)$$

donde $F(D)$ es la frecuencia acumulada basada en el peso de las partículas cuyos tamaños son inferiores o iguales a D ; D_g es un tamaño característico de las partículas. M y N son dos parámetros de forma empíricos, y por congruencia; $M = 1 - 2/N$, con $0 < M < 1$ y $N > 2$. El buen ajuste de la curva granulométrica por la ecuación 31, $R^2 = 0.9922$, en la arcilla del valle del Carrizo se muestra en la ilustración 7 con: $D_g = 105 \mu\text{m}$ y $M = 0.0715$.

Ilustración 7. La curva granulométrica de la arcilla del valle del Carrizo ajustada con la ecuación 31.



Haciendo $\lambda = mn$ y $\mu = MN$ el parámetro de forma m puede ser relacionado con M a través de la fórmula (Fuentes, 1992):

$$\frac{\mu}{\lambda} \cong 1 + \frac{2d-1}{2(1-d)} \quad (32)$$

donde d es el cociente de la dimensión fractal del suelo y la dimensión del espacio de Euclides ($d = D/3$) definido implícitamente en función de la porosidad total del suelo por (Fuentes et al., 2001):

$$(1-\phi)^d + \phi^{2d} = 1 \quad (33)$$

Con la porosidad $\phi = 0.5 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ se obtiene:

$d = \log \left[\left(1 + \sqrt{5} \right) / 2 \right] / \log(2) \cong 0.6942$. En la arcilla del

valle del Carrizo $\mu = MN = 0.1540$ y por la tanto $\lambda = mn = 0.0940$, de donde $m = 0.0450$.

En la ecuación de Brooks y Corey el parámetro η se puede estimar con la relación propuesta por Fuentes et al. (2001) $\eta = 2d/(2/\lambda + 1)$. Con los valores precedentes se obtiene para la arcilla del valle del Carrizo: $\eta = 30.87$.

Los dos parámetros restantes $\{\psi_a, K_s\}$ pueden estimarse a partir de fenómenos transitorios del flujo del agua en el suelo. Fuentes (1992) lo hace utilizando pruebas de infiltración realizadas con doble cilindro, a fin de reproducir con la ecuación de Richards las observaciones experimentales sobre la lámina infiltrada acumulada en el transcurso del tiempo. En la arcilla del valle del Carrizo los parámetros se estiman para reproducir el hidrograma de salida observado experimentalmente en una línea de drenaje.

La prueba de riego es representada durante 2 h de tiempo de contacto por una condición de Dirichlet, es decir, el potencial de presión del agua en la superficie del suelo es igual al tirante de agua medio observado de 4 cm. Después de terminar el riego, el flujo de Darcy en la superficie se toma igual a la evaporación del suelo (condición de Neumann) estimada por una estación agrometeorológica cercana; por simplicidad se asumió como un promedio ponderado de las observaciones diurnas y nocturnas igual a 2.8 mm/día. El perfil de humedad que se muestra en la ilustración 6 representa la condición inicial en el dominio de solución.

La suma de los cuadrados de los errores entre el hidrograma calculado con la solución de elemento finito y el hidrograma de salida observado es mínima con los valores $\psi_d = -55$ cm y $K_s = 2$ cm/h. En la ilustración 8 se observa la buena concordancia entre los dos hidrogramas, $R^2 = 0.9969$.

El hidrograma presenta un punto máximo en $t \approx 5.36$ h, esto es, aproximadamente 4 h después de

Ilustración 8. Comparación entre el hidrograma calculado con la solución de elemento finito y el hidrograma de salida experimental.

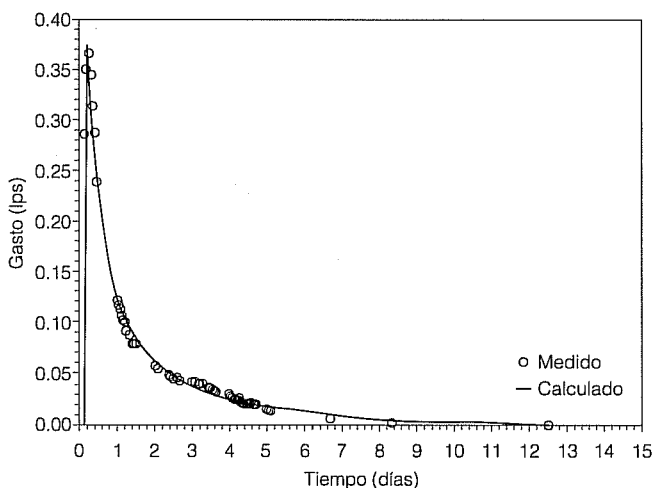
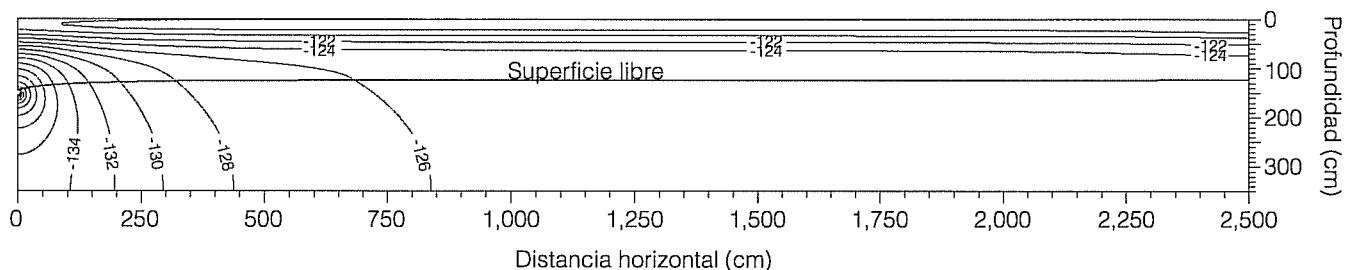


Ilustración 9. Líneas equipotenciales correspondientes al punto máximo del hidrograma de salida ($t \approx 5.36$ h, $Q_{\text{máx}} = 0.372$ lps) y posición de la superficie libre.



terminado el riego, con un valor del gasto drenado de $Q_{\text{máx}} = 0.372$ lps. En la ilustración 9 se muestran las líneas equipotenciales, es decir, líneas con igual valor de $H = \psi - z$, y la posición de la superficie libre correspondiente al gasto máximo.

En la ilustración 10 se muestra un detalle de las líneas equipotenciales y del campo de velocidades en una vecindad del dren, correspondiente al punto máximo del hidrograma de salida. Las magnitudes mínima y máxima del flujo o velocidad de Darcy son, respectivamente $q_{\text{mín}} = 4.73 \times 10^{-8}$ cm/s y $q_{\text{máx}} = 6.85 \times 10^{-4}$ cm/s.

En las ilustraciones 11, 12 y 13 se muestra la configuración de las líneas equipotenciales y la posición de la superficie libre correspondientes a 1, 5 y 10 días a partir del inicio del riego.

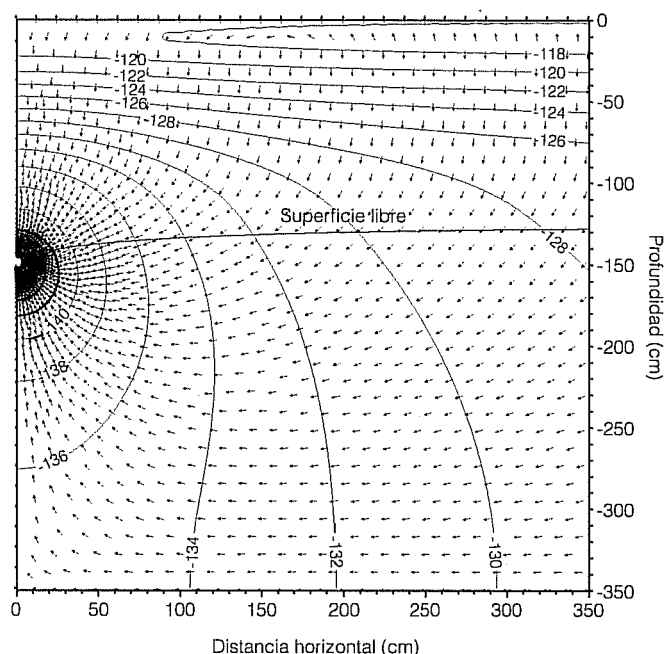
No obstante que la validación de la solución de elemento finito presentada se realizó de manera parcial, esto es, cuando los resultados proporcionados por ésta se compararon con una solución analítica obtenida para una parte del dominio y para un tiempo limitado, las ilustraciones gráficas no muestran oscilaciones aparentes en las equipotenciales. De este modo la solución puede ser aplicada para la descripción del funcionamiento hidráulico de un sistema de drenaje.

El método para caracterizar el suelo aplicado en este trabajo permite obtener valores medios representativos que tienen en cuenta de manera indirecta la variabilidad espacial de las propiedades hidrodinámicas del suelo en el área de influencia de una línea de drenaje.

Conclusiones

Se ha desarrollado una solución de elemento finito de la ecuación bidimensional de Richards para describir el movimiento del agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo. La solución de elemento finito ha sido parcialmente validada con una solución analítica exacta de la ecuación de Richards para una columna semi-infinita de suelo sujeta a una condición de flujo cons-

Ilustración 10. Detalle de las líneas equipotenciales y del campo de velocidades correspondientes al punto máximo del hidrograma de salida. Las magnitudes extremas de la velocidad de Darcy son $q_{\min} = 4.73 \times 10^{-8}$ cm/s y $q_{\max} = 6.85 \times 10^{-4}$ cm/s.



tante sobre la superficie del suelo, la cual describe la evolución temporal del perfil de humedad sobre el dren mientras la posición del frente de humedecimiento sea menor que la profundidad del dren. La comparación de los perfiles de humedad en un suelo arenoso y uno arcilloso ha permitido seleccionar un solo paso de tiempo numérico para aproximar la solución exacta en ambos suelos con un error relativo máximo menor de 0.25 por ciento.

La solución de elemento finito ha sido aplicada para describir el funcionamiento hidráulico de un sistema de drenaje instalado en una parcela agrícola de un distrito de riego ubicado en la zona semiárida del noroeste de México, aceptando la presencia de una superficie de filtración en el dren. El suelo de textura esencialmente arcillosa ha sido caracterizado desde el punto de vista hidrodinámico a partir de su curva granulométrica y su porosidad, y a partir de una prueba de drenaje en la parcela. La conductividad hidráulica a saturación y un valor característico de la presión se estimaron para minimizar los errores entre el hidrograma proporcionado por la solución y el hidrograma observado experimentalmente.

El hidrograma teórico dado por la solución de elemento finito describe las características matemáticas,

Ilustración 11. Líneas equipotenciales y posición de la superficie libre a un día a partir del inicio del riego.

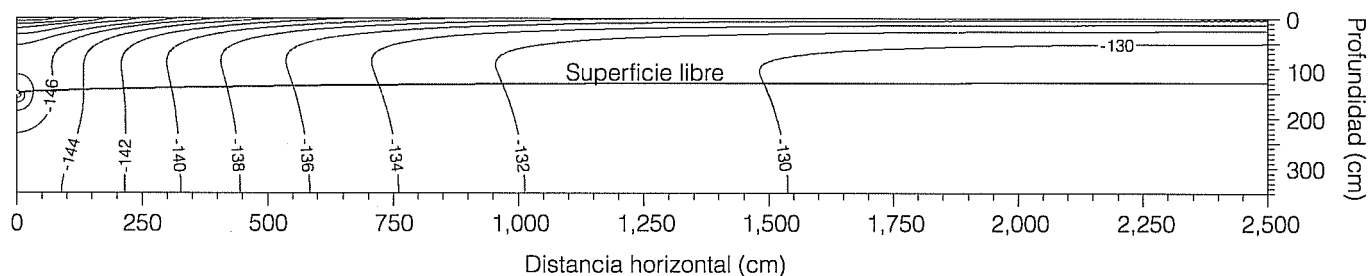


Ilustración 12. Líneas equipotenciales y posición de la superficie libre a cinco días a partir del inicio del riego.

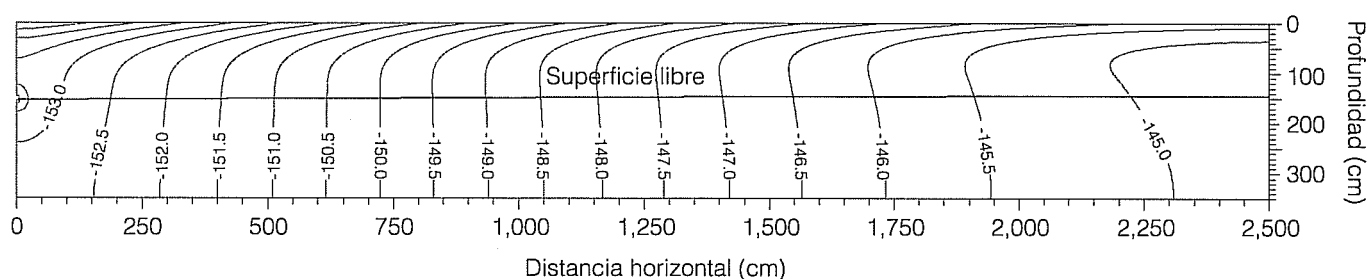
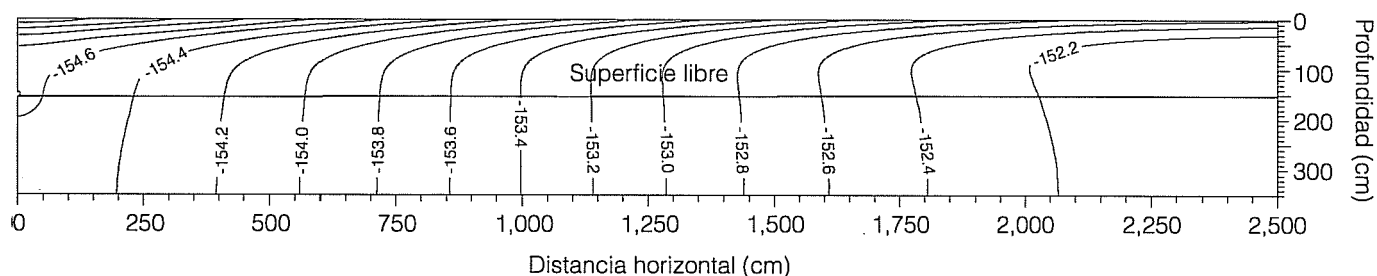


Ilustración 13. Líneas equipotenciales y posición de la superficie libre a diez días a partir del inicio del riego.



como la presencia de un punto máximo, del hidrograma experimental. Las fases de crecimiento y recesión del hidrograma son igualmente bien descritos por la solución. Esto valida el tratamiento de la condición de frontera en el dren como una superficie de filtración. En consecuencia, la solución propuesta puede ser utilizada tanto para la identificación de parámetros del suelo a partir de pruebas de drenaje como para la descripción del funcionamiento hidráulico de un sistema de drenaje.

Recibido: 18/03/1998

Aprobado: 30/07/2001

Referencias

- Bouwer, H., "Rapid Field Measurement of Air Entry Value and Hydraulic Conductivity of Soils as Significant Parameters in Flow System Analysis", *Water Resources Res.*, vol. 36, 1964, pp. 411-424.
- Brooks, R.H. y A.T. Corey, "Hydraulic Properties of Porous Media", *Hydrol.*, núm. 3, Colo. State. Univ., Fort Collins, 1964.
- Burdine, N.T., "Relative permeability calculation from size distributions data", *Trans. AIME*, vol. 198, 1953, pp. 71-78.
- Fipps, G. y R.W. Skaggs, "Drains as a Boundary Condition in Finite Elements", *Water Resources Res.*, vol. 22, núm. 11, 1986, pp. 1613-1621.
- Fuentes, C., R. Haverkamp y J.-Y. Parlange, "Parameter Constraints on Closed-Form Soil-Water Relationships", *J. of Hydrology*, vol. 134, 1992, pp. 117-142.
- Fuentes, C., *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non saturés*, tesis de doctorado de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble, Francia, 1992, 267 pp.
- Fuentes, C., R. Namuche, L. Rendón, R. Patrón, O. Palacios, F. Brambila y A. González, "Solución de la ecuación de Boussinesq del régimen transitorio en el drenaje agrícola bajo condiciones de radiación: el caso del Valle del Carrizo, Sinaloa", *Memorias del VII Congreso Nacional de Irrigación*, vol. 3, México, 1997, pp. 146-152.
- Fuentes, C., F. Brambila, M. Vauclin, J.-Y. Parlange y R. Haverkamp, "Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados", *Ingeniería Hidráulica en México*, vol. 16, núm. 2, 2001, pp. 119-137.
- Fujita, H., "The Exact Pattern of a Concentration-Dependent Diffusion in a Semi-Infinite Medium, Part II", *Textile Research Journal*, vol. 22, 1952, pp. 823-827.
- García, L. y H. Manguerra, "Irrigation-Drainage Design and Management Model: Development", *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, vol. 121, núm. 1, 1994, pp. 71-82.
- Hills, R.G. y A.W. Warrick, "Burgers' Equation: A Solution for Soil Water Flow in a Finite Length", *Water Resources Res.*, vol. 29, 1993, pp. 1179-1184.
- Manguerra, H. y L. García, "Irrigation-Drainage Design and Management Model: Validation and Application", *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, vol. 121, núm. 1, 1994, pp. 83-94.
- Mori, M., *The Finite Element Method and its Applications*, Macmillan, Nueva York, 1983.
- Noor, A. y J.M. Peters, "Preconditioned Conjugate Gradient Technique for the Analysis of Symmetric Structures", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, 1987, pp. 2057-2070.
- Neuman, S.P., "Saturated-Unsaturated Seepage by Finite Elements", *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, HY12, Pap. 10201, 1973, pp. 2233-2250.
- Parlange, J.Y., R.D. Braddock, I. Lisle y R.E. Smith, "Three Parameter Infiltration Equation", *Soil Sci.*, vol. 11, 1982, pp. 170-174.
- Richards, L.A., "Capillary Conduction of Liquids through Porous Mediums", *Physics*, vol. 1, 1931, pp. 318-333.
- Rogers, C., M.P. Stallybrass y D.L. Clements, "On Two-Phase Filtration under Gravity and with Boundary Infiltration: Application of a Bäcklund Transformation", *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, vol. 7, 1983, pp. 785-799.
- Sanders, G.C., J.-Y. Parlange, V. Kühnel, W.I. Hogart, D. Lockington y J.P.J. O'Kane, "Exact Nonlinear Solution for Constant Flux Infiltration", *J. of Hydrology*, vol. 97, 1988, pp. 341-346.
- Van Genuchten, M.Th., "A Closed-Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils", *Soil Sci. Soc. Amer. J.*, vol. 44, 1980, pp. 892-898.

Warrick, A.W. y G.W. Parkin, "Analytical Solution for One-Dimensional Drainage: Burgers' and Simplified Forms", *Water Resources Res.*, vol. 31, 1995, pp. 2891-2894.

Zaradny, H. y R.A. Feddes, "Calculation of Non-Steady Flow Towards a Drain in Saturated-Unsaturated Soil by Finite Elements", *Agricultural Water Management*, vol. 2, 1979, pp. 37-53.

Abstract

Saucedo, H., C. Fuentes, M. Zavala & M. Vauclin, "A Finite Element Solution to the Water Transfer in an Agricultural Subsurface Drainage System", *Hydraulic Engineering in Mexico (in Spanish)*, vol. XVII, num. 1, pages 93-105, January-March, 2002.

A finite element solution of the two-dimensional Richards equation is developed to describe the water movement in an agricultural subsurface drainage system. This solution is partially validated with an exact analytical solution of the Richards equation for a semi-infinite column of soil with constant flux at the soil surface. The analytical solution describes the time evolution of water content profile while the moisture is less than the drain depth. The comparison of both numerical and analytical profiles in two soils, sandy and clayey, has allowed to select one single numerical time step to approach the analytical solution in both soils, with a maximum relative error less than 0.25%. The finite element solution has been applied to describe the hydraulic performance of a drainage system installed in a field of an irrigation district located in the semi-arid northwestern Mexico, taking a seepage-face boundary condition at the pipe drain. The clay textured soil has been hydrodynamically characterized from its granulometric curve, its porosity and from a drainage test on the field. The saturated hydraulic conductivity and a characteristic value of the water pressure have been estimated so that the error between the numerical hydrogram and the observed hydrogram has been minimized. The theoretical hydrogram obtained from the finite element solution describes the mathematical characteristics, like the maximum point, of the experimental hydrogram. The ascending and recession phases of the hydrogram are also well described by the solution. These results validate the treatment of the boundary condition at the pipe drain as a seepage-face. In consequence, the proposed solution can be used for both the soil parameter identification from drainage tests, and the hydraulic performance description of a drainage system.

Key words: seepage-face boundary condition at the drain, soil hydrodynamic characterization, arid-zone agricultural drainage.

Dirección institucional de los autores:

Heber Saucedo

Carlos Fuentes

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
Paseo Cuauhnáhuac 8532, Progreso, Jiutepec,
Morelos,
C.P. 62550,
México.
Correos electrónicos: hsaucedo@tlaloc.imta.mx,
cfuentes@tlaloc.imta.mx

Manuel Zavala

Universidad Nacional Autónoma de México
DEPFI, Campus Morelos
Paseo Cuauhnáhuac 8532, Progreso, Jiutepec,
Morelos,
C.P. 62550,
México.
Correo electrónico: mzavala73@yahoo.com

Michel Vauclin

Laboratoire d'Etude des Transferts en Hydrologie et Environnement
UMR 5564 (CNRS, INPG, IRD, UJF) BP 53, 38041 Grenoble-Cedex,
France.