

## Régimen crítico en canales circulares de fondo curvo

Gilberto Sotelo-Ávila

Universidad Nacional Autónoma de México

*Las condiciones generales del régimen crítico en canales de fondo curvo se presentan en el artículo previo titulado: "Flujo crítico en canales trapeciales de fondo curvo" (Ingeniería hidráulica en México, vol. XIX, núm. 1, enero-marzo de 2004, pp. 27-40) del mismo autor, donde también se exponen los resultados que se obtienen para el canal trapecial. En este artículo se presentan resultados similares, sólo que para el canal de sección circular. Estos resultados tienen aplicación, por ejemplo, en túneles de desfogue.*

**Palabras clave:** flujo crítico curvilíneo, régimen crítico en canales circulares de fondo curvo, profundidad crítica en canales circulares de fondo curvo.

### Antecedentes

El régimen crítico que aquí se describe ocurre en túneles cuyo fondo adopta una curvatura vertical importante, ya sea cuando cambia de una inclinación menor a una mayor, o bien se producen deflexiones obligadas por la topografía del terreno o para dirigir el flujo. Como ocurre en los canales de fondo plano, el régimen crítico en los túneles de fondo curvo es de gran importancia, ya que sirve de transición entre el subcrítico y el supercrítico.

### Estado crítico en un canal circular

En el trabajo antes mencionado se establece la ecuación 6 como la condición general que debe cumplirse para que haya régimen crítico en un canal de fondo curvo. Dicha ecuación se expresa en cualquiera de las formas siguientes:

$$\frac{Q}{\sqrt{g \cos \theta}} = \left[ -\frac{I_o^3 (1 - \kappa d)^3}{\kappa \cdot I_o - T} \right]^{1/2} \quad (1a)$$

$$S_c = \left[ \frac{u_o}{\sqrt{g d \cos \theta}} \right]_c = \left[ -\frac{\kappa I_o (1 - \kappa d)^3}{(\kappa I_o - T) \kappa d} \right]^{1/2} \quad (1b)$$

donde:

- $\kappa$  curvatura del fondo de la sección, en  $m^{-1}$ , igual a  $1/R$ , donde  $R$  es el radio local de la curva.
- $\theta$  ángulo que forma la tangente al fondo de la sección y la horizontal.
- $d$  distancia en dirección ortogonal al fondo de la sección y desde éste hasta la superficie libre, en m.
- $g$  aceleración de la gravedad, en  $m/s^2$ .
- $u_o$  componente de la velocidad normal a la sección en un punto sobre el fondo, en m/s.
- $S_c$  parámetro adimensional relacionado con el número de Froude crítico.
- $I_o$  integral que depende de la distribución del componente  $u$  de la velocidad y de la forma de la sección, definida por la ecuación:

$$I_o = \int_0^d \frac{B \, dn}{1 - \kappa n} \quad (2)$$

$Q$  caudal, en  $m^3/s$ .

$T$  ancho de la superficie libre en la sección, en m.

En la ilustración 1 se aclara mejor la simbología antes descrita.

La ecuación 1a para un canal circular de diámetro  $D$  se expresa en términos de parámetros adimensionales en la forma:

$$\frac{Q}{D^{5/2} \sqrt{g \cos \theta}} = \left[ -\frac{(\kappa I_o / D)^3 (1 - \kappa d)^3}{(\kappa D)^3 \left[ (\kappa I_o / D) - \right] - T / D} \right]^{1/2} \quad (3)$$

Sotelo y Escalante (2001) demostraron que para la sección circular el valor de la integral  $I_o$  está dado por:

$$I_o = -\frac{2D}{\kappa} \sqrt{\frac{d}{D} \left(1 - \frac{d}{D}\right)} + \frac{2 - \kappa D}{\kappa^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( 2 \frac{d}{D} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \right] - \frac{2\sqrt{1 - \kappa D}}{\kappa^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{2 \frac{d}{D} - (1 + \kappa d)}{1 - \kappa d} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (4a)$$

O bien, se escribe de la manera siguiente:

$$\frac{\kappa I_o}{D} = -2 \sqrt{\frac{d}{D} \left(1 - \frac{d}{D}\right)} + \frac{2 \frac{d}{D} - \kappa d}{\kappa d} \left[ \text{sen}^{-1} \left( 2 \frac{d}{D} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \right] - \frac{2 \sqrt{\frac{d}{D} - \kappa d}}{\kappa d \frac{d}{D}} \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{2 \frac{d}{D} - (1 + \kappa d)}{1 - \kappa d} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (4b)$$

Por otra parte, se demuestra que:

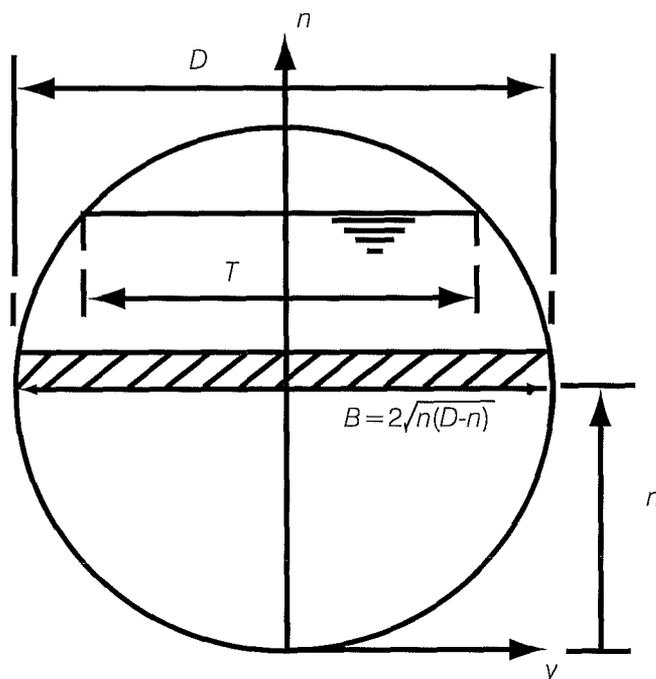
$$T = 2 \sqrt{d(D - d)} \quad (5a)$$

$$\frac{T}{D} = \frac{2}{D} \sqrt{d(D - d)} = 2 \sqrt{\frac{d}{D} \left(1 - \frac{d}{D}\right)} \quad (5b)$$

Las ecuaciones 4b y 5b se sustituyen en la 2 para determinar la condición crítica en un canal circular, considerando que  $d/D = \kappa d / \kappa D$ .

En la ilustración 2 se presenta en forma gráfica la ecuación 3 para el canal circular y permite determinar el tirante crítico relativo,  $\kappa d_c$ , en términos de parámetros, que son constantes para una condición dada de geometría y gasto.

Ilustración 1. Geometría de la sección circular normal al fondo.



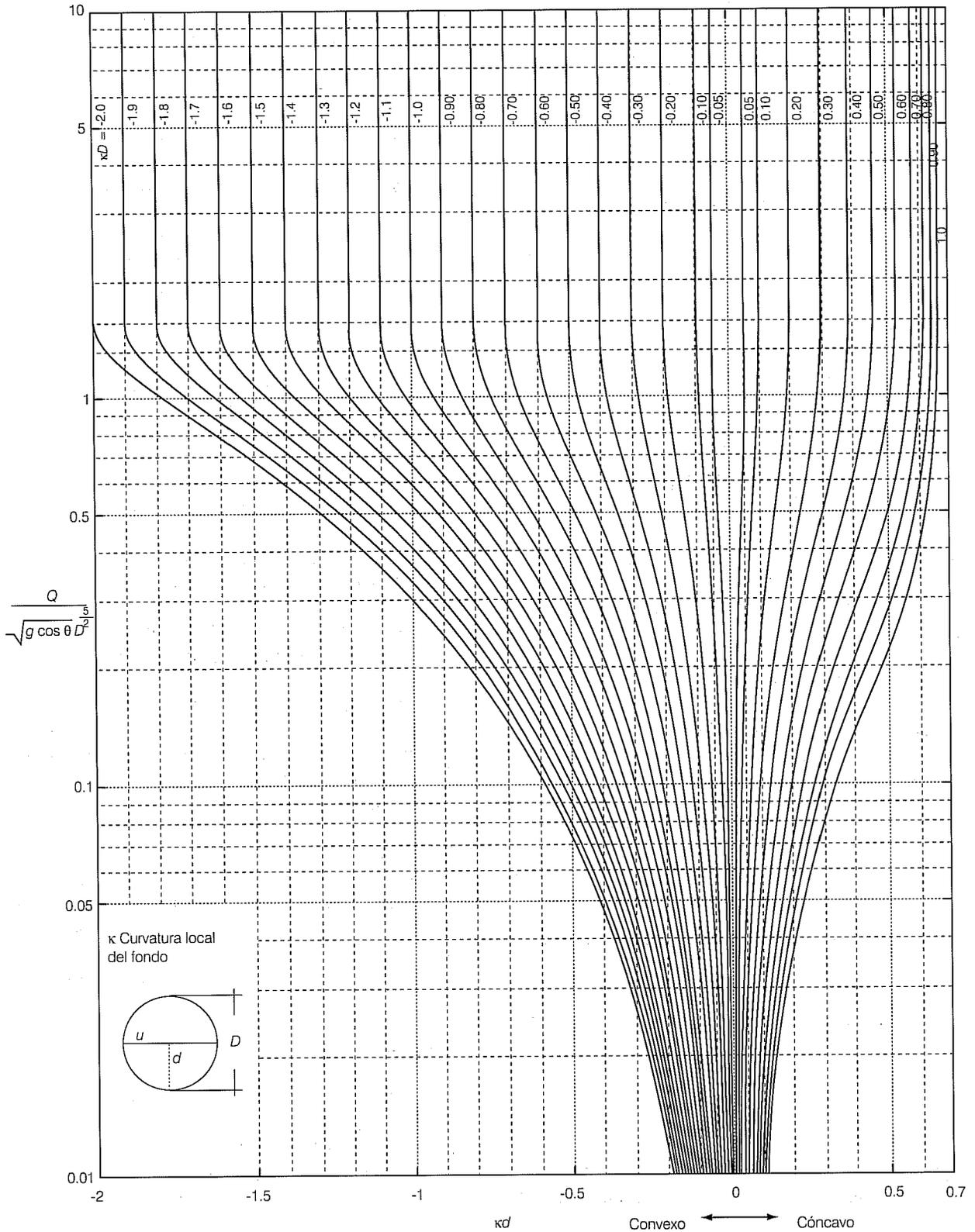
La condición crítica también se puede obtener de las ecuaciones 1b, 4b y 5b. Para hacer lo mencionado en términos de parámetros adimensionales, se utiliza la ecuación 4b en la forma:

$$\mathcal{S}_c = \left[ \frac{u_o}{\sqrt{g d \cos \theta}} \right]_c = \left[ -\frac{(\kappa I_o / D)(1 - \kappa d)^3}{\left( \frac{\kappa I_o}{D} - \frac{T}{D} \right) \kappa d} \right]_c^{1/2} \quad (6)$$

En esta ecuación se sustituyen las ecuaciones 4b y 5b. El parámetro  $\mathcal{S}_c$  depende únicamente de  $\kappa d$  y  $\kappa D$ , y en la ilustración 3 se muestra la representación gráfica de las condiciones del flujo crítico en un canal circular, que es del todo similar al publicado para la sección trapecial. Las curvas mostradas en la ilustración 3 representan la condición de régimen crítico ( $\mathcal{S}_c$ ) para cada valor del parámetro  $\kappa D$  entre 0 y  $\pm 2$ . Dichas curvas sirven de frontera entre los regímenes subcrítico y supercrítico.

El número de Froude generalizado para un canal de fondo curvo está dado por la ecuación 8 del trabajo previo y, en el caso particular del canal circular, se convierte en:

Ilustración 2. Tirante crítico en canales circulares de fondo curvo.



$$F = \frac{S}{S_c} = \frac{u_0 / \sqrt{g d \cos \theta}}{\left[ \frac{(\kappa I_o / D)(1 - \kappa d)^3}{\left[ \frac{\kappa I_o}{D} - \frac{T}{D} \right] \kappa d} \right]^{1/2}} \quad (7)$$

### Celeridad de la onda en canales circulares

Las ecuaciones 4b y 5b también se utilizan para calcular la celeridad de una onda de pequeña amplitud sobre la superficie libre de un canal circular de fondo curvo. Para esto, ellas se sustituyen en la ecuación general 11, mostrada en la publicación antecedente, y se hace  $b=D$ , dando como resultado la expresión siguiente:

$$c = \left[ -\frac{(1 - \kappa d)(\kappa I_o / D)g d \cos \theta}{\kappa d(\kappa I_o / D) - (T / D)\kappa d} \right]^{1/2} \quad (8)$$

Con esto se valida la definición general dada para el número de Froude generalizado, como el cociente del componente  $u_d$  de la velocidad al nivel de la superficie libre entre  $c$ .

### Separación del flujo y cavitación

En la ilustración 3 se presenta la curva límite para la separación del flujo cuando la presión en el fondo vale cero, dada por la expresión:

$$S_s = \left[ \frac{u_0}{\sqrt{g d \cos \theta}} \right]_s = \sqrt{\frac{2}{1 - (1 - \kappa d)^{-2}}} \quad (9)$$

Esta condición tiene aplicación en canales convexos donde la curvatura es negativa ( $\kappa < 0$ ), como en el caso de un cimacio.

También se muestran las curvas que corresponden a la ecuación:

$$S_{cav} = S_s \sqrt{1 - \frac{p_c / g\rho}{d \cos \theta}} \quad (10)$$

donde  $p_c$  es un valor negativo de la presión en el fondo, menor que la atmosférica. El parámetro dado por la ecuación 10 se ha designado como de cavitación, la cual

ocurre cuando en uno o varios puntos del fondo en una curva convexa se presentan valores negativos de la presión, comparables a los de vaporización del agua, y como resultado se tiene la condición de cavitación.

### Conclusiones

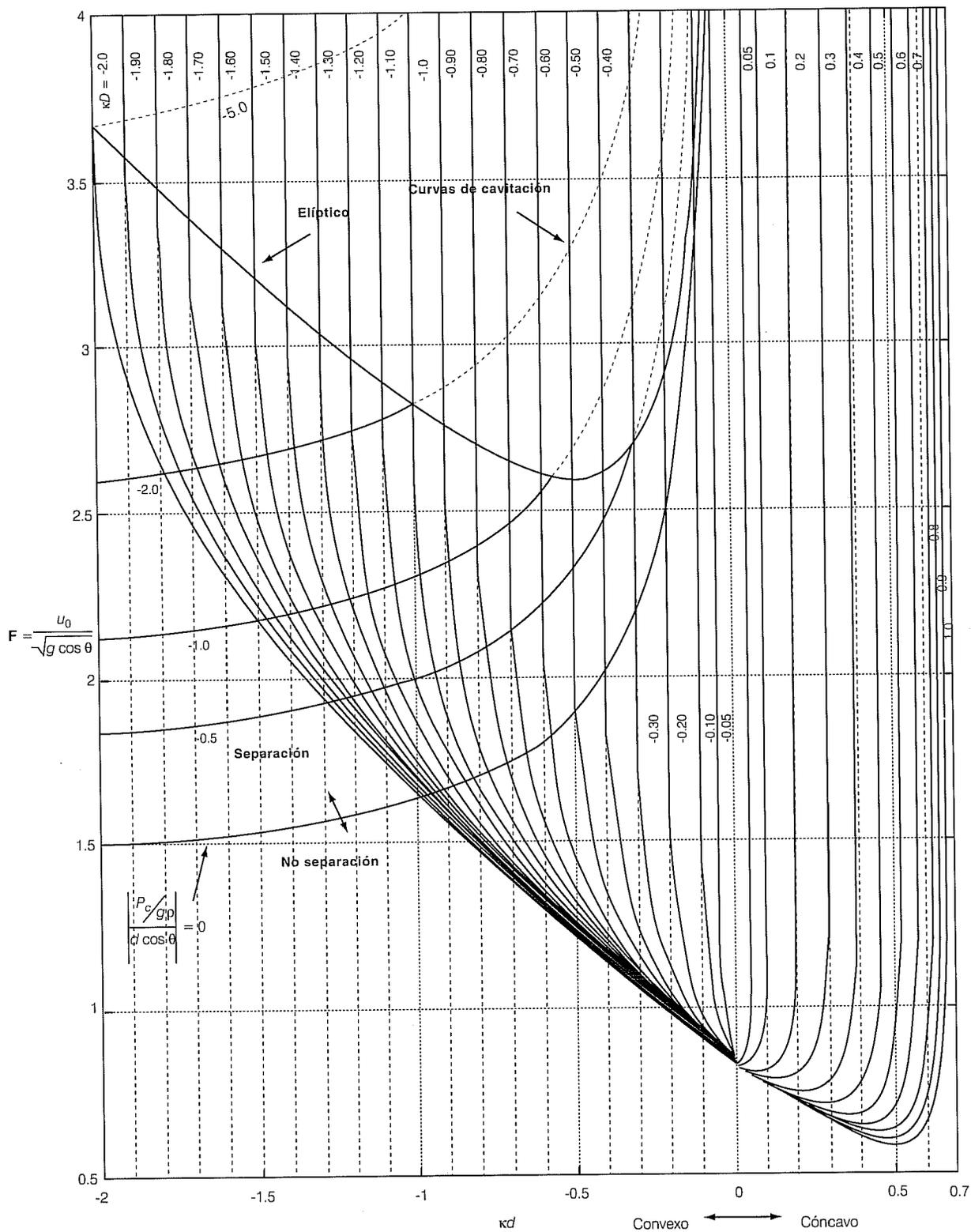
1. Las ecuaciones 3 y 6 representan las condiciones que gobiernan el régimen crítico en un canal de fondo curvo con sección circular, y las ecuaciones 4b y 5b proporcionan los valores de los parámetros que intervienen en las primeras. En el caso de secciones abovedadas, como la herradura u otras más complicadas, dichos parámetros tendrían que calcularse integrando la ecuación 2 mediante algún método numérico.
2. El número de Froude generalizado se expresa mediante la ecuación 7 y satisface lo expresado en el criterio de Henderson (1967) para el de fondo plano, de ser igual al cociente de la velocidad del agua al nivel de la superficie libre entre la celeridad con que se propagan los disturbios sobre dicha superficie. Para el régimen crítico se cumple que  $F=1$ .
3. El cálculo del régimen crítico en canales circulares de fondo curvo se puede hacer ya sea utilizando las ecuaciones 3 y 6 tanto en su forma analítica, o bien de manera gráfica con las ilustraciones 2 y 3, usando para ello los parámetros adecuados.
4. En la ilustración 3 se muestra la representación gráfica de la ecuación 9, que define la frontera para la separación del flujo en el fondo de un canal convexo y la posible aparición de la cavitación en su caso, como lo establece la ecuación 10.
5. Las ecuaciones generales del flujo sobre fondos curvos son también de naturaleza hiperbólica cuando la sección es circular, con validez en los campos de aplicación que también se muestran en la ilustración 3.

Recibido: 10/08/2002  
Aprobado: 21/05/2003

### Referencias

- HENDERSON, F.M. *Open channel flow*. New York: The McMillan Co., 1967.
- SOTELO, G. y ESCALANTE, C.A. Ecuaciones del flujo impermanente en canales trapeciales de fondo curvo. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. XVI, núm. 4, octubre-diciembre, 2001, pp. 45-51.

Ilustración 3. Flujo curvilíneo crítico en canales circulares. Identificación del tipo de régimen, y zonas de separación y cavitación cuando la curva es convexa.



**Abstract**

SOTELO-ÁVILA, G, *Critical state in circular curved-bed channels*. Hydraulic engineering in Mexico (in Spanish). Vol. XIX, no. 2, April-June, 2004, pp. 31-36.

*The general conditions of the critical state in curved-bed channels are shown in the previous paper: "Critical flow over trapezoidal curved-bed channels" (Hydraulic engineering in Mexico, vol. XIX, no. 1, January-March, 2002, pp. 27-40) from the same author, where the results obtained for the trapezoidal channels are shown too. This paper shows similar results for circular curved-bed channels, with applications in outlet tunnels.*

**Keywords:** *curvilinear critical free-surface flow, curved-bed critical surface flow, critical flow of circular curved-bed open channels.*

**Dirección institucional del autor:**

*Dr. Gilberto Sotelo-Ávila*

División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica,  
Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional Autónoma de México,  
Circuito Exterior, C.U.  
04511, México, D.F. México,  
teléfono: + (52) (55) 5622 8011,  
fax: + (52) (55) 5622 8007,  
sotelo@servidor.unam.mx.